

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ**

**УСЛОВИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ  
МАРТИНГАЛА**

**Р. Л. ДОБРУШИН**

Цель этой заметки — доказательство следующей теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $\{\zeta_t, t \in [0, 1]\}$  — сепарабельный мартингал. Если для любого  $\varepsilon > 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\sup_{t \in [0, 1 - \Delta t]} P \{ |\zeta_t - \zeta_{t+\Delta t}| > \varepsilon \} = o(\Delta t), \quad (1)$$

то почти все выборочные функции процесса  $\zeta_t$  являются непрерывными.

Отметим, что, как показали Дынкин [2] и Кинни [3], близкое условие является достаточным для непрерывности выборочных функций марковского процесса. Для произвольного сепарабельного вероятностного процесса достаточным условием непрерывности выборочных функций является условие Колмогорова (см. [1], прилож. переводчиков): при некотором  $\varepsilon > 0$  и  $p > 0$

$$\sup_{t \in [0, 1 - \Delta t]} M \{ |\zeta_t - \zeta_{t+\Delta t}|^p \} = o(|\Delta t|^{1+\varepsilon}). \quad (2)$$

Известны примеры, показывающие, что в (2) нельзя положить  $\varepsilon = 0$ , и, следовательно, условие (1) также не является достаточным для непрерывности выборочных функций общего процесса.

Теорема 1 получается как следствие следующей более общей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть  $\{\zeta_t, t \in [0, 1]\}$  — сепарабельный вероятностный процесс. Если выполнено условие (1) теоремы 1, то почти все выборочные функции не имеют разрывов первого рода.

Напомним, что разрывом первого рода функции  $x(t)$  называется точка  $t$  такая, что существуют не равные друг другу  $\lim_{\tau \rightarrow t+0} x(\tau)$  и  $\lim_{\tau \rightarrow t-0} x(\tau)$ . Дубом (см. [1], стр. 324) доказано, что для почти всех выборочных функций сепарабельного мартингала все разрывы являются разрывами первого рода. Следовательно, из теоремы 2 и результата Дуба немедленно следует теорема 1.

Приступая к доказательству теоремы 2, заметим сразу, что из основного условия (1) вытекает стохастическая непрерывность процесса и поэтому (см. [1], стр. 61) существует такой процесс  $\tilde{\zeta}_t$ , что при любом  $t$

$$P \{ \zeta_t = \tilde{\zeta}_t \} = 1, \quad (3)$$

и процесс  $\tilde{\zeta}_t$  является сепарабельным и измеримым. Если мы докажем, что процесс  $\tilde{\zeta}_t$  обладает выборочными функциями, без разрывов второго рода, то из равенства (3) будет следовать, что тем же свойством обладает и процесс  $\zeta_t$ . Поэтому мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением измеримых и сепарабельных процессов.

Будем обозначать  $\Omega = \{\omega\}$  пространство элементарных событий. Предположение об измеримости означает, по определению, что  $\zeta_t(\omega)$  является измеримой функцией пары переменных  $t$  и  $\omega$ . Обозначим  $A_{\varepsilon, \Delta t}$  множество таких пар  $(t, \omega)$ , что  $|\zeta_t(\omega) - \zeta_{t+\Delta t}(\omega)| > \varepsilon$ . Условие (1) означает, что при фиксированном  $t$  равномерно по всем  $t$

$$P\{(t, \omega) \in A_{\varepsilon, \Delta t}\} = o(\Delta t).$$

Следовательно, по теореме Фубини двумерная мера множества  $A_{\varepsilon, \Delta t}$  также есть  $o(\Delta t)$ . Обозначим теперь  $m_{\varepsilon, \Delta t}(\omega)$  меру Лебега множества точек  $t$  таких, что  $|\zeta_t(\omega) - \zeta_{t+\Delta t}(\omega)| > \varepsilon$ . Применяя снова теорему Фубини, видим, что мера множества  $A_{\varepsilon, \Delta t}$  совпадает с математическим ожиданием случайной величины  $m_{\varepsilon, \Delta t}(\omega)$ , так что при любом  $\varepsilon > 0$

$$Mm_{\varepsilon, \Delta t}(\omega) = o(\Delta t). \quad (4)$$

С другой стороны, если некоторая функция  $x(t)$  имеет в точке  $t_0$  разрыв первого рода, то существует столь малое  $\varepsilon$ , что при  $t - \varepsilon < t' < t_0 < t'' < t + \varepsilon$  разность  $|x(t') - x(t'')| > \varepsilon$ , и поэтому при  $\Delta t \leq \varepsilon$  мера Лебега множества точек  $\tau$  таких, что  $|x(\tau) - x(\tau + \Delta t)| > \varepsilon$  не меньше  $\Delta t$ . Если случайная функция  $\zeta_t(\omega)$  имеет разрывы первого рода для множества элементарных событий вероятности  $p > 0$ , то, как следует из сказанного выше, для достаточно малого  $\varepsilon$  с вероятностью, не меньшей  $\frac{p}{2}$ , величина  $m_{\varepsilon, \Delta t}(\omega) \geq \Delta t$ , и значит

$$Mm_{\varepsilon, \Delta t}(\omega) \geq \frac{p}{2} \Delta t. \quad (5)$$

Противоречие между (4) и (5) доказывает теорему.

Поступила в редакцию  
25. 9. 57

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Л. Д у б, Стохастические процессы, М., 1956.
- [2] Е. Б. Д ы н к и н, Критерий непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 563—572.
- [3] J. R. К и н н е у, Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Am. Math. Soc., 74 (1953), 280—302.

#### THE CONTINUITY CONDITION FOR SAMPLE MARTINGALE FUNCTIONS

R. L. DOBRUSHIN (MOSCOW)

(Summary)

It is proved that the condition

$$\sup_{t \in [0, 1 - \Delta t]} P\{|\zeta_t - \zeta_{t+\Delta t}| > \varepsilon\} = o(\Delta t) \quad \text{for any } \varepsilon > 0 \quad (1)$$

is sufficient for almost all sample functions of a separable stochastic process  $\{\zeta_t, t \in [0, 1]\}$  not to have first order discontinuities. If the process  $\{\zeta_t, t \in [0, 1]\}$  is a martingale process, it is sufficient that almost all sample functions of a separable process are continuous.