ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том III 1958 Выпуск 2

ОДНА СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ, ПРИВОДЯЩАЯ К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Р. Л. ДОБРУШИН

1. В радиолокации является существенным (см., например, [1]) изучение следующей схемы. Имеется n каналов, на выходе каждого из которых возникает случайное напряжение ξ_i.

Мы будем считать, что случайные величины ξ_i являются независимыми и каждая из них имеет распределение Релея (т. е. распределение модуля двумерной симметричной нормальной величины), так что плотность распределения вероятностей величины ξ_i

$$p_{\xi_i}(x) = \frac{2x}{\lambda_i} e^{-x^2/\lambda_i}, \quad x \geqslant 0 \tag{1}$$

где

$$\lambda_i = \mathbf{M}\,\xi_i^2. \tag{2}$$

Относительно параметров λ_i имеются две конкурирующие гипотезы.

Гипотеза А: (Отсутствие сигнала). Все λ_i одинаковы и равны числу $d > 0$. Эта гипотеза означает, что источником напряжений, появившихся на выходе каналов, являются чистые шумы. Число d является средней мощностью шумов в канале.

Гипотеза Б: (Наличие сигналов). Все λ_i кроме одного λ_j, равны d, а $\lambda_j = d + \bar{d}$, где $\bar{d} > 0$. Индекс j является также случайным и принимает с вероятностью $\frac{1}{n}$ каждой из n возможных значений. Эта гипотеза означает, что источником напряжений во всех каналах, кроме j-го, являются шумы, а источником напряжения в j-ом канале является полезный сигнал, на который также накладываются шумы. Число $\bar{d}$ является средней мощностью сигнала *.

При такой постановке задачи ** мы пренебрегаем, конечно, возможностью того, что полезный сигнал появится одновременно в нескольких проводах.

---

* Наши рассуждения мало изменились бы, если бы мы считали, что априорные вероятности появления сигнала в различных каналах не совпадают друг с другом для разных каналов.

** Отметим недавнюю работу [5], где изучается один из возможных критериев различения гипотез А и Б.

Рассматриваемая схема имеет практический интерес, так как предположение о том, что напряжения ξ_i имеют распределения Релея является следствием предположений о гауссовском характере шума и гауссовском характере сигнала (см. [2]). Последнее предположение означает, что рассматривается задача об обнаружении объекта, дающего отраженный сигнал, представляющий собой сумму большого числа отражений от случайно расположенных отражающих центров.

Совместные плотности распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют соответственно при гипотезах А и Б вид

$$p_{\text{А}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{d} e^{-x_i^2/d}$$

$$p_{Б}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2x_j}{d+\bar{d}} e^{-x_j^2/d+\bar{d}} \prod_{i \neq j} \frac{2x_i}{d} e^{-x_i^2/d}.$$

Рассматривая отношение правдоподобия $p_Б / p_{\text{А}}$ видим, что оптимальный критерий для различения гипотез A и $Б$ основан на статистике

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{j=1}^{n} \exp\left\{\frac{\bar{d}}{d(d+\bar{d})} \xi_j^2\right\}. \tag{4}$$

Введем отношение

$$\beta = \frac{\bar{d}}{d},$$

где число β является безразмерной величиной, характеризующей отношение средней мощности сигнала к средней мощности шума. Нетрудно сосчитать, что если ξ_i имеет распределение Релея с параметром λ_i, то величина

$$\eta_i = \exp\left\{\frac{\bar{d}}{d(d+\bar{d})} \xi_i^2\right\}$$

такова, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i > x\} = x^{-\gamma}, \qquad 1 \leqslant x < \infty,$$
$$\gamma = \frac{d(d+\bar{d})}{\bar{d}\lambda_i}.$$

Отсюда статистика $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет при гипотезе А распределение, совпадающее с распределением суммы

$$S = \eta_1 + \ldots + \eta_n$$

n независимых слагаемых η_i, для каждого из которых

$$\mathbf{P}\{\eta_i > x\} = x^{-(1+\beta)\beta^{-1}}, \qquad 1 \leqslant x < \infty, \tag{6}$$

а при гипотезе Б статистика $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет распределение, совпадающее с распределением суммы

$$\widetilde{S} = \zeta + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$

где $\zeta, \eta_2, \ldots, \eta_n$ независимы и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_i > x\} &= x^{-(1+\beta)\beta^{-1}}, \qquad 1 \leqslant x < \infty, \\ \mathbf{P}\{\zeta > x\} &= x^{-\beta}, \qquad 1 \leqslant x < \infty, \end{aligned} \tag{7}$$

Как и следовало ожидать из физических соображений, распределения статистики $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ зависят лишь от параметра β.

Как известно, любой критерий для различения гипотез основан на задании таких двух взаимно дополнительных множеств $X_А$ и $X_Б$ в n-мерном пространстве, что при $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X_А$ считается верной гипотеза А, а при $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X_Б$ считается верной гипотеза Б. Рассмотрим вероятность

$$\int \underset{X_Б}{\ldots} \int p_А(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{8}$$

того, что будет принята гипотеза Б, когда верна на самом деле гипотеза А. Эту вероятность мы будем называть *вероятностью ложной тревоги*. Далее, введем вероятность

$$\int \underset{X_Б}{\ldots} \int p_Б(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{9}$$

того, что будет принята гипотеза Б, когда она на самом деле имеет место. Эту вероятность мы будем называть *вероятностью правильного обнаружения сигнала*. Пусть заданы два числа F и D, где $0 < F \leqslant D < 1$ Мы будем говорить, что *возможно различение гипотез с вероятностями F и D* если существует такой критерий для различения этих гипотез, при котором вероятность ложной тревоги не больше F, а вероятность правильного обнаружения сигнала не меньше D. Из общих теорем математической статистики вытекает, что здесь можно ограничиться рассмотрением критериев, основанных на статистике φ. В соответствии с этим возможность различения гипотез с заданными вероятностями зависит лишь от параметров n и β. Фиксируем n, F и D. Из соображений непрерывности ясно, что существует такое пограничное значение $\beta_n(F, D)$, что при $\beta \geqslant \beta_n(F, D)$ различение гипотез с вероятностями F и D возможно, а при $\beta_n(F, D) > \beta$ уже невозможно. Если использовать при $\beta = \beta_n(F, D)$ для различения гипотез A и B оптимальный критерий, основанный на отношении правдоподобия, то для некоторого y критерий с областью

$$X_А = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n) < y\}$$

будет давать ошибки точно равные F и D.

Величина $\beta_n(F, D)$ задает наименьшее превышение мощности сигнала над мощностью шума, при котором еще возможно различение сигнала на фоне шума с заданными вероятностями ошибок. Ее изучение — предмет этой работы. Из общих информационных соображений ясен качественный вывод о том, что $\beta_n(F, D)$ должно зависеть от n логарифмическим образом. В данной работе даются значительно более точные количественные оценки для $\beta_n(F, D)$.

2. Покажем, во-первых, что при любых фиксированных F и D и $n \to \infty$

$$\beta_n(F, D) = \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{1-F}{D-F}\right)} - 1 + \frac{1}{(1-F)\ln\left(\frac{1-F}{D-F}\right)} \int_{-\infty}^{K} \ln(K-y)\, p(y)\, dy + o(1), \tag{10}$$

где $p(y)$ — плотность устойчивого закона распределения с параметром $\alpha = 1$ (см. [4] § 34), характеристическая функция которого

$$\psi(\lambda) = \exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}\right\}, \tag{11}$$

а

$$F = \int_K^\infty p(x)\,dx. \tag{12}$$

Формула (10) не является вполне приемлемым практически решением интересующей нас задачи, так как с одной стороны, второе слагаемое формулы (10) трудно поддается численному расчету, а с другой стороны член $o(1)$ имеет, как можно ожидать, порядок $O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, так что приближение действует с достаточной точностью при весьма больших n. По тем же причинам не дало бы особого эффекта принципиально возможное вычисление дальнейших членов асимптотического разложения по степеням $\ln n$.

3. К счастью, практически интересным является, в основном, случай малой вероятности ложной тревоги (в задачах радиолокации естественно считать F порядка 10^{-5}). Поэтому оказывается полезной следующая асимптотическая формула: при фиксированных D и n и при $F \to 0$

$$\beta_n(F, D) = \frac{\ln n + \ln 1/F}{\ln 1/D} - 1 + o(1). \tag{13}$$

Есть основания ожидать, что имеет место и более точная формула

$$\beta_n(F, D) = \frac{\ln n + \ln \frac{1}{F}}{\ln\left(\frac{1-F}{D-F}\right)} - 1 + O(F), \tag{14}$$

где $O(F)$ равномерно по n. Однако, нам неизвестно строгое доказательство этого утверждения.

4. Простой и легко осуществимый критерий для различения гипотез А и Б основан на статистике $\max\limits_i \xi_i$. А именно, в этом критерии гипотеза А принимается, если $\max\limits_i \xi_i \leqslant y$, а гипотеза Б в противоположном случае. Аналогично тому, как это делалось выше, вводится $\hat{\beta}_n(F, D)$ такое, что при $\beta \geqslant \hat{\beta}_n(F, D)$ различения гипотез с вероятностями F и D при помощи критерия описанного только что типа возможно, а при $\beta < \hat{\beta}_n(F, D)$ уже невозможно. По определению

$$\hat{\beta}_n(F, D) \geqslant \beta_n(F, D).$$

Величину $\hat{\beta}_n(F, D)$ можно сосчитать, исходя из элементарных формул для максимума сумм независимых величин. Соответствующий расчет известен [3].

Оказывается, что для $\hat{\beta}_n(F, D)$ верна та же самая асимптотическая формула (14), что и для $\beta_n(F, D)$, причем остаточный член $O(F)$ мал равномерно по n. Таким образом для малых вероятностей F критерий, основанный на максимуме дает практически тот же результат, что и оптимальный. Представляется интересным найти точную асимптотику выражения

$$\frac{\hat{\beta}_n(F, D) - \beta_n(F, D)}{\beta_n(F, D)}.$$

5. Рассматриваемая здесь задача была поставлена автору Ю. Б. Кобзаревым, за что автор приносит ему свою искреннюю благодарность.

В разделах 6—10 доказывается результат, сформулированный в разделе 2. В разделах 11—12 доказывается результат, сформулированный в разделе 3. Эти две части работы можно читать независимо друг от друга.

6. Мы уже отмечали, что при гипотезе A статистика $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ распределена как сумма n независимых величин, имеющих степенное распределение. В связи с этим нам понадобятся некоторые факты об асимптотическом поведении таких сумм.

Пусть $S_n^{(a)} = \gamma_1^{(a)} + \cdots + \gamma_n^{(a)}$, где $\mathbf{P}\{\gamma_i^{(a)} > x\} = x^{-a}$, $x \geqslant 1$, $1 < a < 2$. Тогда $M\gamma_i^{(a)} = \frac{1}{a-1}$. Из известных теорем о сходимости к устойчивым законам (см. [4], стр. 195) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n^{(a)} - \frac{n}{a-1}}{n^{1/a}} < x\right\} = G_a(x),$$

где распределение $G_a(x)$ имеет характеристическую функцию

$$\varphi_a(\lambda) = \exp\int_0^\infty \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^{1+a}}. \tag{15}$$

Нам понадобятся некоторые дополнительные факты об устойчивых распределениях и сходимости к ним. Все эти факты являются частными случаями значительно более общих результатов, любезно сообщенных автору В. М. Золотаревым. Здесь они приводятся в удобной для нас форме.

Факт 1. *Существует константа C такая, что при всех x, n, $a > 1$*

$$\left|\mathbf{P}\left\{\frac{S_n^{(a)} - \frac{n}{a-1}}{n^{1/a}} < x\right\} - G_a(x)\right| \leqslant \frac{C}{n^{1/2}}. \tag{16}$$

Факт 2. *При любом a $(1 \leqslant a < 2)$ функция $G_a(x)$ имеет всюду положительную плотность $g_a(x)$, причем существует константа C такая, что одновременно для всех x и всех a, достаточно близких к 1,*

$$g_a(x) \leqslant \frac{C}{|x|+1}. \tag{17}$$

Факт 3. *Существует такая константа C, что одновременно для всех x и всех a достаточно близких к 1,*

$$G_a(x) \leqslant Ce^x. \tag{18}$$

7. Фиксируем параметры n, β и зададим вероятность F. Условие (сравнить с (8))

$$\int \cdots \int_{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \geqslant K} p_A(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = F \tag{19}$$

задает уровень K как функцию $K_n(\beta, F)$ от n, β, F. Положим (сравнить с (9))

$$D_n(\beta, F) = \int \cdots \int_{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \geqslant K_n(\beta, F)} p_B(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{20}$$

Рассмотрим последовательность

$$\bar{\beta}_n = c \ln n + d + o(1), \tag{21}$$

где $c > 0$ и d — некоторые постоянные. Наша ближайшая цель — изучить асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины

$$\bar{D}_n(F) = D_n(\bar{\beta}_n, F). \tag{22}$$

Отсюда будет уже без труда следовать основной интересующий нас результат (10).

8. Положим

$$\tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_n) - n\bar{\beta}_n^{-1}}{n^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}}. \tag{23}$$

Считая для краткости, что

$$\bar{a}_n = \bar{\beta}_n^{-1}(\bar{\beta}_n + 1)$$

и замечая, что статистика $\tilde{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет при гипотезе A то же распределение, что и нормированная сумма $S_n^{(\bar{a}_n)}$, выводим из (16), что

$$\left| \mathbf{P}_A\{\tilde{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x\} - G_{\bar{a}_n}(x) \right| \leqslant \frac{C}{n^{1/2}}. \tag{24}$$

Положим далее

$$\tilde{K}_n = \frac{K_n(\bar{\beta}_n, F) - n\bar{\beta}_n^{-1}}{n^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}}. \tag{25}$$

Тогда в соответствии с (19)

$$\mathbf{P}_A\{\tilde{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n) > \tilde{K}_n\} = F.$$

Теперь следующий фундаментальный для наших целей факт вытекает из неравенства [24], если положить там $x = \tilde{K}_n$:

$$\left| G_{\bar{a}_n}(\tilde{K}_n) - (1 - F) \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}. \tag{26}$$

При $n \to \infty$ величина $\bar{a}_n \to 1$. Из формулы (15) для характеристической функции видно, что при $n \to \infty$

$$G_{\bar{a}_n}(x) \to G_1(x). \tag{27}$$

Как уже отмечалось (факт 2 раздела 6), существует ненулевая плотность $g_1(x)$, а ввиду этого уравнение

$$1 - G_1(\tilde{K}) = F$$

имеет единственное решение $\widetilde{K}$. Следовательно, из (26) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{K}_n = \widetilde{K}. \tag{28}$$

9. Перейдем теперь к изучению распределения статистики $\widetilde{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при гипотезе Б. Здесь распределение $\widetilde{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ совпадает с распределением суммы

$$\frac{\zeta + \eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} - n\bar{\beta}_n^{-1}}{n^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}},$$

где η_i, ζ независимы, и их распределения задаются формулами (7). Положим для краткости

$$L_n(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} - n\bar{\beta}_n^{-1}}{n^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}} < x\right\}.$$

Из тождества

$$\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} - n\bar{\beta}_n^{-1}}{n^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} - (n-1)\bar{\beta}_n^{-1}}{(n-1)^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}} - \\ - \frac{1}{\bar{\beta}_n n^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}}$$

и соотношения (26), примененного к $S_{n-1}^{(\bar{a}_n)}$ следует, что для всех x

$$\left| G_{\bar{a}_n}\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}} + \bar{\beta}_n^{-1} n^{-\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}}\right) - L_n(x) \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n-1}}. \tag{29}$$

Из факта 2 раздела 6 и того, что $\bar{a}_n \to 1$ при $n \to \infty$ следует, что при достаточно большом n

$$|G_{\bar{a}_n}(x + \Delta x) - G_{\bar{a}_n}(x)| \leqslant \frac{C\,|\Delta x|}{|x| - |\Delta x| + 1}. \tag{30}$$

Поэтому (29) показывает, что при $n \to \infty$ равномерно по x

$$L_n(x) = G_{\bar{a}_n}(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{31}$$

Положим для краткости

$$H_n(x) = \mathbf{P}\left\{\zeta n^{-\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_n+1)^{-1}} < x\right\}.$$

Тогда (см. (7))

$$H_n(x) = 1 - n^{-(1+\bar{\beta}_n)^{-1}} x^{-\bar{\beta}_n^{-1}}, \qquad n^{-\bar{a}_n^{-1}} \leqslant x < \infty. \tag{32}$$

Из (20), (23) и (25) вытекает, что

$$\bar{D}_n(F) = P_Б\{\widetilde{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqslant \widetilde{K}_n\}.$$

Поэтому

$$\bar{D}_n(F) = 1 - \int_{-\infty}^{\widetilde{K}_n} L_n(\widetilde{K}_n - y)\, dH_n(y).$$

Из (31) вытекает, что

$$\overline{D}_n(F) = 1 - \int_{-\infty}^{\widetilde{K}_n} G_{\overline{a}_n}(\widetilde{K}_n - y)\, dH_n(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{33}$$

Учитывая (32). обнаруживаем, что

$$\overline{D}_n(F) = G_{\overline{a}_n}(\widetilde{K}_n) + \int_{-\infty}^{\widetilde{K}_n} [1 - \widetilde{H}_n(\widetilde{K}_n - y)]\, dG_{\overline{a}_n}(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= G_{\overline{a}_n}\left(\widetilde{K}_n - n^{-\overline{a}_n^{-1}}\right) + n^{-(1-\overline{\beta}_n)^{-1}} \int_{-\infty}^{\widetilde{K}_n - n^{\overline{a}_n^{-1}}} (\widetilde{K}_n - y)^{-\overline{\beta}_n^{-1}}\, dG_{\overline{a}_n}(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Далее, так как $\overline{a}_n \to 1$, то учитывая последовательно (30) и (26), видим, что

$$G_{\overline{a}_n}\left(\widetilde{K}_n - n^{-\overline{a}_n^{-1}}\right) = F + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{35}$$

Заметим далее, вспомнив основное условие (21), что

$$n^{-(1+\overline{\beta}_n)^{-1}} = \exp\left\{-\frac{\ln n}{c \ln n + d + o(1)}\right\} = e^{-1/c}\left[1 + \frac{d+1}{c^2 \ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right]. \tag{36}$$

Так как $\overline{\beta}_n \sim c \ln n$, то при $\infty > \widetilde{K}_n - y > \sqrt{\ln n}$ и достаточно большом n

$$(\widetilde{K}_n - y)^{-\overline{\beta}_n} \leqslant 1.$$

Значит, учитывая (18) и (28), находим, что

$$\int_{-\infty}^{\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}} (\widetilde{K}_n - y)^{-\overline{\beta}_n^{-1}}\, dG_{a_n}(y) \leqslant G_{a_n}(\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{37}$$

С другой стороны, из (17) следует, что при достаточно большом n

$$\int_{K_n - (\ln n)^{-2}}^{\widetilde{K}_n - n^{-\overline{a}_n^{-1}}} (\widetilde{K}_n - y)^{-\overline{\beta}_n^{-1}}\, dG_{a_n}(y) \leqslant C \int_{\widetilde{K}_n - (\ln n)^{-2}}^{\widetilde{K}_n - n^{-\overline{a}_n^{-1}}} (\widetilde{K}_n - y)^{-\overline{\beta}_n^{-1}}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C \int_0^{(\ln n)^{-2}} z^{-\overline{\beta}_n^{-1}}\, dz \leqslant C \int_0^{(\ln n)^{-2}} z^{-1/4}\, dz = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \tag{38}$$

Наконец, при $\sqrt{\ln n} \geqslant \widetilde{K}_n - y \geqslant (\ln n)^{-2}$

$$(\widetilde{K}_n - y)^{-\overline{\beta}_n^{-1}} = \exp\left\{-\frac{\ln(\widetilde{K}_n - y)}{c \ln n + d + o(1)}\right\} =$$

$$= 1 - \frac{\ln(\widetilde{K}_n - y)}{c \ln n + d + o(1)}(1 + o(1)) = 1 - \frac{\ln(\widetilde{K}_n - y)}{c \ln n}[1 + o(1)], \tag{39}$$

где член $o(1)$ является равномерным в рассматриваемой области. Значит, собирая (37), (38) и (39), видим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\widetilde{K}_n - n^{-\bar{a}_n^{-1}}} (\widetilde{K}_n - y)^{-\bar{\beta}_n^{-1}} \, dG_{a_n}(y) = \int\limits_{\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}}^{\widetilde{K}_n - (\ln n)^{-2}} (\widetilde{K}_n - y)^{-\bar{\beta}_n^{-1}} \, dG_{a_n}(y) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{\ln n}\right) = \left[G_{a_n}(\widetilde{K}_n - (\ln n)^{-2}) - G_{a_n}(\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n})\right] -$$

$$- \frac{1}{c \ln n} \int\limits_{\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}}^{K_n - (\ln n)^{-2}} \ln (\widetilde{K}_n - y) \, dG_{a_n}(y) \, [1 + o(1)] + o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{40}$$

Из (17) следует, что

$$G_{\bar{a}_n}(\widetilde{K}_n) - G_{\bar{a}_n}(\widetilde{K} - (\ln n)^{-2}) \leqslant \frac{C}{(\ln n)^2} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{41}$$

Далее из (18) следует, что

$$G_{\bar{a}_n}(\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{42}$$

Наконец, учитывая (26), обнаруживаем, что

$$G_{\bar{a}_n}(\widetilde{K}_n - (\ln n)^{-2}) - G_{\bar{a}_n}(\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}) = 1 - F + o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{43}$$

Далее, из (27), (28) и вытекающей из (17) и (18) сходимости интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\widetilde{K}} \ln (\widetilde{K} - y) \, dG_1(y)$$

следует, что при $n \to \infty$

$$\int\limits_{\widetilde{K}_n - \sqrt{\ln n}}^{\widetilde{K}_n - (\ln n)^{-2}} \ln (\widetilde{K}_n - y) \, dG_{\bar{a}_n}(y) \longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\widetilde{K}} \ln (\widetilde{K} - y) dG_1(y). \tag{44}$$

Учитывая (40), (43) и (44), видим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\widetilde{K}_n - n^{-\bar{a}_n^{-1}}} (\widetilde{K}_n - y)^{\bar{\beta}_n^{-1}} \, dG_{\bar{a}_n}(y) = 1 - F -$$

$$- \frac{1}{c \ln n} \int\limits_{-\infty}^{\widetilde{K}} \ln (\widetilde{K} - y) \, dG_1(y) + o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{45}$$

Наконец (34), (35), (36) и (45) показывают вместе, что

$$\overline{D}_n(F) = F + e^{-1/c} \left\{ 1 - F + \frac{1}{\ln n} \left[\frac{d+1}{c^2} (1 - F) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{c} \int\limits_{-\infty}^{\widetilde{K}} \ln (\widetilde{K} - y) \, dG_1(y) \right] \right\} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{46}$$

10. Вспомним теперь, что по определению

$$D_n(\beta_n(F, D), F) \equiv D, \tag{47}$$

и что D_n монотонно возрастает при возрастании первого аргумента. Определим теперь константы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ так, чтобы при подстановке этих чисел в (46) вместо c и d выражение (46) давало бы $D + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, т. е. найдем $\bar{c}$ и $\bar{d}$ из уравнений

$$F + e^{-\frac{1}{\bar{c}}}(1-F) = D,$$
$$e^{-\frac{1}{\bar{c}}}\left[\frac{\bar{d}+1}{\bar{c}^2}(1-F) - \frac{1}{\bar{c}}\int_{-\infty}^{\widetilde{K}} \ln(\widetilde{K}-y)\, dG_1(y)\right] = 0. \tag{48}$$

Если бы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\beta_n(F,\ D)}{\ln n} > \bar{c}$, то по некоторой подпоследовательности n_i величина $\beta_{n_i}(F,\ D) \geqslant \tilde{c}\ln n_i$, где $\tilde{c} > c$. Но при $\widetilde{\beta}_{ni} = \tilde{c}\ln n_i$, как видно из (46), $\lim\limits_{i\to\infty} D_{n_i}(\widetilde{\beta}_{n_i},\ F) > D$, и мы пришли к противоречию с (47). Аналогично доказывается и что $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\beta_n(F,\ D)}{\ln n} \leqslant \bar{c}$ и поэтому $\beta_n(F,\ D) \sim \tilde{c}\ln n$. Далее, если бы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[\beta_n(F,\ D) - \bar{c}\ln n] > \bar{d}$, то по подпоследовательности $\widetilde{\beta}_{n_i} \geqslant c\ln n + \tilde{d}$, где $\tilde{d} > d$, а как видно снова из (47)

$$D_{n_i}(c\ln n_i + \tilde{d},\ F) = D + \frac{K}{\ln n}(1 + o(1)),$$

где $k > 0$. Мы снова пришли к противоречию. Проведя то же рассуждение и для нижнего предела, обнаружим, что

$$\bar{\beta}_n(F,\ D) = \bar{c}\ln n + \bar{d} + o(1),$$

а из (48) видно, что это утверждение эквивалентно утверждению (10), сформулированному в разделе 2.

11. Мы приступим теперь к доказательству результатов, сформулированных в разделе 3. Прежде всего докажем одну лемму о суммах независимых величин, имеющих степенные распределения.

Лемма. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные величины такие, что*

$$\mathbf{P}\{\xi_i \geqslant x\} = x^{-\rho},\ x \geqslant 1,\ \rho \geqslant 1. \tag{49}$$

Тогда при фиксированном n *и* $x \to \infty$.

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x\} = nx^{-\rho}[1 + o(1)],$$

где член $o(1)$ *равномерно стремится к нулю при* $1 \leqslant \rho \leqslant 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Заметим, что имеет место следующее равенство между событиями: при $\ln x \geqslant n$

$$\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x\} =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n}\left\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x,\quad \xi_i \geqslant \frac{x}{\ln x},\ \xi_j \geqslant \frac{x}{\ln x},\ \ j \leqslant i\right\} \cup A_x, \tag{50}$$

где событие A_x означает, что $\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x$, и по крайней мере два из слагаемых ξ_i превосходят $x / \ln x$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{A_x\} \leqslant n(n-1)\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{-2\rho} = x^{-\rho} o(1), \tag{51}$$

где $o(1)$ равномерно стремится к нулю при $1 \leqslant \rho \leqslant 1+\varepsilon$, $x \to \infty$. Далее,

$$\left\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x,\ \xi_i \geqslant \frac{x}{\ln x},\ \xi_j < \frac{x}{\ln x},\ j \leqslant i\right\} =$$
$$= \left\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x,\ \xi_i \geqslant x - \frac{xn}{\ln x},\ \xi_j < \frac{x}{\ln x},\ j \neq i\right\} =$$
$$= \left\{\xi_i \geqslant x,\ \xi_j < \frac{x}{\ln x},\ j \neq i\right\} +$$
$$+ \left\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant x,\ x > \xi_i \geqslant x - \frac{nx}{\ln n},\ \xi_j < \frac{x}{\ln x}\ j \neq i\right\}.$$

Вероятность второго слагаемого этой суммы не превосходит

$$\mathbf{P}\left\{x \geqslant \xi_i > x - \frac{xn}{\ln n}\right\} = x^{-\rho} - \left(x - \frac{xn}{\ln x}\right)^{-\rho} =$$
$$= x^{-\rho}\left[1 - \left(1 - \frac{n}{\ln n}\right)^{-\rho}\right] = x^{-\rho} o(1), \tag{53}$$

где член $o(1)$ обладает тем же свойством, что и выше. Наконец,

$$\mathbf{P}\left\{\xi_i \geqslant x,\ \xi_j < \frac{x}{\ln x},\ j \neq i\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi_i \geqslant x\right\} \prod_{j \neq i} \mathbf{P}\left\{\xi_j < \frac{x}{\ln x}\right\} =$$
$$= x^{-\rho}[1 + o(1)]. \tag{54}$$

Собирая вместе утверждения (50) — (54), выводим из них сформулированную лемму.

12. Обозначим теперь $x(F, \beta)$ такое число x, что

$$\mathbf{P}\{S_\beta = \eta_1 + \ldots + \eta_n > x\} = F,$$

где величины η_i независимы и имеют распределение (49) с $\rho = 1 + \frac{1}{\beta}$ (сравн. с (6)). Число слагаемых n (число каналов) будет у нас в дальнейшем фиксировано; в ввиду этого соответствующий индекс будет опускаться. Заметим, что при $F \to 0$ величина $x(F, \beta) \to \infty$ равномерно по β, и ввиду этого из леммы раздела 11 следует, что при $F \to 0$ равномерно по $\beta > \varepsilon > 0$

$$x(F, \beta) = (F/n)^{-\beta/\beta+1}(1 + o(1)). \tag{55}$$

Рассмотрим теперь (сравн. с (7)) сумму

$$\widetilde{S}_\beta = \zeta + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$

где η_i, ζ — независимы и имеют степенные распределения (49) с показателями $\rho = 1 + \frac{1}{\beta}$, $\rho = \frac{1}{\beta}$ соответственно. Изучим

$$\mathbf{P}\{\widetilde{S}_\beta \geqslant x(F, \beta)\} \tag{56}$$

при $F \to 0$. Заметим, что имеет место следующее равенство событий

$$\{\widetilde{S}_\beta \geqslant x(F, \beta)\} = \{\zeta \geqslant x(F, \beta)\} \cup \{x(F, \beta) > \zeta \geqslant x(F, \beta) - \ln x(F, \beta),\ \widetilde{S}_\beta \geqslant x(F, \beta)\} \cup \{\zeta < x(F, \beta) - \ln x(F, \beta),\ \widetilde{S}_\beta \geqslant x(F, \beta)\}, \tag{57}$$

Вероятность первого слагаемого в (57) равна $[x(F, \beta)]^{-1/\beta}$. Вероятность второго слагаемого не превосходит

$$\mathbf{P}\{x(F, \beta) \geqslant \zeta > x(F, \beta) - \ln x(F, \beta)\} = = [x(F, \beta)]^{-1/\beta}\left[\left(1 - \frac{\ln x(F, \beta)}{x(F, \beta)}\right)^{-1/\beta} - 1\right].$$

Первый сомножитель здесь не превосходит единицы, а второй стремится к нулю при $x(F, \beta) \to \infty$ равномерно по β при $\beta > \varepsilon > 0$. Следовательно, при $F \to 0$ и $\beta > \varepsilon > 0$ вероятность второго слагаемого в (57) равномерно стремится к нулю. Наконец, событие

$$\{\zeta < x(F, \beta) - \ln x(F, \beta),\ \widetilde{S}_\beta \geqslant x(F, \beta)\} \subset \subset \{\eta_2 + \ldots + \eta_n > \ln x(F, \beta)\}, \tag{58}$$

а вероятность правой части соотношения (58) стремится к нулю равномерно по β при $\beta > \varepsilon > 0$. В итоге обнаруживаем, учитывая также (55), что

$$\mathbf{P}\{\widetilde{S}_\beta > x(F, \beta)\} = [x(F, \beta)]^{-1/\beta} + o(1) = (n/F)^{-1/\beta+1} + o(1), \tag{59}$$

где член $o(1)$ стремится к нулю при $F \to 0$ равномерно по $\beta > \varepsilon > 0$.

Заметим теперь, что по определению искомой величины $\beta_n(F, D)$ при

$$\bar{x}(F, D) = x(F, \beta_n(F, D))$$

имеет место равенство

$$\mathbf{P}\{\widetilde{S}_{\beta_n(F, D)} \geqslant x(F, D)\} = D. \tag{60}$$

Так как при $F \to 0$ величина $\beta_n(F, D)$ монотонно возрастает, то мы можем воспользоваться равенством (60), которое и показывает, что

$$(n/F)^{-\frac{1}{\beta_n(F, D)+1}} = D. \tag{61}$$

Проводя элементарные преобразования, выводим из (61) искомую формулу (13).

Поступила в редакцию
2. 11 57.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Benner, R. F. Drenick, On the problem of optimum detection of pulsed signals in noise, RCA Review, 16, № 3, (1955), 461—479. Русск. пер.: Вопр. радиолок. техн., 1955, № 5, 3—167.

[2] Пороговые сигналы, Сов. Радио, М., 9, 1952.

[3] Отчет Инст. радиотехн. и электрон. АН СССР, № 121—56—1.

[4] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых величин, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

[5] R. Doornbоos, H. J. Prins, Slippage test for a set of gamma-variables, Proc. Konikl. nederl. akad. wetensch., A59, №. 3, 1956, 329—337.

A STATISTICAL PROBLEM IN DETECTING A SIGNAL IN THE NOISE OF A MULTI-CHANNEL SYSTEM REDUCING TO STABLE DISTRIBUTION LAWS

R. L. DOBRUSHIN (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The following statistical problem arising in the theory of radar is solved. There are two hypotheses concerning joint densities of random variables $\xi_1, \dots, \xi_n$

$$A : P_A(x_1 \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{d} e^{-x_i^2/d}$$

$$B : P_B(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2x_j}{d+\bar{d}} e^{-x_j^2/d+\bar{d}} \prod_{i \neq j} \frac{2x_i}{d} e^{-x_i^2/d}$$

in which $d > 0$, $\bar{d} > 0$. Let $\beta = \frac{\bar{d}}{d}$. Denote by $\beta_n(F, D)$ a such number that there are no tests for distinguishing between hypotheses A and B with error probabilities. which are smaller than F and D for $\beta \leqslant \beta_n(F, D)$ and that tests exist for $\beta > \beta_n(F, D)$. It is proved that for $n = \text{const}$, $D = \text{const}$ and $F \to 0$

$$\beta_n(F, D) = \frac{\ln n + \ln 1/F}{\ln 1/D} - 1 + o(1).$$

An asymptotic formula containing stable distributions for $\beta_n(F, D)$, in which $F = \text{const}$, $D = \text{const}$ and $n \to \infty$, is derived.