Обобщение уравнений Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний

Р. Л. Добрушин (Москва)

§ 1. Введение

Марковский процесс с конечным числом возможных состояний $E_1, \ldots, E_r$ обычно описывается при помощи условных вероятностей $p_{ij}(s, t)$ попадания в момент времени $t > s$ в состояние E_j при условии, что в момент времени s имело место состояние E_i. Эти вероятности предполагаются удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_k p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, u) = p_{ij}(s, u), \tag{1}$$

$$p_{ij}(s, t) \geqslant 0,$$
$$\sum_j p_{ij}(s, t) = 1, \tag{2}$$

вероятностный смысл которых общеизвестен. Объединив вероятности $p_{ij}(s, t)$ в матрицу $P(s, t)$, мы можем заменить соотношения (1) мультипликативным уравнением

$$P(s, t)\, P(t, u) = P(s, u). \tag{1'}$$

Естественно возникает задача описания всех возможных решений системы уравнений (1) и (2). А. Н. Колмогоров [6] показал, что из дифференцируемости $P(s, t)$ по t при некотором $t \neq s$ вытекает существование предела

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, t + \Delta t) - E}{\Delta t} = A(t)\ ^*, \tag{3}$$

* Сходимость матриц здесь и в дальнейшем понимается как их поэлементная сходимость. Такая сходимость эквивалентна сходимости в смысле нормы матрицы Q

$$\| Q \| = r \max_{i, j} | q_{ij} | \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, r).$$

Легко проверить, что эта норма обладает следующими свойствами:

1) $\| Q_1 + Q_2 \| \leqslant \| Q_1 \| + \| Q_2 \|$,
2) $\| \lambda Q \| = |\lambda|\, \| Q \|$, где λ — некоторое число,
3) $\| Q_1 Q_2 \| \leqslant \| Q_1 \| \cdot \| Q_2 \|$,
4) $\| Q \| = 0$ тогда и только тогда, когда $Q = 0$.

Через E мы будем обозначать единичную матрицу с элементами $\{\delta_{ij}\}$.

и вывел следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(s, t+\Delta t) - P(s,t)}{\Delta t} = P(s, t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, t+\Delta t) - E}{\Delta t} = P(s, t) A(t). \tag{4}$$

При произвольной непрерывной матричной функции $A(t)$ решение уравнения (4) с начальными условиями $P(s, s) = E$ удовлетворяет соотношению (1).

Дёблин [4] показал, что в однородном случае, когда $P(s, t) = P(t-s)$, существование предела (3) вытекает из единственного требования измеримости функций $p_{ij}(t-s)$.

Условия стохастичности (2) эквивалентны следующим условиям, накладываемым на матрицу A с элементами $\{a_{ij}\}$:

$$a_{ij} \geqslant 0 \text{ при } i \neq j, \quad a_{ii} \leqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij} = 0. \tag{5}$$

Хостинский [9] получил решение уравнения Колмогорова (4) в виде ряда, членами которого являются интегралы возрастающей кратности от функции $A(t)$.

Фреше [8] рассмотрел функцию

$$B(s, t) = \lim_{\max (t_i - t_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(t_{i-1}, t_i) - E],$$

где $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ и точки $\{t_i\}$ образуют произвольное разбиение отрезка $[s, t]$, и получил в случае непрерывной и имеющей ограниченную вариацию функции $P(s, t)$ интегральное уравнение, обобщающее дифференциальное уравнение Колмогорова.

Е. Б. Дынкин предложил использовать в данной задаче аддитивный интегральный процесс

$$B(s, t) = \lim_{\max\limits_i (t_i - t_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(t_{i-1}, t_i) - E] \tag{6}$$

и обратный ему мультипликативный интегральный процесс

$$P(s, t) = \lim_{\max\limits_i (t_i - t_{i-1}) \to 0} \prod_{i=1}^{n} [B(t_{i-1}, t_i) + E]. \tag{7}$$

(Мультипликативное интегрирование такого типа рассмотрел впервые еще Вольтерра ([2], см. также [3]). Оно было применено к дифференцируемым марковским процессам Арлеем [1].)

В наших рассмотрениях мы воспользуемся следующей идеей, принадлежащей А. Н. Колмогорову*. А именно, заметим, что в том случае, когда для некоторых t вероятности перехода, происходящего

* Отметим, впрочем, что эти, описываемые ниже нововведения носят методический характер и что все последующие рассуждения могут быть легко перенесены с функций интервала $P(\Delta)$ на обычно рассматриваемые функции пары точек $P(s, t)$.

точно в момент t, могут быть положительны, описание процесса, даваемое вероятностями $p_{ij}(s, t)$, содержит в себе некоторую неопределенность. В этом случае по существу приходится иметь дело с двумя понятиями: состояние непосредственно перед моментом t и состояние после момента t. Можно условиться называть «состоянием в момент времени t» какое-либо определенное из этих двух состояний. Если считать состоянием в момент времени t состояние, имевшее место непосредственно перед ним, то естественно считать переходные вероятности $p_{ij}(s, t)$ непрерывными по t *слева*. Если же считать состоянием в момент t то состояние, которое наступает непосредственно после этого момента, то естественно считать $p_{ij}(s, t)$ непрерывными по t *справа*.

Повидимому, теория только выигрывает в стройности, если вводить состояния, непосредственно предшествующие и непосредственно следующие за моментом времени t, явным образом, т. е. относить определенные состояния к «точкам» вида $\tau = t-0$ и $\tau = t+0$ «раздвоенного» континуума, обозначая, например, через

$$p_{ij}(t-0,\ t+0),$$

условную вероятность перехода $E_i \to E_j$, происходящего непосредственно в момент времени t, в предположении, что непосредственно перед моментом времени t имело место состояние E_i.

Естественно считать, что для аргументов τ_1 и τ_2 вида $\tau_1 = t_1 \pm 0$ и $\tau_2 = t_2 \pm 0$ имеет место неравенство $\tau_1 < \tau_2$ во всех случаях, когда $t_1 < t_2$, и, кроме того, в случае $\tau_1 = t-0$, $\tau_2 = t+0$. Пары (τ_1, τ_2) при $\tau_1 \leqslant \tau_2$ можно трактовать как интервалы, состоящие из обычных точек t:

$$(t_1-0,\ t_2+0) = \{t_1 \leqslant t \leqslant t_2\} = [t_1,\ t_2],$$

$$(t_1+0,\ t_2-0) = \{t_1 < t < t_2\} = (t_1,\ t_2),$$

$$(t_1+0,\ t_2+0) = \{t_1 < t \leqslant t_2\} = (t_1,\ t_2],$$

$$(t_1-0,\ t_2-0) = \{t_1 \leqslant t < t_2\} = [t_1,\ t_2),$$

$$(\tau, \tau) = \Lambda,$$

где Λ — «пустой» интервал. Для интервалов $\Delta_1 = (\tau_1, \tau_2)$ и $\Delta_2 = (\tau_2, \tau_3)$ будем считать их суммой

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

интервал

$$\Delta = (\tau_1, \tau_3).$$

Легко понять теперь смысл обозначения $p_{ij}(\Delta)$, где Δ — интервал любого из перечисленных типов. Переходные вероятности $p_{ij}(\Delta)$ мы будем считать подчиненными соотношениям

$$\sum_k p_{ik}(\Delta_1) p_{kj}(\Delta_2) = p_{ij}(\Delta_1 + \Delta_2), \tag{8}$$

$$p_{ij}(\Delta) \geqslant 0, \quad \sum_j p_{ij}(\Delta) = 1. \tag{9}$$

В матричных обозначениях, считая $P(\Delta) = \| p_{ij}(\Delta) \|$, можно записать (8) в виде

$$P(\Delta_1) P(\Delta_2) = P(\Delta_1 + \Delta_2). \tag{8'}$$

Кроме того, естественно считать, что для пустого множества

$$P(\Lambda) = E. \tag{10}$$

Матричные функции интервала, удовлетворяющие условиям (8') и (10), мы будем называть **мультипликативными**. Мультипликативные функции интервала, удовлетворяющие дополнительным условиям (9), будем называть **стохастическими**.

Для действительной функции $f(\tau)$ от элемента τ «раздвоенного континуума» понятие непрерывности при $\tau = \tau_0$ определяется в соответствии с общим определением, применимым к функциям, заданным на упорядоченных множествах: $f(\tau)$ **непрерывна** при $\tau = \tau_0$, если для любого действительного $\varepsilon > 0$ существуют такие τ_1 и τ_2, что $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ и при $\tau_1 < \tau < \tau_2$ имеет место неравенство

$$|f(\tau) - f(\tau_0)| < \varepsilon.$$

В силу этого определения, непрерывность $f(\tau)$ в точке $t_0 - 0$ означает, что

$$f(t \pm 0) \to f(t_0 - 0)$$

при приближении t к t_0 *слева*, а непрерывность $f(\tau)$ в точке $t_0 + 0$ означает, что

$$f(t \pm 0) \to f(t_0 + 0)$$

при приближении t к t_0 *справа*.

Легко видеть, что для того, чтобы переходные вероятности $p_{ij}(\tau_1, \tau_2)$ имели желательный нам вероятностный смысл, необходимо, чтобы функции $p_{ij}(\tau_1, \tau_2)$ были непрерывны по обоим аргументам. Мы будем изучать только *непрерывные мультипликативные матричные функции*. Во избежание недоразумений, стоит отметить, что этим мы не исключаем дискретных случайных процессов, так как из нашего определения непрерывности вовсе не вытекает, что $p_{ii}(t - 0, t + 0) = 1$.

Будем говорить, далее, что матричная функция интервала $Q(\Delta)$ имеет на интервале Δ_0 **ограниченную вариацию**, если при любом разбиении интервала Δ_0 на части

$$\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$$

суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \| Q(\Delta_k) - Q(\Lambda) \| < C < \infty, \tag{11}$$

где C не зависит от разбиения.

Основным ограничением, накладываемым на изучаемые в этой работе мультипликативные матричные функции, является ограниченность их вариации. Позднее (см. примечание на стр. 587) мы покажем, что для функций, удовлетворяющих условию стохастичности (9), это предположение является также необходимым для того, чтобы были верны проводимые ниже конструкции. В другой работе мы укажем вероятностный смысл условия ограниченности вариации.

Если исходить из старого определения матрицы вероятностей перехода, как функции пары точек $P(s, t)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2), и предположить, что она имеет ограниченную вариацию, то можно определить соответствующую ей функцию интервала при помощи предельного перехода, положив

$$P(s-0,\ t+0) = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta t \to 0}} P(s-\Delta s,\ t+\Delta t),$$

где Δs и Δt положительны, и аналогично определив $P(s+0,\ t+0)$, $P(s-0,\ t-0)$, $P(s+0,\ t-0)$. Нетрудно показать, что из ограниченности вариации следует существование всех этих пределов и что полученная таким образом функция будет *мультипликативной непрерывной матричной функцией ограниченной вариации.*

Основные результаты работы состоят в том, что для произвольной мультипликативной непрерывной матричной функции интервала $P(\Delta)$, имеющей ограниченную вариацию, существует ее аддитивный интеграл

$$B(\Delta) = \lim \sum_{k=1}^{n} [P(\Delta_k) - E], \tag{12}$$

где интервалы Δ_i образуют разбиение интервала $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ и предел берется при максимуме длин интервалов Δ_i, стремящемся к нулю. Функция $B(\Delta)$ оказывается аддитивной функцией интервала, т. е. при $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$

$$\begin{gathered} B(\Delta) = B(\Delta_1) + B(\Delta_2), \\ B(\Lambda) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

и имеет также ограниченную вариацию. Мультипликативная функция $P(\Delta)$ восстанавливается по функции $B(\Delta)$ при помощи мультипликативного интегрального процесса

$$P(\Delta) = \lim \prod_{k=1}^{n} [E + B(\Delta_k)]. \tag{14}$$

Насколько нам известно, до сих пор эти интегральные процессы рассматривались при дополнительном предположении, что

$$P(t-0, t+0) = E \ \text{ и } \ B(t-0, t+0) = 0.$$

Устанавливаемое таким образом соответствие между мультипликативными функциями ограниченной вариации $P(\Delta)$ и аддитивными функциями ограниченной вариации $B(\Delta)$ оказывается взаимно однозначным. Этой конструкции посвящены §§ 2—6 нашей работы. Теоремы этих параграфов не опираются на стохастичность функции $P(\Delta)$ и могут быть без существенных изменений доказаны для объектов более общей природы, чем матричные функции.

Условия стохастичности $P(\Delta)$ эквивалентны несложным условиям (см. § 7), накладываемым на функции $B(\Delta)$. Если матричная функция $P(\Delta)$ абсолютно непрерывна (в этом случае исчезает различие между функцией пары точек $P(s, t)$ и функцией интервала $P(\Delta)$), то она почти всюду удовлетворяет уравнению Колмогорова (4) и при произвольной суммируемой функции $A(t)$ определяется, и притом однозначно, этим уравнением. Оказывается, что тогда

$$B(s, t) = \int_s^t A(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Этому посвящен § 8.

Условие непрерывности мультипликативных и аддитивных матричных функций эквивалентно следующему условию:

Свойство N. Если последовательность Δ_i такова, что $\Delta_i \supset \Delta_{i+1}$ и пересечение всех Δ_i пусто, то

$$\lim_{i\to\infty} P(\Delta_i) = E. \tag{16}$$

Действительно, любая такая последовательность состоит при достаточно больших i только из интервалов вида $(t\pm 0,\ t_0-0)$ или же вида $(t_0+0,\ t\pm 0)$ при фиксированном t_0, и поэтому свойство N вытекает из непрерывности. С другой стороны, из свойства N вытекает, что $P(t\pm 0,\ t_0-0)\to E$ при $t\to t_0$, и потому

$$P(t\pm 0,\ t_0-\Delta t) = P(t\pm 0,\ t_0-0)\,P^{-1}(t_0-\Delta t,\ t_0-0)\to P(t\pm 0,\ t_0-0)$$

при $\Delta t > 0$, $\Delta t\to 0$. Аналогично доказывается и существование других пределов, входящих в определение непрерывности. Еще проще доказывается непрерывность аддитивной функции $B(\Delta)$. В дальнейшем нам будет удобнее вместо свойства непрерывности использовать эквивалентное ему свойство N.

§ 2. Функции интервала, имеющие ограниченную вариацию

Системой интервалов $D=\{\Delta\}$ мы будем называть совокупность всех открытых, полуоткрытых и замкнутых интервалов, содержащихся внутри основного отрезка $[a, b]$. Кроме того, мы включаем в D интервалы $[t, t]$, состоящие из одной точки $t\in[a, b]$, и пустое множество Λ. Длину интервала Δ мы будем обозначать через $l(\Delta)$.

Интервал Δ мы назовем суммой интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (обозначаем так: $\Delta = \Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n$), если $\{\Delta_i\}$ образуют конечную систему попарно не пересекающихся интервалов, такую, что Δ_i лежит левее, чем Δ_{i+1}, и их сумма в теоретико-множественном смысле равна Δ.

Под ф у н ц и е й и н т е р в а л а мы будем подразумевать функцию, заданную на системе D, значениями которой являются квадратные матрицы r-го порядка.

Функция интервала $P(\Delta)$ называется м у л ь т и п л и к а т и в н о й, если из $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ следует, что

$$P(\Delta) = P(\Delta_1) \cdot P(\Delta_2), \tag{17}$$

и

$$P(\Lambda) = E.$$

Функция интервала $B(\Delta)$ называется а д д и т и в н о й, если из $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ следует, что

$$B(\Delta) = B(\Delta_1) + B(\Delta_2), \tag{18}$$

и

$$B(\Lambda) = 0.$$

Функция $Q(\Delta)$ называется о б л а д а ю щ е й с в о й с т в о м N, если для любой последовательности интервалов $\{\Delta_i\}$, такой, что $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \Lambda$,

$$\lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i) = Q(\Lambda). \tag{19}$$

Т е о р е м а 1. *Если функция Q обладает свойством N и мультипликативна или аддитивна, то:*

1) *если последовательность интервалов $\{\Delta_i\}$ такова, что $\Delta_i \supset \Delta_{i+1}$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \Delta$, то*

$$\lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i) = Q(\Delta); \tag{20}$$

2) *если последовательность интервалов $\{\Delta_i\}$ такова, что в каждом из них содержится точка t_0 и $l(\Delta_i) \to 0$, то*

$$\lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i) = Q([t_0, t_0]). \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала утверждение 1). Каждый из интервалов Δ_i может быть представлен в виде $\Delta_i = \Delta_i' + \Delta + \Delta_i''$. Интервалы Δ_i' и Δ_i'' образуют последовательности вложенных интервалов с пустым пересечением и, согласно свойству N, $\lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i') = \lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i'') = Q(\Lambda)$. Если Q мультипликативна, то

$$\lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i) = \lim_{i\to\infty} [Q(\Delta_i') \cdot Q(\Delta) \cdot Q(\Delta_i'')] = E \cdot Q(\Delta) \cdot E = Q(\Delta).$$

Если же Q аддитивна, то

$$\lim_{i\to\infty} Q(\Delta_i) = \lim_{i\to\infty} [Q(\Delta_i') + Q(\Delta) + Q(\Delta_i'')] = Q(\Delta).$$

Теперь предположим, что не выполнено утверждение 2). Тогда найдется последовательность интервалов $\{\Delta_i'\}$, каждый из которых содержит t_0 и длины которых стремятся к нулю, такая, что

$$\| Q(\Delta_i') - Q([t_0, t_0]) \| > \varepsilon > 0.$$

Разобьем совокупность интервалов $\{\Delta_i'\}$ на три части: интервалы, содержащие t_0 внутри себя, содержащие t_0 в качестве своего левого конца и содержащие t_0 в качестве своего правого конца. Одна из этих частей бесконечна, и из нее можно выбрать подпоследовательность вложенных друг в друга интервалов, пересекающихся в одной точке t_0. Мы пришли к противоречию с уже доказанным утверждением 1).

Вариацией $V(\Delta)$ функции интервала Q на интервале Δ назовем

$$V(\Delta) = \sup_{\{\Delta_i\}} \sum_{i=1}^{n} \| Q(\Delta_i) - Q(\Lambda) \|, \tag{22}$$

где $\{\Delta_i\}$ — всевозможные конечные системы попарно не пересекающихся интервалов, содержащихся в Δ.

Очевидно, что для любой системы интервалов $\{\Delta_i\}$ вариация $V(\Delta) \geqslant \sum_i V(\Delta_i)$. Если $V([a, b]) < \infty$, то функция $Q(\Delta)$ называется функцией ограниченной вариации.

В дальнейшем нас будут интересовать функции ограниченной вариации, обладающие свойством N и являющиеся аддитивными или мультипликативными. Мы будем предполагать, что рассматриваемая функция $Q(\Delta)$ удовлетворяет этим условиям, не оговаривая это каждый раз специально.

Число

$$h(t) = \| Q([t, t]) - Q(\Lambda) \|$$

называется нормой разрыва функции $Q(\Delta)$ в точке t. Точка t называется точкой разрыва функции $Q(\Delta)$, если $h(t) \neq 0$.

Теорема 2. *Функция $Q(\Delta)$ имеет не более чем счётное число точек разрыва t_i и*

$$\sum_i h(t_i) < \infty. \tag{23}$$

Доказательство. Действительно, из определения ограниченности вариации следует, что для любого конечного набора точек $t_1, \ldots, t_k$

$$\sum_{i=1}^{k} h(t_i) = \sum_{i=1}^{k} \| Q([t_i, t_i]) - Q(\Lambda) \| < C < \infty. \tag{24}$$

Если бы имелось несчетное число точек разрыва t_α, то для некоторого $\varepsilon > 0$ нашлось бы бесконечное число точек $t_{\alpha'}$ с $h(t_{\alpha'}) > \varepsilon$, а это противоречит неравенству (24). Из неравенства (24) очевидным образом вытекает (23).

При доказательстве сходимости интегральных процессов нам понадобится

Лемма 1. *Функция $Q(\Delta)$ обладает следующим свойством: для любого $\eta > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого интервала Δ длины $l(\Delta) < \delta$, не содержащего ни одной точки s, в которой $h(s) \geqslant \eta$, вариация $V(\Delta) < 3\eta$**.

Доказательство. Докажем сначала следующее утверждение: у любой точки t_0 найдется столь малая окрестность U, что для любой конечной системы попарно не пересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$, лежащей в этой окрестности и притом такой, что замыкания $[\Delta_i]$ интервалов Δ_i не содержат точки t_0,

$$\sum_{i=1}^{n} \| Q(\Delta_i) - Q(\Lambda) \| < \eta \tag{25}$$

где η — произвольно заданное положительное число.

Действительно, если бы это было не так, то в любой окрестности точки t_0 нашлась бы система непересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$, такая, что $\sum \| Q(\Delta_i) - Q(\Lambda) \| \geqslant \eta$ и точка t_0 не входит в замыкание множества $\cup \Delta_i$. Но для любой такой системы $\{\Delta_i\}$ найдется окрестность U точки t_0, не пересекающаяся ни с одним из интервалов Δ_i. Поэтому нашлось бы сколь угодно много не пересекающихся друг с другом систем интервалов $\{\Delta_i\}$, для каждой из которых $\sum \| Q(\Delta_i) - Q(\Lambda) \| \geqslant \eta$; объединив больше, чем $V([a, b])/\eta$ таких систем в одну систему непересекающихся интервалов, мы приходим к противоречию с ограниченностью вариации функции $Q(\Delta)$.

Из свойства N вытекает, что если точка t_0 не принадлежит Δ, но входит в его замыкание $[\Delta]$, и длина $l(\Delta) \to 0$, то $\| Q(\Delta) - Q(\Lambda) \| \to 0$. Поэтому можно усилить предыдущее утверждение, сказав, что для любого $\eta > 0$ найдется окрестность U точки t_0, такая, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$, такой, что $t_0 \overline{\in} \Delta_i$ (а не $t_0 \overline{\in} [\Delta_i]$, как раньше), выполнено неравенство (25).

Предположим теперь, что не выполнено основное утверждение леммы. Тогда найдется последовательность интервалов $\overline{\Delta}_i$, такая, что $l(\overline{\Delta}_i) \to 0$, а вариация $V(\overline{\Delta}_i) \geqslant 3\eta$ и все точки разрыва, содержащиеся в $\overline{\Delta}_i$, имеют норму разрыва меньше η. В силу компактности отрезка, можно найти точку t_0, в любой окрестности которой содержатся интервалы $\overline{\Delta}_i$. По определению вариации внутри каждого из интервалов $\overline{\Delta}_i$ найдется система непересекающихся интервалов $\{\Delta_j\}$, такая, что $\sum \| Q(\Delta_j) - Q(\Lambda) \| > 2\eta$. Если хотя бы один из интервалов Δ_j содержит точку t_0, то $h(t_0) < \eta$ и, согласно утверждению 2) теоремы 1,

---

* Читатель, желающий быстрее перейти к основным вопросам, может ограничиться лишь прочтением формулировок леммы 1, а также последующих лемм 2 и 3, с тем, чтобы вернуться, при желании, к их доказательствам впоследствии.

для достаточно малых интервалов Δ, содержащих точку t_0, $\| Q(\Delta) - Q(\Lambda) \| < \eta$. Не больше, чем один, из интервалов Δ_j может содержать точку t_0, и поэтому $\sum_{t_0 \overline{\in} \Delta_j} \| Q(\Delta_j) - Q(\Lambda) \| > \eta$. Однако интервал $\overline{\Delta}_j$, а значит, и систему $\{\Delta_j\}$ можно взять сколь угодно близко к t_0, и поэтому мы пришли к противоречию с доказанным выше неравенством (25). Это противоречие доказывает лемму.

§ 3. Две алгебраические леммы*

В дальнейшем нам понадобятся следующие элементарные леммы:

Лемма 2. *Если матрицы $A_1, \ldots, A_n$ и $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ таковы, что при любом $j = 1, 2, \ldots, n$*

$$\left\| \prod_{l=1}^{j} A_l \right\| < K \text{ и } \left\| \prod_{l=j}^{n} \overline{A}_l \right\| < K, \tag{26}$$

где $K > 1$, то

$$\left\| \prod_{j=1}^{n} A_j - \prod_{j=1}^{n} \overline{A}_j \right\| \leqslant K^2 \sum_{j=1}^{n} \| A_j - \overline{A}_j \| . \tag{27}$$

Доказательство. Мы имеем тождество

$$\prod_{j=1}^{n} A_j - \prod_{j=1}^{n} \overline{A}_j = \sum_{j=1}^{n} A_1 \ldots A_{j-1} (A_j - \overline{A}_j) \overline{A}_{j+1} \ldots \overline{A}_n .$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \prod_{j=1}^{n} A_j - \prod_{j=1}^{n} \overline{A}_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \| A_1 \ldots A_{j-1} \| \cdot \| A_j - \overline{A}_j \| \cdot \| \overline{A}_{j+1} \ldots \overline{A}_n \| \leqslant$$

$$\leqslant K^2 \sum_{j=1}^{n} \| A_j - \overline{A}_j \| .$$

Лемма 3. *Если матрицы $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $\sum_{l=1}^{n} \| A_l \| \leqslant \frac{1}{2}$, то верны следующие неравенства:*

$$\left\| \prod_{l=1}^{n} (E + A_l) - \left[E + \sum_{l=1}^{n} A_l \right] \right\| \leqslant 2 \left(\sum_{l=1}^{n} \| A_l \| \right)^2, \tag{28}$$

$$\left\| \prod_{l=1}^{n} (E + A_l) - E \right\| \leqslant 2 \sum_{l=1}^{n} \| A_l \|, \tag{29}$$

$$\left\| \prod_{l=1}^{n} (E + A_l) \right\| \leqslant \| E \| + 1. \tag{30}$$

---

* См. примечание на стр. 575.

Доказательство. Очевидно, что

$$\prod_{i=1}^{n}(E+A_i)=E+\sum_i A_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}A_i A_j+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}A_iA_jA_k+\ldots+A_1A_2\ldots A_n.$$

Поэтому

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}(E+A_i)-\left[E+\sum_{i=1}^{n}A_i\right]\right\|\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\|A_i\|\cdot\|A_j\|+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\|A_i\|\cdot\|A_j\|\cdot\|A_k\|+\ldots+\|A_1\|\cdot\|A_2\|\ldots\|A_n\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|\right)^2+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|\right)^3+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|\right)^n\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\|A_i\|\right)^2}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\|A_i\|}\leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|\right)^2.$$

Неравенство (29) следует из уже доказанного неравенства (28):

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}(E+A_i)-E\right\|\leqslant\left\|\prod_{i=1}^{n}(E+A_i)-\left[E+\sum_{i=1}^{n}A_i\right]\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}A_i\right\|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|,$$

а неравенство (30) вытекает из (29):

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}(E+A_i)\right\|\leqslant\left\|\prod_{i=1}^{n}(E+A_i)-E\right\|+\|E\|\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\|A_i\|+\|E\|\leqslant\|E\|+1.$$

§ 4. Сходимость аддитивного интегрального процесса

Разбиением R интервала Δ мы будем называть представление его в виде суммы конечного числа непересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$:

$$\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n. \tag{31}$$

Подразбиением R' разбиения R интервала Δ мы назовем такое разбиение R' интервалами $\Delta'_1+\ldots+\Delta'_m=\Delta$, что каждый из интервалов Δ'_i целиком содержится в одном из интервалов Δ_i.

Диаметром $l(R)$ разбиения R назовем максимум длин интервалов Δ_i:

$$l(R)=\max_{i=1,2,\ldots,n} l(\Delta^i). \tag{32}$$

Пусть $P(\Delta)$ — мультипликативная функция интервала и R — разбиение интервала Δ. Пусть, кроме того,

$$\sigma(R)=\sum_{i=1}^{n}[P(\Delta_i)-E]. \tag{33}$$

Предел

$$\int\limits_{\Delta} P(d\Delta) = \lim_{l(R)\to 0} \sigma(R), \tag{34}$$

если он существует, мы будем называть **аддитивным интегралом функции** $P(\Delta)$ **на интервале** Δ.

В этом параграфе доказывается основная

Теорема 3. *Если $P(\Delta)$ является мультипликативной функцией интервала, имеющей ограниченную вариацию и обладающей свойством N, то ее аддитивный интеграл существует на любом интервале Δ из системы интервалов D.*

Сначала нами будет доказана

Лемма 4. *Для любой точки $c \in [a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется столь малое $\delta > 0$, что для любого интервала Δ длины $l(\Delta) < \delta$, содержащего точку c, и произвольного разбиения R интервала Δ*

$$\| P(\Delta) - E - \sigma(R) \| < \varepsilon. \tag{35}$$

Доказательство леммы. Пусть разбиение R образовано интервалами $\{\Delta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и пусть $c \in \Delta_k$. Рассмотрим интервалы

$$\overline{\Delta} = \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\Delta}} = \Delta_{k+1} + \ldots + \Delta_n.$$

Из теоремы 2 следует, что для любого $\eta > 0$ найдется лишь конечное число точек t с нормой разрыва $h(t) > \eta$, и поэтому в достаточно малой окрестности точки c не содержится ни одна такая точка разрыва, за исключением, быть может, самой точки c. Поэтому, применяя лемму 1, мы получаем, что если $l(\Delta)$ достаточно мало, то $V(\overline{\Delta}) < 3\eta$ и $V(\overline{\overline{\Delta}}) < 3\eta$. Но, разбив $\sigma(R)$ на три слагаемых, будем иметь:

$$\| P(\Delta) - E - \sigma(R) \| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-1} [P(\Delta_i) - E] \right\| + \| P(\Delta) - P(\Delta_k) \| +$$
$$+ \left\| \sum_{i=k+1}^{n} [P(\Delta_i) - E] \right\| \leqslant V(\overline{\Delta}) + \| P(\Delta) - P(\Delta_k) \| + V(\overline{\overline{\Delta}}).$$

Заметим, что, по теореме 1, $P(\Delta) \to P([c, c])$ при $l(\Delta) \to 0$ и $c \in \Delta$, и поэтому разность $\| P(\Delta) - P(\Delta_k) \|$ при достаточно малом $l(\Delta)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Взяв $\eta = \frac{\varepsilon}{12}$ и соответствующее достаточно малое δ, мы получаем неравенство (35).

Лемма 5. *Пусть R — разбиение интервала $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, и пусть R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — разбиения интервалов $\Delta_i = \Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \ldots + \Delta_i^{n_i}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется столь малое δ, что при диаметре разбиения $l(R) < \delta$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \| P(\Delta_i) - E - \sigma(R_i) \| < \varepsilon. \tag{36}$$

Доказательство. По теореме 2, в интервале Δ содержится лишь конечное число точек t_l с нормой разрыва $h(t_l) \geqslant \eta$ (где $\eta > 0$ произвольно мало). Применив в каждой из точек t_l лемму 4, мы видим, что, взяв $l(R)$ достаточно малым, можно добиться того, чтобы сумма всех слагаемых суммы (36), относящихся к интервалам Δ_i, содержащим точки t_l, была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Займемся теперь оценкой остальных слагаемых. По лемме 1, при достаточно малом $l(R)$ для каждого из интервалов Δ_i, не содержащих точек t_l, вариация $V(\Delta_i) < 3\eta$. Из неравенства (28) непосредственно следует, что при $V(\Delta_i) \leqslant \frac{1}{2}$

$$\left\| P(\Delta_i) - E - \sigma(R_i) \right\| = \left\| \prod_{j=1}^{n_i} P(\Delta_i^j) - \sum_{j=1}^{n_i} [P(\Delta_i^j) - E] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left\| P(\Delta_i^j) - E \right\| \right)^2 \leqslant 2 [V(\Delta_i)]^2. \tag{37}$$

Возьмем теперь $\eta = \frac{\varepsilon}{12 V(\Delta)}$. Обозначим интервалы Δ_i, не содержащие точек t_l с $h(t_l) > \eta$, через $\overline{\Delta}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$). Тогда, согласно неравенству (37), *

$$\sum_{\Delta_i = \overline{\Delta}_k} \left\| P(\Delta_i) - \sigma(R_i) \right\| \leqslant 2 \sum_{k=1}^{m} [V(\overline{\Delta}_k)]^2 \leqslant 2 \cdot 3\eta \sum_{k=1}^{m} V(\overline{\Delta}_k) \leqslant 6\eta \cdot V(\Delta),$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Доказательство теоремы 3. Теорема 3 является следствием только что доказанной леммы 5. Действительно, для того чтобы доказать существование предела (34), достаточно, как и всегда при доказательстве сходимости интегральных процессов, показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $l(R) < \delta$ и произвольном подразбиении R' разбиения R

$$\left\| \sigma(R) - \sigma(R') \right\| < \varepsilon. \tag{38}$$

Существование предела следует тогда из выполнения критерия Коши. Но если за разбиение R_i взять интервалы разбиения R', содержащиеся в i-м интервале разбиения R, то неравенство (38) будет непосредственно следовать из (36), что и заканчивает доказательство теоремы.

Из теоремы 3 и леммы 5 можно получить

---

* Ясно, что без ограничения общности мы можем взять ε столь малым, чтобы $3\eta < \frac{1}{2}$.

Следствие. *При выполнении условий теоремы 3 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $l(R) < \delta$, где R — разбиение интервалами $\{\Delta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| P(\Delta_i) - E - \int_{\Delta_i} P(d\Delta) \right\| < \varepsilon. \tag{39}$$

Неравенство (39) получается из (36) при помощи простого перехода к пределу.

Рассмотрим функцию интервала

$$B(\Delta) = \int_{\Delta} P(d\Delta), \tag{40}$$

где $P(\Delta)$ — мультипликативная функция интервала, имеющая ограниченную вариацию и обладающая свойством N. Изучим свойства функции $B(\Delta)$. (Ее существование доказано теоремой 3.)

Свойство 1. *Функция $B(\Delta)$ является аддитивной функцией интервала.*

Доказательство. Пусть $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. Рассмотрим произвольные разбиения R_1 интервала Δ_1 и R_2 интервала Δ_2. Возьмем разбиение R интервала Δ, образованное всеми интервалами, входящими как в R_1, так и в R_2. Тогда

$$\sigma(R) = \sigma(R_1) + \sigma(R_2).$$

Переходя к пределу при $l(R_1) \to 0$ и $l(R_2) \to 0$, получаем:

$$B(\Delta) = \int_{\Delta} P(d\Delta) = \int_{\Delta_1} P(d\Delta) + \int_{\Delta_2} P(d\Delta) = B(\Delta_1) + B(\Delta_2). \tag{41}$$

Кроме того,

$$B(\Lambda) = P(\Lambda) - E = 0.$$

Свойство 2. *Функция $B(\Delta)$ является функцией ограниченной вариации.*

Доказательство. Очевидно, что для любого разбиения R любого интервала Δ

$$\| \sigma(R) \| \leqslant V(\Delta),$$

где $V(\Delta)$ — вариация функции $P(\Delta)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $l(R) \to 0$, получаем:

$$\| B(\Delta) \| \leqslant V(\Delta). \tag{42}$$

Поэтому для любой системы непересекающихся интервалов Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \| B(\Delta_i) \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} V(\Delta_i) \leqslant V([a, b]),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. *Функция $B(\Delta)$ обладает свойством N.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность вложенных интервалов $\Delta_i \supset \Delta_{i+1}$ с пустым пересечением. Для любого $\eta > 0$ все интервалы Δ_i, начиная с некоторого, не содержат ни одной точки разрыва t с $h(t) \geqslant \eta$ (так как всех таких точек лишь конечное число). Поэтому, по лемме 1, для всех i, начиная с некоторого, $V(\Delta_i) < 3\eta$ и, значит, $V(\Delta_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Но, согласно неравенству (42), $\|B(\Delta_i)\| \leqslant V(\Delta_i)$. Отсюда следует, что $\|B(\Delta_i)\| \to 0$ при $i \to \infty$, а это и требовалось доказать.

Свойство 4. $B([t, t]) = P([t, t]) - E$ *для любой точки* t.

Действительно, единственным разбиением R_0 интервала $[t, t]$ является тривиальное $[t, t] = [t, t] + \Lambda$. Но $\sigma(R_0) = P([t, t]) - E$.

§ 5. Сходимость мультипликативного интегрального процесса

Пусть $B(\Delta)$ — аддитивная функция интервала, и пусть интервалы $\{\Delta_i\}$ образуют разбиение R интервала Δ: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$. Обозначим:

$$\pi(R) = \prod_{i=1}^{n} [E + B(\Delta_i)].$$

Предел при диаметре разбиения $l(R) \to 0$.

$$\iint\limits_{\Delta}\!\!{}^{P} B(d\Delta) = \lim_{l(R) \to 0} \pi(R), \tag{43}$$

если он существует, мы будем называть **мультипликативным интегралом функции $B(\Delta)$ на интервале Δ.**

Основным содержанием этого параграфа является доказательство существования мультипликативного интеграла.

Теорема 4. *Если $B(\Delta)$ — аддитивная функция ограниченной вариации, обладающая свойством N, то мультипликативный интеграл функции $B(\Delta)$ существует на любом интервале Δ.*

Доказательство этой теоремы проводится в основном по тому же плану, что и доказательство существования аддитивного интеграла. Специфической для случая мультипликативного интеграла является

Лемма 6. *Существует постоянная K, такая, что для любого набора попарно не пересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из системы D выполняется неравенство*

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} [E + B(\Delta_i)] \right\| \leqslant K. \tag{44}$$

Доказательство. По определению, $\sum_{i=1}^{n} \| B(\Delta_i) \| \leqslant V([a, b])$.

Если $V([a, b]) \leqslant \frac{1}{2}$, то утверждение леммы следует сразу из неравенства (30). В общем случае в сумме $\sum_{i=1}^{n}\| B(\Delta_i)\|$ содержится не больше, чем $L = 2V([a, b])$, слагаемых, превосходящих $\frac{1}{2}$. Для каждого из них $\| E + B(\Delta_i)\| \leqslant V([a, b]) + \| E\|$. Остальные слагаемые можно разделить на группы так, чтобы сумма слагаемых, попавших в одну группу, была заключена между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$. Всего таких групп не больше, чем $M = 4V([a, b])$. К каждой из них применимо неравенство (30) и, так как норма произведения меньше или равна произведению норм, то соотношение (44) выполнено при

$$K = \{\| E\| + 1\}^{M}\{V([a, b]) + \| E\|\}^{L}.$$

Лемма 7. *Для любой точки c и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для каждого интервала Δ длины $l(\Delta) < \delta$, содержащего точку c, и для произвольного разбиения R интервала $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ интервалами $\{\Delta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выполняется неравенство*

$$\| E + B(\Delta) - \pi(R)\| < \varepsilon. \tag{45}$$

Доказательство. Так же как и при доказательстве леммы 4, пусть $c \in \Delta_k$, и пусть $\overline{\Delta} = \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1}$ и $\overline{\overline{\Delta}} = \Delta_{k+1} + \ldots + \Delta_n$. При доказательстве леммы 4 было показано, что $V(\overline{\Delta}) \to 0$ и $V(\overline{\overline{\Delta}}) \to 0$ при $l(\Delta) \to 0$. Но из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} &\| E + B(\Delta) - \pi(R)\| = \\ &= \Big\| E[E + B(\Delta)]\cdot E - \prod_{i=1}^{k-1}[E + B(\Delta_i)]\cdot[E + B(\Delta_k)]\prod_{i=k+1}^{n}[E + B(\Delta_i)]\Big\| \leqslant \\ &\leqslant K^2\Big[\Big\|\prod_{i=1}^{k-1}[E + B(\Delta_i)] - E\Big\| + \Big\|\prod_{i=k+1}^{n}[E + B(\Delta_i)] - E\Big\| + \\ &+ \| B(\Delta) - B(\Delta_k)\|\Big], \end{aligned} \tag{46}$$

где K находится из неравенства (44) и не зависит от интервала Δ и разбиения R. Из неравенства (29) вытекает, что

$$\Big\|\prod_{i=1}^{k-1}[E + B(\Delta_i)] - E\Big\| \leqslant 2\sum_{i=1}^{k-1}\| B(\Delta_i)\| \leqslant 2V(\overline{\Delta})$$

при $V(\overline{\Delta}) < \frac{1}{2}$, и второе аналогичное неравенство для $\overline{\overline{\Delta}}$. Поэтому соотношение (46) перепишется следующим образом:

$$\| E + B(\Delta) - \pi(R)\| \leqslant K^2[2V(\overline{\Delta}) + 2V(\overline{\overline{\Delta}}) + \| B(\Delta) - B(\Delta_k)\|]. \tag{47}$$

По теореме 1,

$$B(\Delta) \to B([c, c]) \text{ и } B(\Delta_k) \to B([c, c]) \quad \text{при } l(\Delta) \to 0.$$

Следовательно, $\| B(\Delta) - B(\Delta_k)\| \to 0$ при $l(\Delta) \to 0$, и, значит, вся правая часть неравенства (47) стремится к нулю, что и доказывает лемму.

Лемма 8. *Пусть интервалы* $\{\Delta_i\}$ *образуют разбиение* R *интервала* $\Delta:\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, *и пусть интервалы* $\{\Delta_i^j\}$ *образуют разбиения* R_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ *интервалов* $\Delta_i:\Delta_i=\Delta_i^1+\ldots+\Delta_i^{n_i}$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta>0$, *что при диаметре разбиения* $l(R)<\delta$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\| E+B(\Delta_i)-\pi(R_i)\|<\varepsilon. \tag{48}$$

Доказательство. Из неравенства (28) следует, что при $V(\Delta_i)\leqslant\frac{1}{2}$

$$\|E+B(\Delta_i)-\pi(R_i)\|=\left\|E+\sum_{j=1}^{n_i}B(\Delta_i^j)-\prod_{j=1}^{n_i}[E+B(\Delta_i^j)]\right\|\leqslant$$

$$\leqslant 2\Big(\sum_{j=1}^{n_i}\|B(\Delta_i^j)\|\Big)^2\leqslant 2[V(\Delta_i)]^2. \tag{49}$$

Далее, утверждение леммы получается из неравенства (45) и леммы 7 точно так же, как утверждение леммы 5 выводилось из неравенства (37) и леммы 4.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, такое, что при $l(R)<\delta$ и произвольном подразбиении R' разбиения R

$$\|\pi(R)-\pi(R')\|<\varepsilon.$$

Пусть разбиение R образовано интервалами $\{\Delta_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. За разбиение R_i интервала Δ_i возьмем интервалы разбиения R', содержащиеся в Δ_i. Тогда, по лемме 2,

$$\|\pi(R)-\pi(R')\|=\left\|\prod_{i=1}^{n}[E+B(\Delta_i)]-\prod_{i=1}^{n}\pi(R_i)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant K^2\sum_{i=1}^{n}\|E+B(\Delta_i)-\pi(R_i)\|, \tag{50}$$

где выполнение условия (26) следует из леммы 6. Согласно лемме 8, правая часть неравенства (50) стремится к нулю при $l(R)\to 0$, что и доказывает теорему.

Следствие. Перейдем в неравенстве (48) к пределу при $l(R_i)\to 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. По теореме 4, пределы

$$\iint_{\Delta_i}B(d\Delta)=\lim_{l(R_i)\to 0}\pi(R_i)$$

существуют и, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|E+B(\Delta_i)-\iint_{\Delta_i}B(d\Delta)\right\|\leqslant\varepsilon \tag{51}$$

при $l(R)<\delta$.

Неравенство (51) пригодится нам в дальнейшем.

Рассмотрим теперь функцию интервала

$$P(\Delta) = \underset{\Delta}{\mathfrak{P}} B(d\Delta). \tag{52}$$

Пусть $B(\Delta)$ будет аддитивной функцией ограниченной вариации, обладающей свойством N. Тогда существование функции $P(\Delta)$ доказано теоремой 4. Изучим свойства этой функции.

Свойство 1. *Функция $P(\Delta)$ является мультипликативной.*

Доказательство. Пусть $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ и R_1 — разбиение интервала Δ_1, а R_2 — разбиение интервала Δ_2. Пусть, кроме того, R — разбиение интервала Δ, образованное всеми интервалами, входящими в R_1 и в R_2. Тогда

$$\pi(R) = \pi(R_1)\,\pi(R_2).$$

Переходя к пределу при $l(R) \to 0$, получим:

$$P(\Delta) = P(\Delta_1)\cdot P(\Delta_2). \qquad (53$$

Кроме того,

$$P(\Lambda) = E + B(\Lambda) = E.$$

Свойство 2. *Функция $P(\Delta)$ имеет ограниченную вариацию.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что если интервалы $\{\overline{\Delta}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образуют разбиение R некоторого интервала Δ $\Delta = \overline{\Delta}_1 + \ldots + \overline{\Delta}_m$, то, положив в лемме 2 $A_i = E + B(\overline{\Delta}_i)$ и $\overline{A}_i = E$ мы получаем, что

$$\| \pi(R) - E \| \leqslant K^2 \sum_{i=1}^{m} \| B(\overline{\Delta}_i) \| \leqslant K^2 V(\Delta), \qquad (54$$

где K находится по лемме 6 и не зависит от Δ и R.

Переходя в неравенстве (54) к пределу при $l(R) \to 0$, будем иметь

$$\| P(\Delta) - E \| \leqslant K^2 V(\Delta). \qquad (55$$

Для любой системы попарно не пересекающихся интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta$

$$\sum_{i=1}^{n} \| P(\Delta_i) - E \| \leqslant K^2 \sum_{i=1}^{n} V(\Delta_i) \leqslant K^2 V([a, b]),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. *Функция $P(\Delta)$ обладает свойством N.*

Это свойство выводится из неравенства (55) точно так же, к свойство 3 аддитивного интеграла выводилось из неравенства (4

Свойство 4. *Для любой точки t*

$$P([t, t]) = B([t, t]) + E. \qquad (5$$

Действительно, у интервала $[t, t]$ нет разбиений, кроме тривиал ного $[t, t] = [t, t] + \Lambda$. Но для этого разбиения R_0

$$\pi(R_0) = B([t, t]) + E.$$

§ 6. Взаимосвязь аддитивного и мультипликативного интегральных процессов

Мы покажем теперь взаимную обратность мультипликативного и аддитивного интегральных процессов.

Теорема 5. *Пусть $P(\Delta)$ — мультипликативная функция ограниченной вариации, обладающая свойством N, и пусть*

$$B(\Delta)=\int\limits_{\Delta} P(d\Delta); \tag{40'}$$

тогда мультипликативный интеграл функции $B(\Delta)$ существует и

$$\underset{\Delta}{\iint} B(d\Delta)=P(\Delta). \tag{57}$$

Доказательство. По теореме 3, функция $B(\Delta)$ существует, а согласно свойствам 1, 2 и 3 из § 4, она является аддитивной функцией ограниченной вариации, обладающей свойством N. Поэтому, согласно теореме 4, существует ее мультипликативный интеграл, являющийся, по свойствам 1, 2 и 3 § 5, мультипликативной функцией ограниченной вариации, обладающей свойством N.

Нужно показать, что мультипликативная функция $P'(\Delta)=\underset{\Delta}{\iint} B(d\Delta)$ совпадает с первоначальной функцией $P(\Delta)$. Согласно неравенству (39), для разбиения R интервала $\Delta:\Delta=\Delta_1+\ldots+\Delta_n$, с достаточно малым диаметром разбиения $l(R)$

$$\sum_{i=1}^{n}\| P(\Delta_i)-E-B(\Delta_i)\|<\varepsilon, \tag{58}$$

где $\varepsilon>0$ произвольно мало. По неравенству (51), при достаточно малом $l(R)$

$$\sum_{i=1}^{n}\| B(\Delta_i)+E-P'(\Delta_i)\|<\varepsilon. \tag{59}$$

Сложив неравенства (58) и (59), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\| P(\Delta_i)-P'(\Delta_i)\|<2\varepsilon.$$

Применив лемму 2, будем иметь:

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} P(\Delta_i)-\prod_{i=1}^{n} P'(\Delta_i)\right\|=\| P(\Delta)-P(\Delta')\|\leqslant 2K^2\varepsilon. \tag{60}$$

Нужно, конечно, проверить выполнение условия (26). Но, очевидно, что функция ограниченной вариации и сама равномерно ограничена, а так как $P(\Delta)$ и $P'(\Delta)$ мультипликативны, то существует $K>0$, такое, что

$$\left\| \prod_{i=1}^{j} P(\Delta_i) \right\| = \| P(\Delta_1 + \ldots + \Delta_j) \| < K,$$

$$\left\| \prod_{i=j}^{n} P'(\Delta_i) \right\| = \| P'(\Delta_j + \ldots + \Delta_n) \| < K.$$

Так как ε произвольно мало, то из (60) вытекает, что $P(\Delta) = P(\Delta')$, а это и доказывает теорему,

Теорема 6. *Пусть $B(\Delta)$ — аддитивная функция ограниченной вариации, обладающая свойством N, и пусть*

$$P(\Delta) = \widehat{\iint_{\Delta}} B(d\Delta); \tag{52'}$$

тогда аддитивный интеграл функции $P(\Delta)$ существует и

$$\int_{\Delta} P(d\Delta) = B(\Delta). \tag{61}$$

Доказательство. По теореме 4, функция $P(\Delta)$ существует. Из свойств 1, 2, 3 § 5 следует, что к ней применима теорема 3, и поэтому $B'(\Delta) = \int\limits_{\Delta} P(d\Delta)$ существует и является (свойства 1, 2 § 4) аддитивной функцией ограниченной вариации.

Покажем теперь, что для любого Δ выполнено равенство $B(\Delta) = B'(\Delta)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого разбиения интервала $\Delta : \Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_n$, достаточно малого диаметра выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \| B(\Delta_i) + E - P(\Delta_i) \| < \varepsilon \tag{62}$$

(следует из неравенства (51)) и

$$\sum_{i=1}^{n} \| P(\Delta_i) - E - B'(\Delta_i) \| < \varepsilon \tag{63}$$

(следует из неравенства (39)). Сложив неравенства (62) и (63), получаем:

$$\| B(\Delta) - B'(\Delta) \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} B(\Delta_i) - \sum_{i=1}^{n} B'(\Delta_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| B(\Delta_i) - B'(\Delta_i) \| < 2\varepsilon.$$

Из произвольной малости ε следует наша теорема.

Теоремы 5 и 6 показывают, что аддитивный и мультипликативный интегральный процессы создают взаимно однозначное соответствие между мультипликативными и аддитивными функциями ограниченной вариации, обладающими свойством N.

§ 7. Применение к матрицам вероятностей перехода

Результаты §§ 2—6 носят чисто алгебраический характер и без всяких изменений переносятся и на более общие функции интервала.

Мы перейдем теперь к случаю, когда $P(\Delta)$ является матрицей вероятностей перехода. Введем несколько определений.

Квадратная матрица P r-го порядка с элементами $\{p_{ij}\}$ называется стохастической, если

$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \text{ и } 0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r). \tag{64}$$

Мультипликативная функция интервала $P(\Delta)$ называется стохастической, если $P(\Delta)$ является стохастической матрицей при любом Δ. Очевидно, что матрица вероятностей перехода является стохастической функцией.

Квадратная матрица B r-го порядка с элементами $\{b_{ij}\}$ называется инфинитезимально-стохастической, если

$$\sum_{j=1}^{r} b_{ij} = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, r) \text{ и } b_{ij} \geqslant 0, \quad i \neq j, \quad b_{ii} \leqslant 0 \;\; (i, j = 1, 2, \ldots, r). \tag{65}$$

Аддитивная функция интервала $B(\Delta)$ называется инфинитезимально-стохастической, если $B(\Delta)$ является инфинитезимально-стохастической матрицей при любом Δ и для интервалов $[t, t]$, состоящих из одной точки, $\|B([t, t])\| \leqslant r$ (т. е. все элементы матрицы $B([t, t])$ по модулю меньше 1).

Мы будем заниматься только стохастическими и инфинитезимально-стохастическими функциями, имеющими ограниченную вариацию и обладающими свойством N.

Теорема 7. *Если $P(\Delta)$ является стохастической функцией, то функция*

$$B(\Delta) = \int_{\Delta} P(d\Delta)$$

является инфинитезимально-стохастической функцией.*

---

* Предположение ограниченности вариации функции $P(\Delta)$ для этой теоремы несущественно. Заметим, что всякая инфинитезимально-стохастическая функция, обладающая свойством N, имеет ограниченную вариацию. Следовательно, если $P(\Delta)$ является стохастической функцией, то ее аддитивный интеграл всегда имеет ограниченную вариацию. Так как при мультипликативном интегрировании ограниченность вариации сохраняется, то ограниченность вариации является условием *необходимым*, для того чтобы для стохастической функции $P(\Delta)$ были выполнены теоремы 3 и 5 в совокупности.

Доказательство. Если P — стохастическая матрица, то $P-E$ является инфинитезимально-стохастической матрицей. Сумма инфинитезимально-стохастических матриц является снова инфинитезимально-стохастической матрицей. Поэтому интегральная сумма $\sigma(R)$ является при любом R инфинитезимально-стохастической матрицей. Свойство инфинитезимальной стохастичности сохранится и при переходе к пределу. Значит, $B(\Delta)$ является инфинитезимально-стохастической матрицей. По свойству 4 § 4, $B([t, t]) = P([t, t]) - E$ и поэтому $\| B([t, t]) \| \leqslant r$.

Теорема 8. *Если $B(\Delta)$ — инфинитезимально-стохастическая функция, то функция*

$$P(\Delta) = \underset{\Delta}{\prod\!\!\!\!\int} B(d\Delta)$$

является стохастической.

Доказательство. Если B — инфинитезимально-стохастическая матрица и $\|B\| \leqslant r$, то $E+B$ является стохастической матрицей. По лемме 1, для всех достаточно малых интервалов Δ, не содержащих точек t с $\| B([t, t]) \| \geqslant \frac{r}{3}$, вариация $V(\Delta) \leqslant r$, а поэтому и $\| B(\Delta) \| \leqslant r$. Следовательно, для любого такого интервала Δ матрица $B(\Delta) + E$ является стохастической. Поэтому при любом разбиении R такого интервала интегральное произведение $\pi(R)$ будет стохастической матрицей, и так как при предельном переходе стохастичность сохраняется, то стохастической будет также матрица $P(\Delta)$.

Но любой интервал можно представить в виде суммы конечного числа интервалов, для которых стохастичность P уже доказана, и интервалов $[t, t]$, состоящих из одной точки. По определению инфинитезимально-стохастической функции, $\| B([t, t]) \| \leqslant r$, и поэтому матрицы $P([t, t])$ стохастичны. Так как $P(\Delta)$ — мультипликативная функция и произведение стохастических матриц является стохастической матрицей, то $P(\Delta)$ будет стохастической для любого Δ, и теорема доказана.

Все инфинитезимально-стохастические функции, обладающие свойством N, могут быть описаны следующим способом. Зададим $r(r-1)$, обычных монотонно возрастающих функций $\varphi_{ij}(t)$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, r)$, таких, что $\varphi_{ij}(a) = 0$ и $\varphi_{ij}(t)$ непрерывна справа на отрезке $[a, b]$. Положим $\varphi_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} \varphi_{ij}(t)$ и рассмотрим матрицу $\Phi(t)$ с элементами $\{\varphi_{ij}(t)\}$. Обозначим:

$$\Phi(t-0) = \lim_{\Delta t \to 0} \Phi(t - \Delta t),$$

где $\Delta t > 0$. (Этот предел, очевидно, существует.) Потребуем дополнительно, чтобы для любой точки t

$$|\varphi_{ij}(t) - \varphi_{ij}(t-0)| \leqslant 1 \quad \text{при всех } i \text{ и } j.$$

Инфинитезимально-стохастическую функцию интервала $B(\Delta)$ зададим следующим образом: на замкнутых интервалах $[s, t]$

$$B([s, t]) = \Phi(t) - \Phi(s-0),$$

на полуоткрытых интервалах вида $[s, t)$

$$B([s, t)) = \Phi(t-0) - \Phi(s-0),$$

на полуоткрытых интервалах вида $(s, t]$

$$B((s, t]) = \Phi(t) - \Phi(s)$$

и для открытых интервалов (s, t)

$$B((s, t)) = \Phi(t-0) - \Phi(s).$$

Для пустого множества

$$B(\Lambda) = 0.$$

Очевидно, что так построенная функция $B(\Delta)$ является инфинитезимально-стохастической. Нетрудно показать, что она обладает свойством N.

Обратно, пусть, $B(\Delta)$ — инфинитезимально-стохастическая функция. Положим $\Phi(t) = B([a, t])$. Если $B(\Delta)$ обладает свойством N, то $\Phi(t-0) = B([a, t))$, и поэтому, восстанавливая по $\Phi(t)$ функцию $B(\Delta)$, мы вернемся к первоначальной функции.

§ 8. Абсолютно непрерывные решения дифференциальных уравнений Колмогорова

Равномерно ограниченная функция интервала $Q(\Delta)$ называется **абсолютно непрерывной**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ с суммой длин $\sum_{i=1}^{n} l(\Delta_i) < \delta$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \| Q(\Delta_i) - Q(\Lambda) \| < \varepsilon. \tag{66}$$

Легко видеть, что абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию и обладает свойством N. Действительно, возьмем в неравенстве (66) $\varepsilon = 1$ и обозначим соответствующее δ через δ_0. Любую лежащую на $[a, b]$ систему непересекающихся интервалов, каждый из которых имеет длину, меньшую чем δ_0, можно разбить на не более чем $M = 2\frac{b-a}{\delta_0} + 1$ групп интервалов так, чтобы для интервалов каждой из групп выполнялось неравенство (66) при $\varepsilon = 1$. В произвольную систему непересекающихся интервалов может, кроме того, входить еще не более чем $L = \frac{b-a}{\delta_0} + 1$ интервалов $\overline{\Delta}_i$ длины, большей, чем δ_0. Из равномерной ограниченности функции $Q(\Delta)$ для каждого из них следует:

$$\| Q(\overline{\Delta}_i) - Q(\Lambda) \| < C.$$

Поэтому для любой системы непересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$

$$\sum \| Q(\Delta_i) - Q(\Delta) \| \leqslant M + LC,$$

что и означает ограниченность вариации. Свойство N выполнено, так как из неравенства (66) следует, что

$$\| Q(\Delta) - Q(\Lambda) \| \to 0 \quad \text{при } l(\Delta) \to 0.$$

Теорема 9. *Если $P(\Delta)$ — мультипликативная абсолютно непрерывная функция, то ее аддитивный интеграл*

$$\widetilde{B}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} P(d\Delta),$$

существует и является абсолютно непрерывной функцией.

Если $B(\Delta)$ — аддитивная абсолютно непрерывная функция, то ее мультипликативный интеграл

$$\widetilde{P}(\Delta) = \prod\limits_{\Delta} B(d\Delta)$$

существут и является абсолютно непрерывной функцией.

Доказательство. Так как, по только что доказанному, $P(\Delta)$ имеет ограниченную вариацию и обладает свойством N, то существование аддитивного интеграла следует из теоремы 3. Для доказательства его абсолютной непрерывности заметим, что любую систему непересекающихся интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ с суммой длин $L = \sum\limits_{i=1}^{n} l(\Delta_i)$ можно включить в разбиение интервала $[a, b]$ с диаметром разбиения, не превосходящим L. Поэтому из неравенства (39) следует, что при достаточно малом L

$$\sum_{i=1}^{n} \| \widetilde{B}(\Delta_i) - [P(\Delta_i) - E] \| < \varepsilon, \tag{67}$$

где ε произвольно мало. По определению абсолютной непрерывности, при достаточно малом L

$$\sum_{i=1}^{n} \| P(\Delta_i) - E \| < \varepsilon. \tag{68}$$

Складывая неравенства (67) и (68), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \| \widetilde{B}(\Delta_i) \| < 2\varepsilon$$

при достаточно малом L, и так как $\widetilde{B}(\Lambda) = 0$, то это и означает, что функция интервала $\widetilde{B}(\Delta)$ абсолютно непрерывна.

Второе утверждение теоремы выводится из формулы (51), аналогично тому, как первое выведено из формулы (39).

Очевидно, что абсолютно непрерывная функция интервала непрерывна, т. е. для любой точки t значение функции $Q([t, t]) = Q(\Lambda)$. Для непрерывных мультипликативных и аддитивных функций исчезает разница между трактовками функции как функции интервала и функции пары точек. Действительно, если $P(\Delta)$ мультипликативна и $P([t,t]) = E$ для любой точки t, то

$$P([s,\ t]) = P([s,\ s])\cdot P((s,\ t))\cdot P([t,\ t)] = P((s,\ t)),$$

и вообще для всех четырех интервалов $[s,\ t]$, $(s,\ t]$, $[s,\ t)$ и $(s,\ t)$, имеющих концами точки s и t, значение функции P — одно и то же. Аналогично для непрерывной аддитивной функции $B(\Delta)$ для любой пары точек

$$B([s,\ t]) = B([s,\ t)) = B((s,\ t]) = B((s,\ t)).$$

Нам будет удобно рассматривать функцию $P(s,\ t)$ двух переменных $s \leqslant t$, равную общему значению $P(\Delta)$ на интервалах Δ, имеющих концами точки s и t, и аналогичную функцию $B(s,\ t)$.

Функцию $B(s,\ t)$ можно рассматривать как совокупность r^2 обычных функций $b_{ij}(s,\ t)$, являющихся элементами матрицы $B(s,\ t)$. Очевидно, что требование абсолютной непрерывности функции $B(s,\ t)$ эквивалентно требованию абсолютной непрерывности каждой из функций $b_{ij}(s,\ t)$ по t при заданном s.

Аналогично обстоит дело и с мультипликативной функцией $P(s, t)$, представляющей собой совокупность функций $p_{ij}(s, t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$. Действительно, при $s < t_1 < t_2$

$$\| P(s,\ t_1) - P(s,\ t_2) \| \leqslant \| P(s,\ t_1) \| \cdot \| P(t_1,\ t_2) - E \|$$

и поэтому из абсолютной непрерывности $P(s,\ t)$ в смысле определения (66) вытекает абсолютная непрерывность функций $p_{ij}(s,\ t)$. И обратно, если существует матрица $P^{-1}(s,\ t)$, то

$$\| P(t_1,\ t_2) - E \| \leqslant \| P^{-1}(s,\ t_1) \| \cdot \| P(s,\ t_1) - P(s,\ t_2) \|,$$

и поэтому из поэлементной абсолютной непрерывности следует абсолютная непрерывность функции $P(s,\ t)$, как функции интервала. Нетрудно показать, что из непрерывности функций $p_{ij}(s,\ t)$ следует существование и равномерная ограниченность матрицы $P^{-1}(s,\ t)$, и поэтому последнее утверждение верно всегда, но мы этим пользоваться не будем.

Теорема 10. *Пусть $P(s,\ t)$ — мультипликативная абсолютно непрерывная функция, и пусть*

$$B(s,\ t) = \int\limits_{(s,\ t)} P(d\Delta).$$

Пусть

$$A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t,\ t+\Delta t) - E}{\Delta t}, \tag{69}$$

и пусть

$$\widetilde{A}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t,\ t+\Delta t) - E}{\Delta t}. \tag{70}$$

Тогда для почти всех точек t пределы (69) *и* (70) *существуют и*

$$A(t) = \widetilde{A}(t).$$

Доказательство. По теореме 5,

$$\underset{(s,\ t)}{\widehat{\iint}} B(d\Delta) = P(s,\ t).$$

При доказательстве леммы 8 мы уже отмечали, что если вариация функции $B(s,\ t)$ на интервале $(s,\ t)$ $V(s, t) < \frac{1}{2}$, то для любого разбиения R интервала $(s,\ t)$

$$\|E + B(s,\ t) - \pi(R)\| \leqslant 2[V(s,\ t)]^2. \tag{49'}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l(R) \to 0$, получаем:

$$\|E + B(s,\ t) - P(s,\ t)\| \leqslant 2[V(s,\ t)]^2 \tag{71}$$

или

$$\left\| \frac{B(t, t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{P(t,\ t+\Delta t) - E}{\Delta t} \right\| \leqslant \frac{2[V(t,\ t+\Delta t)]^2}{\Delta t}. \tag{72}$$

Из неравенства (72) следует, что если $V(t,\ t+\Delta t) = O(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ и некотором t, то из существования для этого t предела (70) следует существование предела (69) и равенство $A(t) = \widetilde{A}(t)$.

Существование предела (70) почти всюду следует из того, что $B(s,\ t) = B(a,\ t) - B(a,\ s)$, а функции $b_{ij}(a,\ t)$ абсолютно непрерывны и, значит, почти всюду дифференцируемы по t. Остается доказать, что почти во всех точках для вариации функции $B(s,\ t)$ выполнено условие $V(t,\ t+\Delta t) = O(\Delta t)$.

Обозначим через $V_{ij}(t,\ t+\Delta t)$ вариацию функции $b_{ij}(a,\ t)$ на отрезке $[t,\ t+\Delta t]$. По определению нормы,

$$\|B(s,\ t)\| \leqslant r \sum_{i,\ j} |b_{ij}(s,\ t)|$$

и поэтому

$$V(t,\ t+\Delta t) \leqslant r \sum_{i,\ j} V_{ij}(t,\ t+\Delta t).$$

Значит, достаточно показать, что каждая из вариаций $V_{ij}(t,\ t+\Delta t) = O(\Delta t)$ для почти всех t.

Обозначим через $\widetilde{a}_{ij}(t)$ элементы матрицы $\widetilde{A}(t)$. Тогда, так как функция $b_{ij}(a,\ t)$ абсолютно непрерывна и $\widetilde{a}_{ij}(t)$ — ее производная, то

$$b_{ij}(s,\ t) = \int_s^t \widetilde{a}_{ij}(u)\, du,$$

а ее полная вариация

$$V_{ij}(s, t) = \int_s^t |\tilde{a}_{ij}(u)|\, du \tag{73}$$

(см., например, [7], стр. 227). Но из формулы (73) следует, что вариация $V_{ij}(a, t)$ является абсолютно непрерывной и поэтому почти всюду дифференцируемой функцией, а если в точке t функция $V_{ij}(a, t)$ имеет конечную производную, то

$$V_{ij}(a, t + \Delta t) - V_{ij}(a, t) =$$

$$= V_{ij}(t, t + \Delta t) = O(\Delta t),$$

что и доказывает теорему.

При доказательстве теоремы мы уже отмечали, что так как $B(a, t)$ — абсолютно непрерывная функция, а $A(t)$ — ее производная, то

$$B(s, t) = \int_s^t A(u) du. \tag{74}$$

Если в точке t существует предел (69), то в этой точке

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(s, t + \Delta t) - P(s, t)}{\Delta t} =$$

$$= P(s, t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, t + \Delta t) - E}{\Delta t} = P(s, t) \cdot A(t). \tag{75}$$

Уравнение (75) называется **дифференциальным уравнением Колмогорова**. Из теоремы 10 следует, что если функция $P(s, t)$ абсолютно непрерывна, то уравнение Колмогорова выполняется почти всюду и (см. (73)) функция $A(t)$ суммируема по Лебегу.

Обратно, если задана некоторая суммируемая функция $A(t)$, то, построив по формуле (74) соответствующую аддитивную функцию и применив к ней мультипликативный интегральный процесс, мы получим мультипликативную абсолютно непрерывную (по теореме 9) функцию $P(s, t)$, производная которой почти всюду равна $A(t)$. Значит, эта функция $P(s, t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению Колмогорова с заданной $A(t)$. Наше рассуждение можно интерпретировать как теорему о существовании решения уравнения (75) при любой суммируемой функции $A(t)$ *.

Из наших теорем вытекает также единственность мультипликативной абсолютно непрерывной функции, удовлетворяющей уравнению Колмогорова (75). Остается еще открытым вопрос о том, не могут ли

---

* Доказательство существования такого решения прямым методом можно найти в книге Каратеодори [5].

уравнению (75) удовлетворять немультипликативные функции. Этот вопрос решается отрицательно доказанной Каратеодори [2] в более общих предположениях теоремой единственности. Мы приведем ее доказательство.

Теорема 11. *Существует единственная абсолютно непрерывная функция $P(s, t)$, почти всюду удовлетворяющая уравнению Колмогорова:*

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = P(s, t) A(t), \tag{75'}$$

где $A(t)$ — суммируемая функция, и начальным условиям

$$P(s, s) = E \tag{76}$$

при $a \leqslant s \leqslant b$. (Под абсолютной непрерывностью мы понимаем здесь абсолютную непрерывность каждого из элементов $p_{ij}(s, t)$ матрицы $P(s, t)$ по переменному t при произвольном, но фиксированном s. Напомним, что для мультипликативной функции $P(s, t)$ это определение и определение (66) эквивалентны.)

Доказательство. Предположим, что имеются две не совпадающие абсолютно непрерывные функции $P_1(s, t)$ и $P_2(s, t)$, удовлетворяющие уравнению (75') и условию (76). Тогда при некотором s_0 функции

$$X_1(t) = P_1(s_0, t) \text{ и } X_2(t) = P_2(s_0, t)$$

не совпадают. Их разность $Y(t) = X_1(t) - X_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Y'(t) = Y(t) A(t) \tag{77}$$

при $s_0 \leqslant t < b$ и условию $Y(s_0) = 0$, абсолютно непрерывна и, по предположению, не равна тождественно нулю. Покажем, что это невозможно.

Обозначим через $\bar{s}$ наименьшее из чисел s, таких, что $Y(t) = 0$ при $s_0 \leqslant t < \bar{s}$. Так как $Y(t) \not\equiv 0$, то $\bar{s} < b$. Уравнение (77) эквивалентно интегральному уравнению

$$Y(t) = \int_{s_0}^{t} Y(t) A(t)\, dt = \int_{\bar{s}}^{t} Y(t) A(t)\, dt. \tag{78}$$

Из (78) вытекает, что

$$\| Y(t) \| \leqslant \int_{\bar{s}}^{t} \| Y(t) \cdot A(t) \| dt \leqslant \int_{\bar{s}}^{t} \| Y(t) \| \cdot \| A(t) \| dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s \in [\bar{s}, t]} \| Y(s) \| \cdot \int_{\bar{s}}^{t} \| A(t) \| dt.$$

В любой близости к точке $\bar{s}$ найдутся точки $\bar{t}$, такие, что

$$\bar{s}<\bar{t} \text{ и } \| Y(\bar{t})\| = \max_{s\in[\bar{s},\bar{t}]} \| Y(s)\|.$$

Поэтому для любой такой точки $\bar{t}$

$$1 \leqslant \int_{\bar{s}}^{\bar{t}} \| A(t) \| \, dt.$$

Но при $\bar{t} \to \bar{s}$

$$\int_{\bar{s}}^{\bar{t}} \| A(t) \| \, dt \to 0,$$

и в результате мы приходим к противоречию, доказывающему теорему.

Отметим, наконец, что если $P(s, t)$ является стохастической функцией, то $B(s, t)$ является инфинитезимально-стохастической функцией, а значит, и ее производная $A(t)$ будет при любом t инфинитезимально-стохастической матрицей, и, наоборот, если $A(t)$ — инфинитезимально-стохастическая функция, то такова же и функция $B(s, t)$, а значит, $P(s, t)$ является стохастической функцией.

Таким образом, между определенными почти всюду инфинитезимально-стохастическими матрицами плотностей $A(t)$ и стохастическими абсолютно непрерывными функциями $P(s, t)$ существует взаимно однозначное соответствие.

В заключение автору хочется принести сердечную благодарность своим учителям А. Н. Колмогорову и Е. Б. Дынкину. Им принадлежат основные идеи, развитые в этой работе. Автор благодарит также А. Н. Тихонова и С. Х. Сираждинова, помогших ему в подборе необходимой литературы.

(Поступило в редакцию 24/I 1953 г.)

Литература

1. N. Arley, On the theory of stochastic processes ana their application to the theory of cosmic radiation, New York, 1948.
2. V. Volterra, Sui fondamenti della teoria di equazioni differenziali lineari, Mémoire Soc. Ital. Scien. (3), **6**, No. **8** (1887), 104; **12** (1902), 3—68.
3. V. Volterra, B. Hostinsky, Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles, Paris, 1938.
4. W. Doeblin, Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)} = [A^{(t)} A^{(s)}]$ et ses applications aux probabilités en chaîne, Bull. des sciences math., **62** (1938), 21—32.
5. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig — Berlin, 1927.
6. А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, вып. V (1938), 5—41.

7. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М. — Л., 1950.
8. M. Fréchet, Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. II, Paris, 1938.
9. B. Hostinsky, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Journ. de Math. pure et appl., 16 (1937), 267—284.