1954 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 34 (76), № 3

Дорогому Киме Эльбау
Р. Добрушин
19/X 1954 г.

Условия регулярности марковских процессов с конечным числом возможных состояний

Р. Л. Добрушин (Москва)

§ 1. Основные результаты

Марковский процесс с конечным числом N возможных состояний системы $E_1, \ldots, E_N$ задается аналитически матрицами вероятностей перехода $P(s, t)$ с элементами $\{p_{ij}(s, t)\}$ $(s < t)$, где $p_{ij}(s, t)$ — условная вероятность нахождения системы в момент t в состоянии E_j при условии, что в момент s система находилась в состоянии E_i. Из формулы полной вероятности следуют основные соотношения:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(s, t)\, p_{jk}(t, u) = p_{ik}(s, u) \quad (i, k = 1, \ldots, N)$$

или в матричной записи

$$P(s, t)\, P(t, u) = P(s, u). \tag{1}$$

Кроме того, матрицы $P(s, t)$ удовлетворяют условиям стохастичности:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(s, t) = 1 \quad (i = 1, \ldots, N),$$
$$0 \leqslant p_{ij}(s, t) \leqslant 1. \tag{2}$$

Мы будем считать для простоты, что процесс задан на отрезке времени $[0,1]$, т. е. что функция $P(s, t)$ определена при $0 \leqslant s < t \leqslant 1$.

Целью данной работы является нахождение выраженных через $P(s, t)$ необходимых и достаточных условий того, чтобы соответствующая процессу случайная функция делала с вероятностью единица лишь конечное число скачков (или, как мы будем говорить, — условий регулярности процесса).

Уточним определение регулярности. При аксиоматическом подходе за множество элементарных событий естественно взять множество Ω функций $w(s)$ с целыми значениями $1, \ldots, N$. (Если $w(s_0) = i$, то говорят, что в момент s_0 система находится в состоянии E_i.) При заданном на Ω распределении вероятностей условные вероятности перехода определяются по формуле*

$$p_{ij}(s, t) = \frac{P\{(w(s) = i) \cap (w(t) = j)\}}{P\{w(s) = i\}}. \tag{3}$$

* Через $P\{A\}$ здесь и в дальнейшем обозначается вероятность события A.

Может оказаться, что при некоторых s и E_i вероятность $P\{w(s)=i\}=0$, и поэтому по распределению вероятностей нельзя восстановить условные вероятности перехода. Чтобы устранить эту трудность, приходится называть процессом не одно распределение вероятностей, а целую систему таких распределений при всевозможных начальных условиях: в начальный момент t_0 $(0\leqslant t_0\leqslant 1)$ величина $w(t_0)=i$, где i фиксировано.

Известная конструкция А. Н. Колмогорова [4] дает возможность для каждой матричной функции $P(s, t)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2), построить систему соответствующих ей распределений вероятностей (под соответствием понимается совпадение $p'_{ij}(s, t)$, вычисленных по формуле (3), с первоначальными). Такое построение неоднозначно, и методами Дуба [2] нетрудно, например, показать, что даже для $P(s, t)\equiv E$ (где E — единичная матрица) можно построить соответствующие ей распределения вероятностей, в которых вероятность того, что $w(s)=\text{const}$, равна нулю, или даже такие, в которых $w(s)$ с вероятностью единица неизмерима. Однако для всех $P(s, t)$, которые с наглядной «физической» точки зрения задают процесс с конечным числом скачков, можно построить соответствующие им системы распределений вероятностей, заданные на множестве функций $w(s)$ с конечным числом точек разрыва, и поэтому мы приходим к следующему определению:

О п р е д е л е н и е. Процесс, заданный матричной функцией $P(s, t)$, удовлетворяющей уравнениям (1) и (2), называется **р е г у л я р н ы м**, если существует система $\mathfrak{P}(t_0, i)$ распределений вероятностей, зависящих от параметров $0\leqslant t_0<1$ и $i=1, \ldots, N$, таких что

1) распределение $\mathfrak{P}(t_0, i)$ задано на множестве $\widetilde{\Omega}$ функций $w(t)$, определенных на отрезке $[t_0, 1]$, принимающих значения $1, \ldots, N$, имеющих конечное число точек разрыва и таких, что $w(t_0)=i$;

2) для любого из этих распределений при любом $t'\geqslant t_0$ и j определена вероятность $P\{w(t')=j\}$;

3) при $t>s\geqslant t_0$, любых i и j и $P\{w(s)=i\}\neq 0$ выполнено соотношение (3).

Перейдем к формулировке аналитических условий регулярности.

Назовем **в а р и а ц и е й** $V_i(a, b)$ **н а о т р е з к е** $[a, b]$, $0\leqslant a<b\leqslant 1$, **с о о т в е т с т в у ю щ е й с о с т о я н и ю** E_i, величину

$$V_i(a, b)=\sup_{\{t_j\}}\sum_{i=0}^{n-1} 1-p_{ii}(t_j, t_{j+1}), \tag{4}$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ отрезка $[a, b]$. Будем говорить, что $P(s, t)$ **и м е е т о г р а н и ч е н н у ю в а р и а ц и ю**, если $V_i(0, 1)<\infty$ при всех $i=1, \ldots, N$. Назовем **в а р и а ц и е й** $V_i(t+0)$ **в м о м е н т** $t+0$, **с о о т в е т с т в у ю щ е й с о с т о я н и ю** E_i, величину

$$V_i(t+0)=\lim_{\Delta t\to 0} V_i(t, t+\Delta t) \tag{5}$$

и вариацией $V_i(t-0)$ в момент $t-0$, соответствующей состоянию E_i, величину

$$V_i(t-0)=\lim_{\Delta t\to 0} V_i(t, t-\Delta t). \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned} p_{ji}(s, t-0) &= \lim_{\Delta t\to 0} p_{ji}(s, t-\Delta t), \\ p_{ji}(s, t+0) &= \lim_{\Delta t\to 0} p_{ji}(s, t+\Delta t). \end{aligned} \tag{7}$$

Будем говорить, что состояние E_i в момент $t-0$ (или $t+0$) недоступно, если при всех j и $s<t$ (соответственно $s\leqslant t$) вероятность $p_{ji}(s, t-0)\equiv 0$ (соответственно $p_{ji}(s, t+0)\equiv 0$).

Теорема 1. *Для регулярности процесса, заданного функцией $P(s, t)$, необходимо и достаточно следующее условие: если при каких-нибудь E_i и t вариация $V(t-0)=\infty$ (или соответственно $V_i(t+0)=\infty$), то состояние E_i в момент $t-0$ (соответственно в момент $t+0$) является недоступным.*

Наглядный смысл этого условия регулярности состоит в следующем: бесконечность вариации показывает, что условная вероятность выхода из состояния E_i велика; однако, для того чтобы произошло бесконечное число скачков, необходимо еще, чтобы не равнялась нулю безусловная вероятность находиться в состоянии E_i (чтобы состояние E_i было доступным).

Из конечности с вероятностью единица числа скачков еще не следует конечность математического ожидания числа скачков (соответствующие примеры приведены в конце работы). Поэтому представляет интерес следующая

Теорема 2. *Пусть $P(s, t)$ имеет ограниченную вариацию, и пусть через ξ обозначено число скачков, сделанных системой (число точек разрыва случайной функции $w(s)$). Тогда при любых начальных условиях $w(t_0)=k$ математическое ожидание*

$$\mathrm{M}\xi\leqslant\sum_{i=1}^{N} V_i(0, 1)<\infty. \tag{8}$$

Отметим, что играющее для условий регулярности основную роль, условие ограниченности вариации подробно изучено в работе [1], так как оно является аналитическим условием, при котором действуют наиболее широкие обобщения уравнений Колмогорова для изучаемого процесса.

Теорема, обратная теореме 2, вообще говоря, не верна. Но положение упрощается, если предположить, что выполнены условия доступности.

Теорема 3. *Если при всех $t \in [0, 1]$ и для всех состояний E_k условия доступности в моменты $t-0$ и $t+0$ выполнены, то являются эквивалентными следующие четыре утверждения:*

I. *Функция $P(s, t)$ имеет ограниченную вариацию.*

II. *Процесс регулярен.*

III. *Процесс регулярен и математическое ожидание числа скачков конечно.*

IV. *Процесс регулярен и математические ожидания числа скачков ограничены равномерно по начальным условиям.*

Если не предположить выполнение условий доступности, то остаются верными лишь следующие соотношения между этими утверждениями: I → IV → III → II. В § 4 будут приведены соответствующие примеры.

§ 2. Условия конечности математического ожидания числа скачков

Мы начнем с доказательства теоремы 2, так как при этом выявятся основные идеи доказательства много более трудной теоремы 1, не отягощенные еще громоздкими вспомогательными конструкциями.

При помощи известной теоремы Колмогорова ([1], стр. 39) построим соответствующее заданным матрицам вероятностей перехода $P(s, t)$ и начальному условию $w(t_0) = l_0$ распределение вероятностей на множестве Ω всех функций $w(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant 1$) со значениями $1, \ldots, N$. Займемся изучением этого распределения.

Определение. Пусть $T = \{\tau_i\}$ — счетное и всюду плотное на $[t_0, 1]$ множество точек этого отрезка. Назовем **числом скачков на множестве** T случайную величину $\eta(w)$, равную числу точек $t \in [t_0, 1]$, таких, что при τ, пробегающем множество T, предел $\lim\limits_{\tau \to t} w(\tau)$ не существует или же при $t \in T$ он существует, но не равен $w(t)$.

Основной при доказательстве нашей теоремы является

Лемма 1. *Если $P(s, t)$ имеет ограниченную вариацию, то для любого множества T математическое ожидание числа скачков на T*

$$M\eta \leqslant \sum_{k=1}^{N} V_k(t_0, 1) < \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем первые n точек $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из множества T и перенумеруем их в порядке возрастания $\tau_{i_1} < \ldots < \tau_{i_n}$. Обозначим через η_n число пар $(\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}})$, таких, что $w(\tau_{i_j}) \neq w(\tau_{i_{j+1}})$. Последовательность $\eta_n(w)$ при фиксированном w является монотонно неубывающей и $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n(w) = \eta(w)$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}\,\eta_n = \mathrm{M}\,\eta, \tag{10}$$

но так как $1-p_{kk}(\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}})$ есть условная вероятность того, что $w(\tau_{i_{j+1}}) \neq w(\tau_{i_j})$ при условии, что $w(\tau_{i_j})=1$, и так как точки τ_{i_j} образуют разбиение отрезка $[t_0, 1]$, то

$$\mathrm{M}\,\eta_n = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N} p_{i_0k}(t_0, \tau_{i_j})\left[1-p_{kk}(\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}})\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n-1}\left[1-p_{kk}(\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}})\right] \leqslant \sum_{k=1}^{N} V_k(t_0, 1). \tag{11}$$

Из равенств (10) и (11) вытекает утверждение леммы.

Из леммы 1 следует, что для любого счетного, всюду плотного на $[t_0, 1]$ множества T число скачков на этом множестве с вероятностью единица конечно. Для перехода от счетного множества T ко всему отрезку нам понадобится лемма 2.

Назовем момент времени t особым, если при некотором k вероятность $p_{i_0k}(t_0, t-0) \neq 0$ и $\lim_{\Delta t\to 0} p_{kk}(t-\Delta t, t)$ не существует или существует, но не равен единице. Назовем счетное, всюду плотное на $[t_0, 1]$ множество T полным, если в него входят все особые моменты времени, а также моменты t_0 и 1. Как легко видеть, для существования полного множества необходимо и достаточно, чтобы множество особых точек было счетно. Позднее (см. леммы 3 и 8) мы покажем, что в условиях теорем 2 и 1 оно действительно счетно.

Лемма 2. *Если на некотором полном множестве T происходит с вероятностью единица конечное число скачков, то соответствующий процесс регулярен.*

Для доказательства мы воспользуемся понятием стохастически эквивалентных распределений вероятностей, введенным Е. Е. Слуцким [4]*.

Определение. Распределение вероятностей $\overline{\overline{P}}\{t\}$, заданное на множестве $\overline{\Omega}$ функций $\overline{w}(t)$, называется стохастически эквивалентным распределению вероятностей $\overline{\overline{P}}\{t\}$, заданному на функциях $\overline{\overline{w}}(t)$, если существует отображение f множества $\overline{\overline{\Omega}}$ функций $\overline{\overline{w}}(t)$ на множество $\overline{\Omega}$ функций $\overline{w}(t)$, переводящее распределение вероятностей $\overline{\overline{P}}\{\ \}$ в распределение $\overline{P}\{\ \}$, такое, что для любого фиксированного t_0 определены вероятности

$$\overline{\overline{P}}\{\overline{\overline{w}}(t_0)=\overline{w}(t_0)\}, \qquad \overline{P}\{\overline{w}(t_0)=\overline{\overline{w}}(t_0)\}$$

и

$$\overline{\overline{P}}\{\overline{\overline{w}}(t_0)=\overline{w}(t_0)\}=\overline{P}\{\overline{w}(t_0)=\overline{\overline{w}}(t_0)\}=1.$$

* Это доказательство может быть проведено и при помощи методов Дуба [2], например, так, как аналогичное утверждение доказано в работе Е. Б. Дынкина [3]. Однако метод Слуцкого требует меньшего числа вспомогательных рассуждений.

Из этого определения вытекает, что если распределение $\overline{P}$ стохастически эквивалентно распределению $\overline{P}$ и оба эти распределения заданы на функциях, определенных на $[t_0, 1]$, со значениями $1, \ldots, N$, то условные вероятности перехода $p_{ij}(s, t)$, вычисленные для этих распределений по формуле (3), окажутся совпадающими. Поэтому для доказательства леммы достаточно построить распределение вероятностей, стохастически эквивалентное распределению введенному в начале настоящего параграфа, и заданное на множестве $\tilde{\Omega}$ функций с конечным числом скачков.

Искомое отображение $\tilde{w}(s) = f(w(s))$ будем строить следующим образом: при $s \in T$ положим $\tilde{w}(s) = w(s)$, а при $s \overline{\in} T$ положим $\tilde{w}(s) = \lim\limits_{\tau \to t-0} w(\tau)$ (здесь τ пробегает множество T), если этот предел существует, и $\tilde{w}(s) = 1$, если он не существует. Функция $\tilde{w}(s)$ имеет точки разрыва там и только там, где $w(s)$ делает скачки на множестве T (см. определение скачка на множестве T). Поэтому из условий леммы следует, что $\tilde{w}(s)$ с вероятностью единица делает лишь конечное число скачков. Отбросив множество нулевой вероятности, получим, что все $\tilde{w}(s)$ имеют конечное число точек разрыва. Если $s \in T$, то условие $P\{w(s) = \tilde{w}(s)\} = 1$ выполнено по построению. Пусть теперь $s \overline{\in} T$. Предположим, что $P\{w(s) \neq \tilde{w}(s)\} \neq 0$. Тогда найдутся $i \neq j$, такие, что $P\{(\lim\limits_{\tau \to s-0} w(\tau) = i) \cap (w(s) = j)\} = \alpha > 0$. Если $p_{ij}(s-0, s) = 0$, то при τ, достаточно близких к $s-0$, вероятность $p_{ij}(\tau, s) < \frac{\alpha}{2}$, и мы приходим к противоречию. Так как T — полное множество и точка s поэтому — не особая, то $p_{ij}(s-0, s)$ может быть не нулем, лишь если $p_{i_0 i}(t_0, s-0) = 0$, а тогда $P\{\lim\limits_{\tau \to s-0} w(\tau) = i\} = 0$, и мы снова приходим к противоречию. Итак, нами доказана стохастическая эквивалентность распределений, заданных на $w(t)$ и $\tilde{w}(t)$, а значит, и лемма 2.

Для того чтобы показать, что в условиях теоремы 1 существует счетное полное множество T, нам потребуется

Лемма 3. *Если $P(s, t)$ имеет ограниченную вариацию, то найдется не более чем счетное число точек s, в которых при некотором k вероятность $p_{kk}(s-0, s) \neq 1$.*

Доказательство. Из определения вариации (4) переходом к пределу легко показать, что для любого конечного набора точек $t_1, \ldots, t_m$ и любого k

$$\sum_{i=1}^{m} 1 - p_{kk}(t_i - 0, t_i) \leqslant V_k(a, b) < \infty. \tag{12}$$

Это противоречит предположению о несчетности числа точек τ, для которых $1 - p_{kk}(\tau - 0, \tau) > 0$.

Из лемм 1, 2 и 3 вытекает, что процесс, соответствующий функции $P(s, t)$ с ограниченной вариацией, регулярен. Чтобы получить оценку (4) математического ожидания $M\xi$, достаточно заметить, что число скачков ξ функции $\tilde{w}(s)$, построенной при доказательстве леммы 2, совпадает с числом скачков η функции $w(t)$ на множестве T, и поэтому неравенство (9) равносильно неравенству (4).

§ 3. Необходимые и достаточные условия регулярности

Доказательство нашей основной теоремы 1 мы начнем с доказательства необходимости условий этой теоремы.

Пусть наше условие регулярности не выполнено, тогда для некоторого состояния E_i и момента t вариация $V_i(t-0)=\infty$ (в случае, когда $V_i(t+0)=\infty$, доказательство проводится совершенно аналогично) и при некоторых начальных состоянии E_j и моменте времени t_0 предел

$$\overline{\lim_{\Delta t\to 0}}\, p_{ji}(t_0, t-\Delta t)=\alpha>0. \tag{13}$$

Покажем, что из условия $V_i(t-0)=\infty$ следует существование последовательности точек $t_0<t_1<t_2<\ldots,\ t_l\to t$, такой, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} 1-p_{ii}(t_l, t_{l+1})=\infty. \tag{14}$$

Действительно, $V_i(0, t)=\infty$ и, значит, найдется разбиение $0=t_0<$ $<t_1<\ldots<t_{n_1}<t$ отрезка $[0, t]$ такое, что

$$\sum_{l=1}^{n_1} 1-p_{ii}(t_{l-1}, t_l)+1-p_{ii}(t_{n_1}, t)>2.$$

Отсюда $\sum\limits_{l=1}^{n_1} 1-p_{ii}(t_{l-1}, t_l)>1$. Точно так же $V_i(t_{n_1}, t)=\infty$ и найдутся точки $t_{n_1}<t_{n_1+1}<\ldots<t_{n_2}<t$, такие, что $\sum\limits_{l=n_1+1}^{n_2} 1-p_{ii}(t_{l-1}, t_l)$ и т. д. Таким способом мы построим всю искомую последовательность. Из равенства (13) вытекает (см., например, [6], стр. 404), что при всех k

$$\prod_{l=k}^{\infty} p_{ii}(t_l, t_{l+1})=0. \tag{15}$$

Если система делает с вероятностью единица лишь конечное число скачков, то для достаточно малого ε вероятность того, что система сделает хотя бы один скачок за отрезок времени $[t-\varepsilon, t]$, меньше, чем $\frac{\alpha}{2}$. Из (13) следует, что существует точка $u\in[t-\varepsilon, t]$, такая, что $p_{ji}(t_0, u)>\frac{\alpha}{2}$, и так как $t_l\to t$, то найдется $t_k>u$. При начальном условии $w(t_0)=j$ система с вероятностью, большей чем $\frac{\alpha}{2}$, оказывается в момент u в состоянии E_i и затем с вероятностью единица, что вытекает из (15), уходит из этого состояния раньше момента t, т. е. делает скачок на отрезке времени $[t-\varepsilon, t]$. Мы пришли к противоречию.

Доказательство достаточности условий теоремы 1 значительно сложнее. Оно проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы 2 в § 2. Мы будем пользоваться определениями, введенными в этом параграфе. Так же, как и там, рассматривается распределение вероятностей, определяемое на функциях $w(t)$ при помощи теоремы Колмогорова. Основную роль играет следующая лемма, являющаяся аналогом леммы 1 § 2.

Лемма 4. *Если выполнены условия регулярности, приведенные в теореме* 1, *то для любого счетного, всюду плотного множества T число скачков на этом множестве с вероятностью единица конечно.*

Доказательство. При доказательстве этой леммы нам будет удобно иногда вместо отрезка $[t_0, 1]$ рассматривать другое топологическое пространство $\mathfrak{T}$ — «раздвоенный континуум». Из каждой точки $t \in (t_0, 1)$ образуем две точки $t-0$ и $t+0$ нового пространства $\mathfrak{T}$. Кроме того, в $\mathfrak{T}$ входят точки t_0+0 и $1-0$. Множество точек $\{\tau\}$ пространства $\mathfrak{T}$ упорядочим естественным образом, считая, что $\tau_1 < \tau_2$, если $\tau_1 = t_1 \pm 0, \tau_2 = t_2 \pm 0$ и $t_1 < t_2$ или же если $\tau_1 = t - 0$, а $\tau_2 = t + 0$, и введем в это множество топологию, соответствующую этому упорядочению (т. е. возьмем за базисные окрестности интервалы вида $\tau_1 < \tau < \tau_2$). Проекцией множества $Q \subset \mathfrak{T}$ мы будем называть множество точек t из $[t_0, 1]$, таких, что $t-0$ или $t+0$ входит в Q. Заметим, что если Q замкнуто в $\mathfrak{T}$, то его проекция тоже замкнута.

Доказательство леммы будет вестись методом рассуждений от противного. Все дальнейшие построения мы будем совершать в предположении, что условия регулярности выполнены, но при некоторых начальных условиях $w(t_0) = n_0$, которые мы теперь зафиксируем, система делает с положительной вероятностью бесконечное число скачков на множестве T и, в конце концов, придем к противоречию.

Мы будем говорить, что скачок *, произошедший в момент t, делается системой из состояния E_i, если в любом интервале $(t - \Delta t, t)$ найдется точка s, такая, что $w(s) = i$. Так как каждый скачок делается из какого-нибудь (быть может, из нескольких) состояния, то для некоторого состояния E_m система будет с положительной вероятностью делать бесконечное число скачков из этого состояния.

Обозначим через F_1 множество точек пространства $\mathfrak{T}$, для которых вариация $V_m(\tau)$, определяемая по формулам (5) и (6), бесконечна. Заметим, что F_1 замкнуто в топологии $\mathfrak{T}$. Действительно, если τ входит в замыкание F_1 и, для определенности, $\tau = t - 0$, то на любом отрезке $[t - \Delta t, t]$ найдется точка s, такая, что $V_m(s-0)$ или $V_m(s+0)$ бесконечно, и поэтому в отрезок $[t - \Delta t, t]$ вложен отрезок $[s - \Delta s, s]$ (или же $[s, s + \Delta s]$), такой, что $V_m(s - \Delta s, s) = \infty$. Значит, и $V_m(t - \Delta t, t) = \infty$, откуда $\tau \in F_1$. Несколько труднее показать, что F_1 не пусто.

Сформулируем две леммы.

---

* Подразумевается скачок на множестве T. Далее до конца параграфа мы не будем оговаривать этого специально.

Лемма 5. *Если $V_k(c, d) < \infty$, то число скачков η из состояния E_k за время $[c, d]$ имеет математическое ожидание $M\eta < V_k(c, d)$.*

Доказательства этого утверждения мы приводить здесь не будем, так как оно было, по существу, проведено при доказательстве леммы 1.

Лемма 6. *Если $V_k(c, d) = \infty$, то в пространстве $\mathfrak{T}$ найдется точка τ, такая, что $V_k(\tau) = \infty$ и $c+0 \leqslant \tau \leqslant d-0$.*

Доказательство. Из определения вариации следует, что всегда

$$V_k(a, b) + V_k(b, c) \geqslant V_k(a, c) - 1. \tag{16}$$

Поэтому, разделив отрезок $[t_0, 1]$ пополам, получим, что для одной из половин вариация бесконечна. Продолжая безгранично этот процесс деления пополам, в пересечении полученной последовательности вложенных отрезков получим точку t, такую, что или $V_k(t-0) = \infty$ или $V_k(t+0) = \infty$.

Из леммы 5 следует, что $V_m(t_0, 1) = \infty$, а из леммы 6,— что при некотором $\tau \in \mathfrak{T}$ вариация $V_m(\tau) = \infty$, т. е. что F_1 не пусто.

Для дальнейшего нам придется построить последовательность вложенных друг в друга замкнутых в $\mathfrak{T}$ множеств $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$. Мы покажем, что при всех k множества F_k не пусты и что если $\tau \in F_k$, то в точке τ обращается в бесконечность по меньшей мере k из величин $V_j(\tau)$. При $\tau \in F_N$ (где N — число состояний системы) равны бесконечности все вариации $V_j(\tau)$, и, значит, по условиям теоремы, все N состояний являются недоступными, а это, как легко видеть из определения недоступности, противоречит основным условиям (2).

Построение мы будем выполнять по индукции. Пусть уже построено замкнутое непустое множество F_k. Рассмотрим его проекцию $\overline{F}_k$ на отрезок $[t_0, 1]$ и обозначим через Q_k множество точек $([t_0, 1] \setminus \overline{F}_k) \cup T$. Множество Q является суммой открытого множества и еще счетного числа точек и поэтому может быть единственным образом представлено в виде суммы не более чем счетного числа непересекающихся отрезков, полуинтервалов, интервалов и отдельных точек таким образом, чтобы между любыми двумя из этих компонент находилась точка дополнительного множества. Запишем это представление:

$$Q_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^k. \tag{17}$$

Каждой из компонент $U_i^{(k)}$ сопоставим число $u_i^{(k)}$ — вероятность хотя бы в один из моментов времени $t \in U_i^{(k)} \cap T$ побывать в состоянии E_m. Введем функцию пары точек $a < b$, определив ее как

$$s_k(a, b) = \sum_{i \in J} u_i^{(k)}, \tag{18}$$

где i входит в J, если пересечение $U_i^{(k)} \cap (a, b)$ (где (a, b) — открытый интервал) не пусто. Легко видеть, что при $a < b < c$

$$s_k(a, b) + s_k(b, c) \leqslant s_k(a, c) \leqslant s_k(a, b) + s_k(b, c) + 1. \tag{19}$$

Из (19) вытекает, что если

$$a \leqslant c < d \leqslant b \quad \text{и} \quad s_k(c, d) = \infty,$$

то и

$$s_k(a, b) = \infty.$$

Мы включим точку $\tau = t - 0$ в множество F_{k+1}, если при всех $\Delta t > 0$

$$s_k(t - \Delta t, t) = \infty. \tag{20}$$

Точка $\tau = t + 0$ входит в F_{k+1}, если при всех $\Delta t > 0$

$$s_k(t, t + \Delta t) = \infty. \tag{20'}$$

Замкнутость множества F_{k+1} в топологии $\mathfrak{T}$ доказывается точно так же, как мы доказывали замкнутость F_1. Если точка $\tau \,\overline{\in}\, F_k$ и, для определенности, $\tau = t - 0$, то, так как F_k замкнуто, найдется интервал $(t - \varepsilon, t)$, столь малый, что он целиком входит в $[a,b] \setminus F_k$ и, значит, целиком содержится в одной компоненте $U_i^{(k)}$. Тогда сумма (18) для $s_k(t - \varepsilon, t)$ состоит из одного слагаемого и поэтому конечна. Точка $\tau \,\overline{\in}\, F_{k+1}$. Итак, показано, что $F_{k+1} \subset F_k$.

Труднее показать, что F_{k+1} не пусто Для этого нам понадобится

Лемма 7. *Вероятность того, что система сделает бесконечное число скачков из состояния E_m за время $U_i^{(k)}$ (где i и k фиксированы), равна нулю.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по k. Рассмотрим сначала компоненту $U_i^{(1)}$. Обозначим ее концы через a и b $(a \leqslant b)$. Предположим, для определенности, что $a + 0 \in F_1$, а $b - 0 \,\overline{\in}\, F_1$. Остальные случаи разбираются аналогично. При $a < t < b$ вариация $V_m(t \pm 0) < \infty$ и, по лемме 6, при любом $\varepsilon > 0$ вариация $V_m(a + \varepsilon, b) < \infty$. По лемме 5, система делает с вероятностью единица лишь конечное число скачков из состояния E_m за отрезок времени $[a + \varepsilon, b]$.

Обозначим через H множество состояний E_k, таких, что $V_k(a + 0) < \infty$. При достаточно малом ε сумма $\sum\limits_{E_k \in H} V_k(a, a + \varepsilon) < \infty$ и по лемме 5 число скачков, которые система делает из состояний $E_k \in H$, также с вероятностью единица конечно. Поэтому для любого $\delta > 0$ найдется столь малое $\tilde{\varepsilon} > 0$, что с вероятностью, большей $1 - \delta$, система не делает на отрезке $[a, a + \tilde{\varepsilon}]$ ни одного скачка из состояний $E_k \in H$. С другой стороны, так как все состояния $E_l \in H$ являются недоступными, то $\lim\limits_{t \to a+0} \sum\limits_{E_l \overline{\in} H} p_{n_0 l}(t_0, t) = 0$ и при некотором $\tilde{\tilde{\varepsilon}} \leqslant \tilde{\varepsilon}$ вероятность находиться вне H в момент $t \in [a, a + \tilde{\tilde{\varepsilon}}]$ меньше δ. Поэтому вероятность того, что система хоть раз побывает в $E_k \in H$ за время $[a, a + \tilde{\tilde{\varepsilon}}]$, меньше, чем 2δ. Значит меньше 2δ и вероятность сделать бесконечное число скачков из состояния E_m за время $[a, a + \tilde{\tilde{\varepsilon}}]$. Вероятность сделать бесконечное число скачков из E_m за время $[a+\tilde{\tilde{\varepsilon}}, b]$ равна нулю, и так как δ произвольно мало, наше утверждение доказано.

Предположим теперь, что наше утверждение доказано для всех интервалов системы $\{U_i^{(k-1)}\}$, и рассмотрим некоторый интервал $U_i^{(k)}$. Как и раньше, обозначим его концы через a и b и предположим, для определенности, что $a+0 \in F_k$, а $b-0 \bar{\in} F_k$. Так как $F_k \subset F_1$, то $a+0 \in F_1$ и $V_m(a+0)=\infty$. Поэтому точно так же, как и при рассмотрении $U_i^{(1)}$, показывается, что для любого $\delta>0$ найдется столь малое ε, что вероятность сделать бесконечное число скачков из состояния E_m за время $[a, a+\varepsilon]$ меньше, чем 2δ. Остается показать конечность числа скачков из состояния E_m за время $[a+\varepsilon, b]$. Так как все точки τ, заключенные в $a+\varepsilon+0 \leqslant \tau \leqslant b-0$, не входят в F_k, то $s_k(a+\varepsilon, b)<\infty$ (это выводится из определения F_k и соотношения (19) точно так же, как из (16) была выведена лемма 6).

На каждом из интервалов $U_i^{(k-1)}$система делает лишь конечное число скачков из состояния E_m, и так как мы рассматриваем лишь положения системы в моменты, входящие в T, а любой момент $t \in T$ входит в один из интервалов $U_i^{(k-1)}$, то для того, чтобы сделать бесконечное число скачков из состояния E_m за время $[a+\varepsilon, b]$, нужно побывать в E_m на бесконечном числе интервалов $U_i^{(k-1)}$, пересекающихся с $[a+\varepsilon, b]$. Но $s_k(a+\varepsilon, b)$ по своему определению и есть математическое ожидание числа интервалов $U_i^{(k-1)}$, на которых система побывает в состоянии E_m за время $[a+\varepsilon, b]$. Поэтому из того, что $s_k(a+\varepsilon, b)<\infty$, следует конечность этого числа интервалов, и наше утверждение, а значит, и вся лемма доказаны.

Если бы множество F_k было пусто, то вся система $\{U_i^{(k+1)}\}$ состояла бы из одного интервала $[t_0, 1]$, и, значит, по лемме 7, число скачков из состояния E_m было бы конечно. Мы пришли к противоречию.

Лемма 8. *Если точка τ принадлежит F_k, то при этом τ по крайней мере k из вариаций $V_l(\tau)$ обращаются в бесконечность.*

Доказательство. В точках множества F_1, по построению, обращаются в бесконечность вариации $V_m(\tau)$, и поэтому для него утверждение леммы очевидно. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. Пусть для F_k утверждение уже доказано.

Пусть $\tau \in F_{k+1}$ и, для определенности, $\tau=t-0$. Точка τ принадлежит F_k, и поэтому найдется набор E из k состояний системы $(E_{l_1}=m, \ldots, E_{lk})$, такой, что $V_{l_j}(\tau)=\infty$. Мы будем считать, что при $E_p \bar{\in} E$ вариация $V_p(\tau)<\infty$, так как иначе утверждение леммы было бы доказано. При достаточно малом ε и всех $E_p \bar{\in} E$ вариация $V_p(t-\varepsilon,t)<\infty$, и, по лемме 5, конечно математическое ожидание $M\eta$ числа скачков η из всех состояний $E_p \bar{\in} E$ за время $[t-\varepsilon, t]$.

С другой стороны, так как $\tau \in F_{k+1}$, то $s_k(t-\varepsilon, t)=\infty$. Следовательно, в отрезке $[t-\varepsilon, t]$ содержится бесконечное множество J интервалов $U_i^{(k)}$, такое, что сумма (18) бесконечна. Между любыми двумя интервалами $U_{i_1}^{(k)}$ и $U_{i_2}^{(k)}$ множества J лежит точка g из множества $\bar{F}_k$.

Пусть, для определенности, в множество F_k входит точка $g+0$. В этой точке обращаются в бесконечность k из вариаций $V_i(g+0)$, а так как $g \in [t-\varepsilon, t]$ и $V_p(t-\varepsilon, t) < \infty$ при $E_p \overline{\in} E$, то при $E_i \in E$ вариация $V_i(g+0) = \infty$. Значит, $p_{n,i}(t_0, g+0) = 0$, и поэтому, если в моменты $t_1 \in U_{i_1}^{(k)}$ и $t_2 \in U_{i_2}^{(k)}$ система побывает в состоянии E_m, то между этими двумя моментами времени она побывает вне множества E (выражаясь не вполне определенно, можно сказать, что система будет вне E в момент $g+0$). Отсюда следует, что за время $[t-\varepsilon, t]$ число скачков системы η из состояний $E_p \overline{\in} E$ не меньше числа интервалов ζ из множества J, на которых система побывает в состоянии E_m. Но математическое ожидание величины ζ равно сумме (18) и бесконечно, в то время как $M\eta < \infty$. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает лемму 8.

Перейдем к доказательству основной леммы 4. Рассмотрим множество F_N, где N — число состояний процесса. Мы доказали, что F_N не пусто. Пусть $\tau = g+0$ (или $g-0$) входит в F_N. По лемме 8, при всех i вариация $V_i(\tau) = \infty$. Из условий регулярности вытекает поэтому, что $p_{n,i}(t_0, g+0) = 0$, но тогда и $\sum_{i=1}^{N} p_{n,i}(t_0, g+0) = 0$. А из определения $p_{n,i}(t_0, g+0)$ и условия (2) вытекает, что $\sum p_{n,i}(t_0, g+0) = 1$. В этом и состоит противоречие, доказывающее нашу лемму.

Для того чтобы вывести из леммы 4 и леммы 2 нашу основную теорему, нам осталось показать лишь, что в условиях теоремы 1 множество особых точек счетно и поэтому существует счетное полное множество, которое можно взять за множество T леммы 1,

Лемма 9. *Если выполнены условия регулярности, сформулированные в теореме 1, то множество особых точек счетно.*

Доказательство. Пусть имеется несчетное число особых точек. Тогда при некоторых k и $\alpha > 0$ найдется бесконечное множество особых точек t, таких, что

$$\overline{\lim_{\Delta t \to 0}}\, p_{i,k}(t_0, t-\Delta t) > \alpha \tag{21}$$

и

$$\overline{\lim_{\Delta t \to 0}}\, [1 - p_{kk}(t-\Delta t, t)] > \alpha. \tag{22}$$

Это множество имеет в $[t_0, 1]$ предельную точку $\tilde{t}$. Предположим для определенности, что в любой правой полуокрестности точки $\tilde{t}$ лежит бесконечное число точек t. Из (22) вытекает, что в любом интервале $(\tilde{t}, \tilde{t}+\varepsilon)$ можно выбрать сколь угодно большое число неперекрывающихся отрезков $[u_k, \bar{u}_k]$, таких, что $1 - p_{kk}(u_k, \bar{u}_k) > \alpha$. Поэтому $V_k(\tilde{t}, \tilde{t}+0) = \infty$. Но тогда, согласно условиям регулярности, $p_{i,k}(t_0, \tilde{t}+0) = 0$ и, значит, при достаточно малом ε и $0 < \Delta\tilde{t} < \varepsilon$ вероятность $p_{i,k}(\tilde{t}_0, \tilde{t}+\Delta\tilde{t}) < \frac{\alpha}{2}$, а это противоречит (21). Лемма доказана, и вместе с тем закончено доказательство теоремы 1.

§ 4. Случай выполнения условий доступности и некоторые примеры

Теорема 3 легко выводится из уже доказанных теорем 1 и 2. Действительно, очевидно, что всегда из утверждения IV вытекает утверждение III и из утверждения III — утверждение II. Теорема 2 показывает, что из утверждения I вытекает утверждение IV. Остается показать лишь, что, когда условия доступности выполнены, из утверждения II следует утверждение I. Но если условия доступности выполнены и процесс регулярен, то, по теореме 1, в любой точке $\tau = t \pm 0$ все вариации $V_k(\tau) < \infty$, а тогда, согласно лемме 6, функция $P(s, t)$ имеет ограниченную вариацию.

Приведем в заключение несколько патологических примеров. Все они относятся к случаю нарушения условий доступности.

Пример 1. *Процесс регулярен и математические ожидания числа скачков равномерно ограничены. Вариация не ограничена.*

Пусть $t_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Процесс имеет два состояния E_1 и E_2. Матрица вероятностей перехода строится следующим образом:

$$P(t_n, t_n+0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а если в полуинтервале $[s, t)$ не содержится точек t_n, то

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные матрицы вероятностей перехода находятся из уже заданных умножением по формуле (1). В этом процессе система делает всегда не больше одного скачка, и поэтому условия доступности не выполнены.

Пример 2. *Процесс регулярен и математические ожидания числа скачков конечны, но не ограничены равномерно в совокупности. Вариация не ограничена.*

Пусть $t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Процесс имеет три состояния E_1, E_2, E_3. Положим

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если полуинтервал $[s, t)$ не содержит точек t_n и $\frac{1}{2}$. Пусть

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$P(t_{2n}, t_{2n} + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(t_{2n+1}, t_{2n+1} + 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где n — целое число. Остальные вероятности находятся по формуле (1). Здесь, если начальный момент $t_0 \leqslant \frac{1}{2}$, система делает один или не делает ни одного скачка. Если же $t_{n+1} < t_0 < t$ и, например, n четно, то система делает ровно n скачков, если начальное состояние — E_1, $n-1$ скачков, если начальное состояние — E_2, и 0 скачков, если начальное состояние — E_3. Следовательно, математическое ожидание числа скачков всегда конечно, но, если $t_0 \to \frac{1}{2}+0$ и за начальное состояние взято, например, E_1, это математическое ожидание стремится к бесконечности. Очевидно, что $p_{j1}(s, \frac{1}{2}+0) \equiv 0$ и $p_{j2}(s, \frac{1}{2}+0) \equiv 0$, т. е. доступность нарушена.

Пример 3. *Процесс регулярен, но математическое ожидание числа скачков бесконечно. Вариация не ограничена.*

Пусть $t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Строится процесс из трех состояний. Как и раньше, считаем, что

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если полуинтервал $[s, t)$ не содержит точек t_n. Далее, положим при нечетном n

$$P(t_{2n}, t_{2n}+0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при n четном, но $n \neq 2^m$, где $m = 1, 2, \ldots,$

$$P(t_n, t_n+0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, наконец, при $n = 2^m$

$$P(t_n, t_n+0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Предположим например, что в начальный момент $t_0 = 0$ система находится в состоянии E_2. Тогда с вероятностью $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ система сделает $2^m - 1$ скачков из E_2 в E_1 и обратно, затем перейдет в E_3 и там и останется до конца; число скачков конечно, и процесс регулярен. Однако математическое ожидание числа скачков равно

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m 2^m = \infty$$

Аналогично обстоит дело и при других начальных условиях. Здесь состояния E_1 и E_2 в момент $\frac{1}{2} - 0$ являются недоступными.

Пример 4. *Вариация ограничена, процесс регулярен, но условия доступности не выполнены.*

Положим

$$P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+0\right)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

а при $\frac{1}{2}\overline{\in}[s,\ t)$

$$P(s,\ t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Приведем, наконец, пример нерегулярного процесса.

Пример 5. *Вариация не ограничена, процесс нерегулярен. Условия доступности выполнены.*

Пусть система имеет два состояния E_1 и E_2 и $t_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Пусть

$$P(t_{2n},\ t_{2n}\pm 0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$P(t_{2n+1},\ t_{2n+1}+0)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},$$

а при $t_n\overline{\in}[s,\ t)$

$$P(s,\ t)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Здесь, если начальный момент $t_0<\frac{1}{2}$, система делает с вероятностью единица бесконечное число скачков: $E_1\to E_2\to E_1\to\cdots$.

Конечно, можно рассмотреть и значительно более сложный нерегулярный процесс.

Задача отыскания условий регулярности была поставлена А. Н. Колмогоровым, оказавшим автору большую помощь в ее решении. Автор отмечает также ценные советы и указания, полученные им от Е. Б. Дынкина, и приносит им обоим свою искреннюю благодарность.

(Поступило в редакцию 14/VII 1953 г.)

Литература

1. Р. Л. Добрушин, Обобщение уравнений Колмогорова для марковских процессов с конечным числом возможных состояний, Матем. сб., **33** (75) (1953), 567—596.
2. J. L. Doob, Probability in function space. Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 15—30.
3. Е. Б. Дынкин, Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, серия матем., **16** (1952), 563—572.

4. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.— Л., 1936.
5. Е. Е. Слуцкий, Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie, Giorn. d. Att., 8 (1937), 183—199 или
Е. Е. Слуцкий, Несколько предложений к теории случайных функций, Труды Среднеазиатск. Гос. ун-та, серия V-a, вып. 31, Сборник, посвященный тридцатилетию научной и педагогической деятельности В. И. Романовского, изд. САГУ, Ташкент, 1940.
6. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.— Л., 1948.