Über den semiklassischen Limes der Berryschen Phase

vorgelegt von

Diplom- Physiker

JOACHIM ASCH

aus Bückeburg

Vom Fachbereich 3 Mathematik

der Technischen Universität Berlin

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß

Vorsitzender: Prof. Dr. K.-H. Förster

1. Berichter : Prof. Dr. R. Seiler

2. Berichter : Prof. Dr. R. Wüst

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 25.04.1990

Berlin 1990

D 83

Inhalt

Einleitung

1. Das Problem .... p. 4

2. Differenzierbarer Funktionalkalkül und die klassischen Gleichungen .... p. 13

3. Semiklassischer Limes .... p. 19

4. Asymptotische Entwicklungen .... p. 26

5. Allgemeine Systeme .... p. 33

Anhang .... p. 37

Literatur .... p. 48

Glossar .... p. 51

Lebenslauf

<u>Zusammenfassung</u>

Berrys Phase ist eine physikalische Größe, die durch Integration einer charakteristischen Klasse berechnet werden kann. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir den semiklassischen Limes einer 2-Form, welche diese Klasse repräsentiert.

Das Hauptergebnis ist: Für ein integrables System, welches durch eine Familie von Weyl-quantisierten Hamiltonfunktionen gegeben ist, geht die mit $\mathbf{h}/i$ multiplizierte Form im semiklassischen Limes $\mathbf{h} \to 0$ in die Krümmung des Zusammenhangs über, dessen Holonomie durch Hannays Winkel gegeben ist.

Ein solches Ergebnis wurde in der physikalischen Literatur in lokalen Koordinaten abgeleitet, ein Beweis fehlte jedoch. Für unseren Beweis benutzen wir koordinatenfreie Formeln.

Weiter zeigen wir die asymptotische Entwickelbarkeit der Form, falls das System nur einen Freiheitsgrad hat, sowie einer ausgeschmierten Form für eine allgemeine Klasse von Systemen.

Einleitung

Für $\mathbf{h} > 0$ sei $P_{\mathbf{h}}(\kappa)$ eine in mehreren äußeren Parametern κ glatte Familie endlich-dimensionaler Spektralprojektoren von Hamiltonoperatoren $H_{\mathbf{h}}(\kappa)$ in einem Hilbertraum. Die zugehörigen Eigenwerte mögen mit $\mathbf{h} \to 0$ gegen eine vorgegebene klassische Energie konvergieren.

Gegenstand unserer Betrachtungen ist der Grenzwert für $\mathbf{h} \to 0$ (semiklassischer Grenzwert) der komplexen 2-Form

$$\operatorname{tr} P_{\mathbf{h}}(dP_{\mathbf{h}})(dP_{\mathbf{h}}) \qquad \text{(c.f.: p. 8).} \qquad \text{(ch)}$$

(ch) wurde (in lokalen Koordinaten) von Berry [B] als Ausdruck der nicht-trivialen Geometrie des adiabatischen Limes der Quantenmechanik ins Gespräch gebracht; vgl. [S] für eine mathematische Formulierung.

Die Vielzahl der Anwendungen der adiabatischen Näherung begründet das Interesse an (ch) in den unterschiedlichsten physikalischen Theorien [S-W].
Variieren die Parameter in der Zeit wie $\kappa(t/T)$ $(t \in [0, T])$, so wird unter dem adiabatischen Limes der Grenzübergang $T \to \infty$ verstanden. In diesem Grenzübergang folgt die von $H_{\mathbf{h}}(\kappa(t/T))$ erzeugte Dynamik den durch die Projektoren definierten spektralen Teilräumen [K], [A-S-Y].
Die Vereinigung dieser Teilräume definiert ein glattes komplexes Vektorbündel, in dem ein kanonischer Zusammenhang gegeben ist; die durch diesen definierte parallele Bewegung ist der geometrische Anteil der adiabatischen. Berechnet man aus diesem Zusammenhang die erste Chernsche Klasse mit der Chern-Weilschen Methode [M-S], so ergibt sich (ch) als Repräsentant. Im speziellen Fall eines Linienbündels liefert die Integration von (ch) über das Innere einer kontrahierbaren Schleife die Holonomiephase ("Berry's Phase").

Wir betrachten nun $H_{\mathbf{h}}(\kappa)$, die als Pseudo-Differential Operatoren (ψDOen) mit Symbol $h(\kappa)$ im $L^2(R^n)$ durch ihren Distributionskern

$$\frac{1}{(2\pi\mathbf{h})^n}\int_{R^n} e^{i(x-y,\,\xi)/\mathbf{h}}\, h\left(\kappa, \frac{x+y}{2}, \xi\right) d\xi$$

gegeben sind.

Für Spektralprojektoren $P_{\mathbf{h}}$ von solchen $H_{\mathbf{h}}$ ist bekannt , wie sich die Spur eines ψDOs A mit Symbol a beim Grenzübergang $\mathbf{h} \to 0$ verhält [H-R-M], [Ch2]: Ist der von h erzeugte Hamiltonsche Fluß ergodisch auf der Energiefläche, so gilt eine Aussage vom Typ:
$\frac{1}{\operatorname{tr} P_{\mathbf{h}}} \operatorname{tr} P_{\mathbf{h}} A \to_{\mathbf{h}\to 0} \langle a \rangle$. Dabei ist $\langle \cdot \rangle$ der Mittelwert über die Fläche.
Die Koeffizienten von dP sind nun aber im allgemeinen keine ψDOen. Für die Behandlung des Problems reicht es allerdings aus, PdPdP semiklassisch durch eine Form mit regulären Koeffizienten zu approximieren.

Die Lösung dieser Aufgabe folgt einer physikalisch motivierten Idee: i dP ist die Zusammenhangs-1-Form (eingeschränkt auf Schnitte) des adiabatischen Zusammenhangs, also der Hamiltonsche Erzeuger einer Transformation, welche die Fasern des adiabatischen Vektorbündels unitär aufeinander abbildet [K2, § II.4].
Das klassische Analogon dieses Bündels ist die Vereinigung über κ der Energieflächen von h(κ) mit konstantem Phasenraumvolumen, bei integrablen Systemem: der Tori konstanter Wirkungen. Wenn eine Hamiltonsch erzeugte Transformation existiert, die diese Flächen symplektisch aufeinander abbildet, so ist die Quantisierung des Erzeugers (eine operatorwertige 1-Form mit regulären Koeffizienten) ein Kandidat für die semiklassische Approximation von i dP.

Für die klassische Mechanik führt die Frage nach einer derartigen Transformation zu einem Existenzproblem für eine globale, glatte Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf einer kompakten Teilmenge des R^{2n}.
Für integrable Systeme kann diese Existenzfrage geklärt werden. Weiterhin entwickeln wir einen differenzierbaren Funktionalkalkül für ψDOen, mit dessen Hilfe dann die geschilderte Idee durchgeführt werden kann.

Für $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{\operatorname{tr} P_{\mathbf{h}}} \operatorname{tr} P_{\mathbf{h}} dP_{\mathbf{h}} dP_{\mathbf{h}}$ erhalten wir eine geometrische Größe des klassischen Systems:
In integrablen Systemen ist eine Torusaktion gegeben, welche (wenn sie glatt in den Parametern ist) die Vereinigung der Tori konstanter Wirkungen zu einem Prinzipal-Torus-Bündel fasert und dazu dient, einen kanonischen Zusammenhang zu definieren [M], [Kn]. Unser Ergebnis für $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{\operatorname{tr} P_{\mathbf{h}}} \operatorname{tr} P_{\mathbf{h}} dP_{\mathbf{h}} dP_{\mathbf{h}}$ ist ein Ausdruck für die Krümmung dieses Zusammenhangs.

Diese geometrische Konstruktion ist die mathematische Präzisierung der Arbeiten von [H] und [B2], die dort angegebenen 2-Formen sind lokale Ausdrücke für die Krümmung.

Damit ist unser Ergebnis konsistent mit dem ebenfalls von Berry [B2] mit einer heuristischen Argumentation abgeleiteten: In einer lokalen Trivialisierung eines Linienbündels mit Eigenfunktionen ψ gilt: $(ch) = \langle d\psi, d\psi \rangle$; für WKB-Funktionen ψ^{WKB}, also approximative Eigenfunktionen, gelang es ihm abzuleiten:

$\frac{\mathbf{h}}{i} \langle d\psi^{WKB}, d\psi^{WKB} \rangle \rightarrow_{\mathbf{h}\rightarrow 0}$ (klassiche Berry 2-Form).

Bei Berrys Zugang war allerdings die zugrundeliegende Geometrie unklar. Einer mathematisch strengen Realisierung des Ansatzes stand entgegen, daß sich über den Abstand der Quasimoden zu den wirklichen Eigenfunktionen, zumindest für $n > 1$, wenig aussagen läßt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: in Abschnitt 1 geben wir Eigenschaften des Quanten–systems an und präzisieren die Strategie; Abschnitt 2 enthält technische Hilfsmittel: den Funktionalkalkül und die Lösung der klassischen Gleichungen; in Abschnitt 3 wird PdPdP regularisiert und der semiklassische Grenzübergang durchgeführt; Abschnitt 4 beinhaltet eine asymptotische Entwicklung in $\mathbf{h}$ von (ch), diese ist für Systeme von einem Freiheitsgrad möglich; in Abschnitt 5 schließlich folgen wir Ideen von [S-T] und betrachten eine "Ausschmierung" von (ch), die für sehr allgemeine Systeme eine asymptotische Entwicklung hat; im Anhang zeigen wir einige technische Hilfsaussagen.
Für die Aussagen in den Abschnitten 1-3, 5 siehe auch [A].

Danken möchte ich M. Rossa für die Anfertigung des Manuskriptes; Prof. Dr. R. Seiler für den Hinweis auf die aktuelle und interessante Fragestellung; meinen Lehrern Prof. Dr. R. Seiler und Prof. Dr. R. Wüst für die Anregungen und die Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit.

1. Das Problem

Wir wollen das physikalisch motivierte Problem präzisieren und den Lösungsweg darstellen. Dazu wird zunächst unter geeigneten Annahmen an $\kappa \to h(\kappa)$ gezeigt:

Die quantisierten Operatoren $H(\kappa)$ sind selbstadjungiert für jeden Parameterwert κ, $\kappa \to H(\kappa)$ ist im Norm-Resolventen-Sinn differenzierbar, die Resolventen der $H(\kappa)$ sind asymptotisch in $\mathbf{h}$ in ψDOen entwickelbar.

Die Mannigfaltigkeit der Parameter modellieren wir durch eine Umgebung U_0 der Null in R^d, für den Phasenraum $T^* R^n$ wird der natürliche Isomorphismus zu R^{2n} benutzt.

Für eine positive stetige Funktion w auf R^{2n} bezeichne $S(w)$ die Menge

$$\{f \in C^\infty(R^{2n}),\ \|f\|_{w,\alpha} := \sup_{R^{2n}} |D^\alpha f/w| < \infty (\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n})\},$$

versehen mit den natürlichen Verknüpfungen und der durch die $\|\cdot\|_{w,\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n})$ erzeugten lokalkonvexen Topologie. $S(w)$ ist ein Fréchet-Raum [Hör, Kap 18.4].

Gibt es $C > 0$, $N \in N$ mit : $w(p) \le C\ w(q)\,(1 + |p-q|^2)^N$ $(p, q \in R^{2n})$, so ist für $a \in S(w)$, $\mathbf{h} \in (0, 1]$ durch

$$a(x, \mathbf{h}D)\,\psi(x) := \frac{1}{(2\pi\mathbf{h})^n} \int_{R^n} \int_{R^n} e^{i/\mathbf{h}\,((x-y),\,\xi)}\, a(\tfrac{x+y}{2}, \xi)\, \psi(y)dy\, d\xi$$

ein stetiger Operator auf dem Schwartzraum $s(R^n)$ mit Werten in $s(R^n)$ definiert (c.f.: [Hör] und Satz A1(1)).

Ist $a(x, \mathbf{h}D)$ abschließbar als Operator auf $L^2(R^n)$, wird der Abschluß mit den Großbuchstaben $A_\mathbf{h}$ bezeichnet (analog bezeichnet ein kleiner Buchstabe immer das Symbol, ein großer den Abschluß des Weyl-Operators).

Die Abhängigkeit von $\mathbf{h}$ werden wir oft nicht explizit notieren.

Für $n, d \in N$, U_0 1 R^d offene Nullumgebung in R^d sei das klassische System durch eine parameterabhängige Hamiltonfunktion $h : U_0 \times R^{2n} \to R$ beschrieben.

Die ersten Hypothesen sind:

(H1):

(1) $h(\kappa) \in C^\infty(R^{2n})$ $(\kappa \in U_0)$,

(2) $h(0, p) \geq \gamma$ $(\gamma > 0$ geeignet, $p \in R^{2n})$,

(3) Es gibt $C > 0, N \in N$ mit
$h(0, p) \leq C\ h(0, q)\ (1 + |p-q|^2)^N$ $(p, q \in R^{2n})$,

(4) $h \in C^1\left(U_0, S(h(0))\right)$,

(5) Es gibt ein $\gamma' > 0$ mit
$h(\kappa, p)/h(0, p) \geq \gamma'$ $(<\kappa, p> \in U_0 \wedge R^{2n})$.

Hierbei sind Einschränkungen einer Funktion, die durch das Festhalten von Variablen entstehen, sowie unterschiedlich interpretierte Abbildungen mit dem gleichen Namen bezeichnet. Dies werden wir auch im Folgenden tun, wenn die Bedeutung aus dem Kontext hervorgeht.

Aus einer geeigneten Parametrixkonstruktion lassen sich die Selbstadjungiertheit und die Differenzierbarkeit erschließen. Hier erweitern wir eine Arbeit von Helffer-Robert [H-R] auf die Abhängigkeit von äußeren Parametern. Wir geben die wichtigen Schritte an, technische Details der Konstruktion werden im Anhang ausgeführt.

Satz 1.1

Sei (H1) erfüllt. Dann ist für ein $\eta \in (0, 1), \mathbf{h} \in (0, \eta), \kappa \in U_0$
$h(\kappa)(x, \mathbf{h}D)$ wesentlich selbstadjungiert und:

$\forall_{\varepsilon>0}\ \ \exists_{\eta\in(0,1)}\ \ \forall_{\mathbf{h}<\eta}\ \ \forall_{z \in C\setminus[\gamma\gamma' - \varepsilon, \infty)}$

(1) $z \in \rho(H(\kappa))$ $(\kappa \in U_0)$ (* ρ – Resolventenmenge *);

(2) $(H(\cdot) - z)^{-1} \in C^1\left(U_0, B(L^2(R^n))\right)$;

(3) Für $j \in N_0$ und $N \in N_0$ gibt es $b_j(z) \in C^1(U_0, S(1))$,
$R_N(\mathbf{h}, z) \in C^1(U_0, B(L^2))$ uniform in $\mathbf{h} < \eta$ mit

$$(H - z)^{-1} = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j B_j(z) + \mathbf{h}^{N+1} R_N(\mathbf{h}, z) \text{ in } U_0 .$$

Beweis

$h(\kappa)(x, \mathbf{h}D)$ ist symmetrisch. Dies ist klar für $a(x, \mathbf{h}D)$ mit $a \in s(R^{2n}, R)$ und folgt für h mit Lokalisation (vgl. [Hör, Bemerkung nach 18.5.10]).
Mit Lemma A3 und der nachfolgenden Bemerkung gibt es b_j , δ_{N+1}, b_j^{lks}, δ_{N+1}^{lks} so , daß für $N \in N_0$:

$$(h - z)(x, \mathbf{h}D) \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\, b_j(z)(x, \mathbf{h}D) = 1 + \mathbf{h}^{N+1}\, \delta_{N+1}\, (\mathbf{h}, z)(x, \mathbf{h}D)$$

(♠)

$$\sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\, b_j^{lks}(z)(x, \mathbf{h}D)(h - z)(x, \mathbf{h}D) = 1 + \mathbf{h}^{N+1}\, \delta_{N+1}^{lks}\, (\mathbf{h}, z)(x, \mathbf{h}D)\,.$$

$\sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\, b_j^{lks}(z)(x, \mathbf{h}D)$, $\delta_{N+1}^{lks}(\mathbf{h}, z)(x, \mathbf{h}D)$ sind wegen A1(4) zu beschränkten Operatoren fortsetzbar. Die beiden Gleichungen gelten auch auf L^2 bzw. $D(H)$ für die Abschlüsse.
Insbesondere ist für $\mathbf{h}$ klein genug H surjektiv, also $h(x, \mathbf{h}D)$ wesentlich selbstadjungiert.

Nach A3, A1 gilt genauer: $\quad \|\Delta_{N+1}(z)\| = 0\left(\left(1 + \frac{|z|}{\text{dist}\,(z, [\gamma\,\gamma', \infty))}\right)^M\right)$
für ein $M \in N$. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ so, daß für $\mathbf{h} < \eta$:
$(-\infty, \gamma\,\gamma' - \varepsilon)$ 1 $\rho(H)$.

(1) ergibt sich dann aus der Selbstadjungiertheit.

(1) und die Gleichungen (♠) implizieren

$$(H - z)^{-1} = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\, B_j(z) - \mathbf{h}^{N+1}\, (H - z)^{-1}\, \Delta_{N+1}\, (z)\,.$$

Wegen A3 sind $b_j, \delta_{N+1} \in C^1\,(U_0, S(1))$ uniform in $\mathbf{h}$, nach A2(6) sind dann auch die zugehörigen Operatoren in $C^1\,(U_0, B(L^2))$.

Es bleibt noch die Differenzierbarkeit von $(H - z)^{-1}$ zu zeigen:
Für H^{-1} gilt:

$$H^{-1} = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\, B_j\, (1 + \mathbf{h}^{N+1}\, \Delta_{N+1})^{-1} \qquad\qquad (\mathbf{h} < \eta)\,.$$

Wegen

$$d(1 + \mathbf{h}^{N+1}\,\Delta_{N+1})^{-1} = -\,(1 + \mathbf{h}^{N+1}\,\Delta_{N+1})^{-1}\,\mathbf{h}^{N+1}\,(d\,\Delta_{N+1})\,(1 + \mathbf{h}^{N+1}\,\Delta_{N+1})^{-1}$$

ist H^{-1} in U_0 differenzierbar und $\sup_{\mathbf{h}<\eta} \|dH^{-1}(\kappa)\| < \infty \quad (\kappa \in U_0)$.

Für $z \in (C\backslash[\gamma\gamma' - \varepsilon, \infty))\backslash\{0\}$ gilt [K2, § IV.3]:

$$(H - z)^{-1} = -1/z - 1/z^2\,(H^{-1} - 1/z)^{-1} ,$$

also ist $d(H - z)^{-1} = 1/z^2\,(H^{-1} - 1/z)^{-1}\,dH^{-1}\,(H^{-1} - 1/z)^{-1}$ und (2) gilt für $\mathbf{h} < \eta$.

■

Bemerkung

Für Hamiltonfunktionen der Form

$$h(\kappa, <x, \xi>) = \sum_{j=0}^{N} (\xi_j - a_j(\kappa, x))^2 + V(\kappa, x)$$

implizieren die Bedingungen (H1) ein für alle $\kappa \in U_0$ gleiches Verhalten der Potentiale bei ∞, sind also für die Differenzierbarkeit nicht optimal. Allerdings ist für nicht positive V (wie etwa $V(\kappa, x) = x^2 + \kappa|x|^3$ mit $\kappa < 0$) die (wesentliche) Selbstadjungiertheit nicht mehr gewährleistet.

Wir präzisieren nun das Problem.

Mit der folgenden Hypothese spezialisieren wir uns auf integrable Systeme.

Für Funktionen h_ν $(\nu \in \{1, \ldots, n\})$, die (H1) genügen, fordern wir

(H2):

$$[(H_\lambda(\kappa) - z_\lambda)^{-1},\ (H_\nu(\kappa) - z_\nu)^{-1}] = 0 \quad \left(\kappa \in U_0,\ z_{\lambda(\nu)} \in \rho(H_{\lambda(\nu)}),\ \lambda, \nu \in \{1, \ldots, n\}\right).$$

Die "eigentliche" Hamiltonfunktion des Systems spielt im Folgenden die gleiche Rolle wie ihre Integrale und wird deshalb nicht ausgezeichnet.

Wir betrachten eine Folge von diskreten Werten des gemeinsamen Spektrums der H_ν, die mit $\mathbf{h} \to 0$ gegen einen festen klassischen Wert $E_0 \in R^n$ strebt, also $E^\nu_{\mathbf{h}} \in \sigma_d(H_\nu(0))$ (diskretes Spektrum) mit $\lim_{\mathbf{h}\to 0} <E^1_{\mathbf{h}}, \ldots, E^n_{\mathbf{h}}> = <E^1_0, \ldots, E^n_0>$.

(Ist h^{-1}(Intervall) kompakt, so ist in diesem Intervall nur diskretes Spektrums von H [H-R] .)

Wegen Satz 1.1 sind die Projektoren $P^{\mathbf{h}}_\nu(\kappa) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-E^{\mathbf{h}}_\nu|=r_{\mathbf{h}}} (H_\nu(\kappa) - z)^{-1} dz$ in einer Umgebung $U_{\mathbf{h}}$ der 0 differenzierbar. $P_{\mathbf{h}} := \prod_{\nu=1}^{n} P^{\mathbf{h}}_\nu$ ist wegen (H2) wieder ein Projektor.

Wir fragen nach dem Grenzverhalten von

$$\operatorname{tr} P_{\mathbf{h}} (dP_{\mathbf{h}})(dP_{\mathbf{h}}) \tag{ch}$$

an der Stelle $\kappa = 0$ für $\mathbf{h} \to 0$.

trPdP dP ist dabei die komplexwertige 2-Form $\sum_{j<k} \operatorname{tr}P[(\partial_j P), (\partial_k P)]\, d\kappa^j \wedge d\kappa^k$, die Differentiation wirkt nur auf den nachfolgenden Operator P.

Bemerkung

Wir beschränken uns auf den Punkt $\kappa = 0$, weil $P_{\mathbf{h}}$ a priori nur an der Stelle 0 für alle $\mathbf{h}$ differenzierbar ist. Können wir von $E_0(\kappa)$ und $E_{\mathbf{h}}(\kappa) \to_{h\to 0} E_0(\kappa)$ für jedes κ und in U_0 differenzierbaren P_ν ausgehen, so sind unsere Überlegungen über den Limes von (ch) punktweise in U_0 gültig.

Für $a \in S(1)$ ist der klassische Grenzwert von $\operatorname{tr} P_{\mathbf{h}} A_{\mathbf{h}}$ mit ψDO-Techniken behandelbar; dP hat im allgemeinen keine ψDOen als Koeffizienten, semiklassisch werden wir aber PdPdP in diesem Sinn regularisieren. Dazu drücken wir nun dP durch Objekte aus, die wir dann mit ψDO-Techniken behandeln können.

Für eine im uniformen Sinn differenzierbare Familie von selbstadjungierten Operatoren H und eine Familie von differenzierbaren Spektralprojektoren P gilt: $[dH, P] = [dP, H]$. Davon ausgehend werden wir nun das Problem der Regularisierung von dP auf das der Regularisierung einer Γ-Operation (*Umkehrung des Liouville Operators $[\,\cdot\,, H]$*) zurückführen.

Aufgrund der folgenden Beobachtung können wir uns darauf beschränken, mit Operatoren zu rechnen, die im uniformen Sinn differenzierbar sind.

<u>Lemma 1.2</u>

Sei H selbstadjungiert in einen Hilbertraum, A 1 $\sigma(H)$ durch einen Kreis K von $\sigma(H)\backslash A$ getrennt. Sei $f : R \to R$ meßbar und $f(A)$ von $f(\sigma(H)\backslash A)$ durch einen Kreis K_f getrennt. Dann gilt für den Projektor auf den Eigenraum zu A:

$$P(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_K (H - z)^{-1}\, dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_f} (f(H) - z)^{-1}\, dz\,.$$

<u>Beweis</u>

Der Spektralabbildungssatz [D-S, Th.XII.9] besagt

$$\sigma(f(H)) = \bigcap_{E(B)=1} f(B) \;1\; f(\sigma(H))\,.$$

(*E ist das Spektralmaß von H*)

Also: $\sigma\,(f(H))\backslash f(A)$ 1 $f(\sigma(H)\backslash A)$ und es gilt

$$\sup_{z\in\Gamma_f} \|(f(H) - z)^{-1}\| = \sup_z \left(1/\inf_{\lambda\in\sigma(H)} |f(\lambda) - z|\right) < \infty\,.$$

Für Vektoren φ, ψ:

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi, -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma(H)} (f(H) - z)^{-1}\, dz\, \psi\right) \\
&\qquad = -\frac{1}{2\pi i}\int_K \int_{\sigma(H)} (f(\lambda) - z)^{-1}\, d(E_\lambda\, \varphi, \psi)dz \\
&\qquad = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma(H)} \begin{cases} 1 & \lambda \in A \\ 0 & \lambda \in \sigma(H)\backslash A \end{cases} d(E_\lambda\, \varphi, \psi) \\
&\qquad = \left(\varphi, -\frac{1}{2\pi i}\int_K (H - z)^{-1}\, dz\, \psi\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist die Stetigkeit des Skalarprodukts und zweimal der Satz von Fubini verwendet worden.

■

Wir führen nun eine unserem Problem angepaßte Γ-Operation ein, die der später für das klassische System verwendeten entspricht. Es reicht hier, beschränkte Operatoren zu betrachten.

Sei g ein beschränkter Operator auf einen Hilbertraum, H selbstadjungiert und beschränkt, $g(t) := e^{iHt}\, g\, e^{-iHt}$.

Für $\varepsilon > 0$ konvergiert dann $\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\, g(t)\, dt$ im starken Sinn und ist beschränkt.

Existiert für g $\text{s-lim}_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\, g(t)\, dt$ und ist beschränkt, so wird definiert:

$$g \in D(\Gamma_H), \quad \Gamma_H\, g := \lim_{\varepsilon\to 0} i \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\, g(t)\, dt\,.$$

Γ ist die Umkehrung des Liouville-Operators:

<u>Lemma 1.3</u>

(1) Für $g \in D(\Gamma_H)$ gilt: $[\Gamma_H\, g, H] = g$.

(2) Für g beschränkt mit $\text{s-lim}_{\varepsilon\to 0}\, \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\, g(t)\, dt = 0$ gilt: $\Gamma_H\, [g, H] = g$.

<u>Beweis</u>

(1):
$$\frac{d}{dt}\, e^{iHt}\, i \int_0^\infty e^{-\varepsilon s}\, g(s)\, ds\, e^{-iHt} = \frac{d}{dt}\, e^{\varepsilon t}\, i \int_t^\infty e^{-\varepsilon s}\, g(s)\, ds$$
$$= \varepsilon\, e^{iHt}\, i \int_0^\infty e^{-\varepsilon s}\, g(s)\, ds\, e^{-iHt} - i\, g(t)$$

ist stark stetig und konvergiert gleichmäßig, also: $\frac{d}{dt}(\Gamma_H\, g)(t) = -ig(t)$.

Andererseits gilt:

$$\frac{d}{dt}(\Gamma_H\, g)(t) = i\,[H, \Gamma_H\, g](t)\,.$$

(2): folgt mit

$$\Gamma_H\,[g, H] \quad = \lim_{\varepsilon\to 0}\; - \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\,\frac{d}{dt}\,g(t)\,dt$$

$$= g - \lim_{\varepsilon\to 0}\;\varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\,g(t)\,dt\,.$$

■

Sei nun $H(\kappa)$ selbstadjungiert für $\kappa \in U_0$, $\kappa \to H(\kappa)$ im Norm-Resolventen-Sinn differenzierbar, $E \in \sigma_d\,(H(0))$, $P(\kappa)$ der Projektor auf die gestörten $E(\kappa)$. Weiter sei $f : R \to R$ meßbar und injektiv in $[\gamma\gamma\,'/2, \infty)$.
Aus Lemma 1.2 folgt dann für ein $r > 0$:

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|E-z|=r} (H - z)^{-1}\,dz$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|f(E)-z|=r} (f(H) - z)^{-1}\,dz.$$

Seien $Q := 1 - P$, $\hat{R}_f(z) := (f(H) - z)^{-1}\,Q \qquad (z \in \text{Umgebung}(E))$.

Wir können nun dP über die Γ-Operation darstellen:

<u>Lemma 1.4</u>

Sei $f(H)$ beschränkt und im uniformen Sinn in U_0 differenzierbar, dann gilt:

(1) Für ein beschränktes g ist $[g, P] \in D(\Gamma_{f(H)})$ und

$\Gamma_{f(H)}\,[g, P] = -\hat{R}_f\,(f(E))\,gP - Pg\hat{R}_f(f(E))$;

(2) $dP = \Gamma_{f(H)}\,[df(H), P]$.

(* Dabei ist $[df(H), P](e) := [df(H)(e), P] \quad (e \in R^d)$. *)

<u>Beweis</u>

(1): $e^{-\varepsilon t}\,[g, P](t) = e^{i(f(H)-f(E)+i\varepsilon)t}\quad QgP - PgQ\; e^{-i(f(H)-f(E)-i\varepsilon)t}$.

Analog wie im Beweis von Lemma 1.2 liefert der Spektralkalkül:

$$\bullet\int_0^\infty e^{\pm i(f(H)-f(E)\pm i\varepsilon)t}\, Q\, dt = \hat{R}_f\,(f(E)\bullet i\varepsilon)\ .$$

(2): Analog folgt wegen $dP = PdPQ + QdPP$:

$dP \in D(\Gamma_{f(H)})$ und mit Lemma 1.3(2), sowie $[df(H), P] = [dP, f(H)]$ auch

$dP = \Gamma_{f(H)}[df(H), P]$.

■

Daraus ergibt sich nun für die Regularisierung von dP für einen Spektralprojektor P :

dP = Regulär + Fehler impliziert : [df(H), P] = [Regulär, f(H)] + [Fehler, f(H)].

Andererseits gilt für [df(H), P] = [Regulär, f(H)] + Fehler mit Regulär, Fehler $\in D(\Gamma_{f(H)})$:

dP = Regulär + $\Gamma_{f(H)}$ Fehler.

In diesem Sinn ist das Problem der Regularisierung von dP äquivalent zur approximativen Lösung von [df(H), P] = [· , f(H)] durch etwas Reguläres.

Unser System ist algebraisch etwas komplizierter: $P = \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu$ mit Spektralprojektoren P_ν,

also

$$dP = \sum_{\nu=1}^{n} P_1 \ldots dP_\nu \ldots P_n\ .$$

Wir werden im Folgenden eine S(1)-wertige 1-Form m auf R^d und ein f angeben mit

$$P_1 \ldots \Big[\,[\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)], P_\nu\Big] \ldots P_n = P_1 \ldots [df(H_\nu), P_\nu] \ldots P_n + \text{Fehler} \qquad (*)$$

für alle ν. Es gilt dann $dP = [\frac{M}{i\mathbf{h}}, P]$ + Fehler und daraus wird sich die Lösung des Problems ergeben.

2. Differenzierbarer Funktionalkalkül und die klassischen Gleichungen

Wir werden die Differenzierbarkeit von Funktionen von selbstadjungierten Operatoren und ihre asymptotische Entwicklung in ψDOen zeigen und die zu $(*)$ korrespondierenden klassischen Gleichungen lösen.

Für den Funktionalkalkül wird die Arbeit von [H-R] erweitert; hinsichtlich technischer Aussagen verweisen wir wieder auf den Anhang.

Für $r \in R$ bezeichne S_r den durch

$$\{f \in C^{\infty}(R);\ \text{supp } f\ 1\ (0, \infty),\ \|f\|^{(k)} := \sup_{E \in R} |(1 + E)^{k-r} f^{(k)}(E)| < \infty \quad (k \in N_0)\}$$

definierten Fréchet-Raum.

Satz 2.1

Gelte (H1) für h, sei für $r < -2$ $f \in C^1(U_0, S_r)$. Es gilt dann:

(1) $f(\cdot, H(\cdot)) \in C^1(U_0, B(L^2))$;

(2) Für $j, N \in N_0$ gibt es $f_j \in C^1(U_0, S(1)), S_N(\mathbf{h}) \in C^1(U_0, B(L^2))$ uniform in $\mathbf{h}$ mit

$$f(\kappa, H(\kappa)) = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j F_j(\kappa) + \mathbf{h}^{N+1} S_N(\mathbf{h}, \kappa);$$

(3) $f_0(\kappa, p) = f(\kappa, h(\kappa, p))$, $f_1 \neq 0$, $df_j(x, \mathbf{h}D) = (df_j)(x, \mathbf{h}D)$.

Beweis

Der Beweis beruht auf der Identität

$$f(\kappa, H(\kappa)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho + iR} Mf(\kappa, s)\, H^{-s}(\kappa) ds \qquad (\rho \in (0, |r|)).$$

Dabei ist Mf die Mellintransformierte von f, das Integral als uneigentliches Riemann-Integral im schwachen Sinn aufzufassen. Die Identität folgt für die Erwartungswerte aus der Mellin-Inversionsformel und dem Satz von Fubini [H-R, Prop (1.1)].

(1): Für g aus A4(1) haben wir mit $\|Op\| = \sup_{\|\psi\|,\|\phi\|=1} |(\psi, Op\,\phi)|$:

$$\|f(\kappa+\eta, H(\kappa+\eta)) - f(\kappa, H(\kappa)) - \int_{\rho+iR} (H^{-s}(\kappa)\, dMf(\kappa, s)\eta + Mf(\kappa, s)\, dH^{-s}(\kappa)\eta) ds\|$$

$$\leq \|\int (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{g+2}(Mf(\kappa + \eta, s) - Mf(\kappa, s) - dM(\kappa, s)\eta) \cdot (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-2}$$

$$\cdot (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g} H^{-s}(\kappa)\; ds\|$$

$$+ \|\int (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{g+2} Mf(\kappa + \eta, s)\, (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-2}$$

$$\cdot (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g} (H^{-s}(\kappa + \eta) - H^{-s}(\kappa) - dH^{-s}(\kappa)\eta) ds\|$$

$$+ \|\int (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{g+2}(Mf(\kappa + \eta, s) - Mf(\kappa))\, (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-2}\, (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g}$$

$$dH^{-s}(\kappa)\eta\, ds\,\|$$

$$\leq \text{konst}\, \Big[\sup_s |(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{g+2}(Mf(\kappa + \eta, s) - Mf(\kappa, s) - dM(\kappa, s)\eta)|$$

$$\cdot \sup_s \|(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g} H^{-s}(\kappa)\|$$

$$+ \sup_s |(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{g+2} Mf(\kappa + \eta, s)|$$

$$\cdot \sup_s \|(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g}\; (H^{-s}(\kappa + \eta) - H^{-s}(\kappa) - dH^{-s}(\kappa)\eta\|$$

$$+ \sup_s |(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{g+2}(Mf(\kappa + \eta, s) - Mf(\kappa, s))|\; \sup_s \|(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g}$$

$$dH^{-s}(\kappa)\eta\|\Big]$$

$= o(\eta)_{\eta \to o}$ wegen A4(1), A5.

(2): Für d_j aus A4(2) ist $f_j(\kappa, p) := \int_{\rho+iR} Mf(\kappa, s)\, d_j(\kappa, s, p) ds$.

Argumentiert man wie in (1) für die Norm $\|\cdot\|_{1,\alpha}$, so folgt die Differenzierbarkeit der f_j.

Für $S_N(\mathbf{h}, \kappa) := \int_{\rho+iR} Mf(\kappa, s)\, T_N(\kappa, s) ds \quad (T_N$ aus (A4)(2))

kann man dann wie in (1) schließen.

(3): f_0, f_1 ergeben sich durch Ausrechnen ([H-R]), $df_j(x, \mathbf{h}D) = (df_j)(x, \mathbf{h}D)$ folgt aus A2(6).

■

Für das integrable System benötigen wir noch die asymptotische Entwickelbarkeit von $f(H_1, \ldots, H_n)$. Hier geht die Hypothese (H2) ganz wesentlich ein. Aus [Ch, Th. 3.3.5] übernehmen wir:

Satz 2.2

Seien (H1), (H2) erfüllt und $f \in C_0^\infty(R^n)$.
Für $\kappa \in U_0, j \in N_0$ existieren dann $f_j(\kappa) \in S(1)$ mit

$$f(H_1(\kappa), \ldots, H_n(\kappa)) = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j F_j(\kappa) + O(\mathbf{h}^{N+1});$$

$f_0(\kappa, p) = f(h_1(\kappa, p), \ldots, h_n(\kappa, p)) \quad (p \in R^{2n}), \quad f_1 \neq 0.$

Wir kommen nun zur Lösung der klassischen Gleichungen zu (∗). Nach dem Weyl-Kalkül (vgl. A1) ist das Symbol des ersten Terms in der asymptotischen Entwicklung eines Kommutators die Poissonklammer der Symbole. Die Aufgabe ist es also, eine S(1)-wertige 1-Form zu berechnen, welche

$$df(h_\gamma) = \{\,\cdot\,, f(h_\gamma)\} \quad \text{für } \gamma \in \{1, \ldots, n\}$$

für ein geeignetes f bis auf Terme löst, die sich auf Flächen konstanter Energie nicht ändern.

Wir werden nun zeigen, daß dieses System von PDGen eine glatte Lösung besitzt.

Bezeichne $h\colon U_0 \times R^{2n} \to R^n, h := \langle h_1, \ldots, h_n \rangle$.

Wir fordern

(H3):

Es gibt eine Umgebung $\widetilde{W}$ von E_0 so, daß für $\kappa \in U_0$ gilt:

$(d_p h_1, \ldots, d_p h_n)(\kappa)$ sind linear unabhängig in $\overset{-1}{h}_\kappa(\widetilde{W})$,
$h_\kappa\big|_{\overset{-1}{h}_\kappa(\widetilde{W})}$ ist eigentlich,

$$\overset{-1}{h}_\kappa(E_0) \text{ ist zusammenhängend.}$$

Nach dem Satz von Arnold [A-V], [A-M] gibt es dann zu $\kappa \in U_0$ eine kompakte Umgebung W von E_0 und einen Diffeomorphismus:

$$W \times T^n \to \overset{-1}{h}(W)\,.$$

Sei $V_\kappa := \overset{-1}{h}_\kappa(W)$.Wir nehmen weiter an, daß der Variablenwechsel zu Wirkungskoordinaten nicht degeneriert ist, es also zu $\kappa \in U_0$ einen Diffeomorphismus $\phi : W \to \phi(W)$ gibt so, daß (wenn wir mit π_γ den Fluß von $\phi_h \circ h(\kappa)$ bezeichnen) für den gemeinsamen Fluß $\pi(t, p) := \pi_1 \left(t_1, \pi_2(t_2, \dots, \pi_n(t_n, p)\right) \quad (t, p \in R^n \times V_\kappa)$ gilt:

$$\pi(t+\gamma, p) = \pi(t, p) \quad \left(\gamma \in Z^n,\ t \in R^n,\ p \in V_\kappa\right)$$
$$\pi(t, p) = q \quad \left(t \in T^n \text{ geeignet},\ p, q \in V_\kappa \text{ mit } h(p) = h(q)\right).$$

Für $f \in C^\infty(V_\kappa)$ sei dann der Mittelwert:

$$<f>(E) := \int_{T^n} f \circ \pi(t, p)dt \quad \left(E \in W,\ p \text{ mit } h(p) = E \text{ beliebig}\right).$$

Aus folgendem Lemma wird sich die Lösung der klassischen Gleichungen ergeben.

<u>Lemma 2.3</u>

Gelte (H1), (H2), (H3). Seien für $\kappa \in U_0$ $b_\mu(\kappa) \in C^\infty(V_\kappa)$ mit

$$<b_\mu(\kappa)> \neq 0,\ \{b_\mu(\kappa), \phi_\nu \circ h(\kappa)\} = \{b_\nu(\kappa), \phi_\mu \circ h(\kappa)\} \quad \left(\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}\right).$$

Dann gibt es $a(\kappa) \in C^\infty(V_\kappa)$ mit

$$\{a(\kappa), \phi_\mu \circ h(\kappa)\} = b_\mu(\kappa) \quad \left(\mu \in \{1, \dots, n\}\right).$$

<u>Beweis</u>

Sei $\omega \in R^n$ so, daß für ein $\sigma > 0$ gilt

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu k_\nu \right| \geq |k|^{-\sigma} \quad (k \in Z^n \setminus \{0\}) .$$

(* ω existiert nach einem Satz von Liouville.*)

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$a_\varepsilon(p) := - \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \left(\pi(\omega s, p)\right)\omega_\nu \, ds .$$

Dann ist $a_\varepsilon \in C^\infty(V)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\{a_\varepsilon, \phi_\mu \circ h\}(p) &= - \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} \sum_{\nu=1}^{n} \{b_\nu, \phi_\mu \circ h\} \circ \pi(\omega s, p)\omega_\nu \, ds \\
&= - \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} \sum_{\nu=1}^{n} \{b_\mu, \phi_\nu \circ h\} \circ \pi(\omega s, p)\omega_\nu \, ds \\
&= - \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} \frac{d}{ds} b_\mu \left(\pi(\omega s, p)\right) ds \qquad \text{(da die } \pi_\gamma \text{ kommutieren)} \\
&= b_\mu(p) - \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} b_\mu \left(\pi(\omega s, p)\right) ds .
\end{aligned}$$

Die uniforme Periodizität von π erlaubt es nun, zum Limes $\varepsilon \to 0$ überzugehen.

$$b_\mu \circ \pi(t, p) = \sum_{k \in Z^n \setminus \{0\}} \exp\left(2\pi i(k, t)\right)(b_\mu \circ \pi)^\wedge (k, p) \qquad (t \in R^n) ,$$

$$\sup_{p\in U} \mid |k|^{2\beta} D_p^\alpha (b_\mu \circ \pi)^\wedge (k,p) \mid \le \sup_{U,T^n} \mid -\Delta_t^\beta D_p^\alpha (b_\mu \circ \pi) \mid = \text{konst}$$

für $(\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}, \beta \in \mathbb{N}_0)$. Daraus folgt:

$$D_p^\alpha \int_0^\infty e^{-\varepsilon s}\, b_\mu\,(\pi(\omega s, p))ds = \sum_{k\in Z^n\setminus\{0\}} D_p^\alpha (b_\mu \circ \pi)^\wedge (k,p) \frac{1}{\varepsilon - i2\pi(k,\omega)} \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}) .$$

Die diophantische Bedingung an ω sichert die gleichmäßige Konvergenz und es gilt:

$$a := \lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon \in C^\infty (V) \;\; ; \quad D_p^\alpha a = \lim_{\varepsilon\to 0} D_p^\alpha a_\varepsilon .$$

■

Korollar 2.4

Für $\kappa \in U_0$ gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{m}(\kappa)$ von R^d nach $C^\infty(V_\kappa)$ mit

$$(\{\tilde{m}, h_\mu\} = dh_\mu - \langle dh_\mu\rangle \circ h)\big|_\kappa \quad \text{in } V_\kappa \text{ für alle } \mu .$$

(*Dabei ist $\{\tilde{m}, h_\mu\}(e) := \{\tilde{m}(e), h_\mu\}$ $(e \in R^d)$.*)

Beweis

Sei $b_\mu := \sum_{\lambda=1}^{n} (\partial_{E^\lambda} \phi_\mu) \circ h\,(dh_\lambda - \langle dh_\lambda\rangle \circ h)$.

b_μ nimmt Werte in $C^\infty(U)$ an, es gilt $\langle b_\mu\rangle \ne 0$ und

$$\begin{aligned}\{b_\mu, \phi_\nu \circ h\} &= \sum_{\lambda,\rho} \partial_{E^\lambda} \phi_\mu \circ h\; \partial_{E^\rho} \phi_\mu \circ h\; \{dh_\lambda, h_\rho\} \\ &= \sum_{\lambda,\rho} \partial_{E^\lambda} \phi_\mu \circ h\; \partial_{E^\rho} \phi_\mu \circ h\; \{dh_\rho, h_\lambda\} = \{b_\nu, \phi_\mu \circ h\}\end{aligned}$$

wegen $\{h_\lambda, h_\rho\} \ne 0$ in $U_0 \times R^{2n}$.

Die Behauptung ergibt sich durch Anwendung von Lemma 2.3 auf jede Komponente von b_μ und der Invertierbarkeit von $D_E\phi$.

■

3. Semiklassischer Limes

Wir werden nun für eine geeignete Funktion f die Gleichungen $(*)$ lösen und den klassischen Limes von $\operatorname{tr} PdPdP$ berechnen.

Wir können den Energienullpunkt verschieben und für ein $e_0 \in (0, \infty)$ annehmen:
$E_0 = \langle e_0, \dots, e_0 \rangle$, $W = [e_0 - \varepsilon, e_0 + \varepsilon] \wedge \dots \wedge [e_0 - \varepsilon, e_0 + \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$.
Wähle nun $f \in C_0^\infty(R)$: in $(\gamma\gamma'/2, \infty)$ monoton, $f' < 0$ in $(e_0 - \varepsilon, e_0 + \varepsilon)$.
Für $\eta > 0$ sei $\chi_\eta \in C^\infty(R)$ eine Abschneidefunktion mit
$\chi_\eta \neq 1$ in $(e_0 - \eta/2, e_0 + \eta/2)$, $\chi \neq 0$ in $R \setminus (e_0 - \eta, e_0 + \eta)$.

Die Lösung von $(*)$ ergibt sich nun aus

<u>Satz 3.1</u>
Sind (H1), (H2), (H3) erfüllt, dann existiert $\eta > 0$ und eine $C_0^\infty(R^{2n})$-wertige 1-Form m auf U_0 so, daß für $\nu \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

(1) $$\chi_\eta(h_1) \dots \chi_\eta(h_n) \{m, f(h_\nu)\} = \chi_\eta(h_1) \dots \chi_\eta(h_n) \big(df(h_\nu) - \langle df(h_\nu)\rangle \circ h\big) \text{ in } U_0 ;$$
(2) $$P_1 \dots [df(H_\nu), P_\nu] \dots P_n = P_1 \dots \Big[[\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)], P_\nu \Big] \dots P_n + P_1 \dots [0(\mathbf{h}^2), P_\nu] \dots P_n \text{ in } U_0 \text{ für } h \to 0.$$

<u>Beweis</u>

(1): Mit $\tilde{m}$ aus Korollar 2.4 sei $m(\kappa) := \chi_\varepsilon(h_1) \dots \chi_\varepsilon(h_n)\, \tilde{m}\big|_\kappa$ in V_κ, $m(\kappa) \neq 0$ in $R^{2n} \setminus V_\kappa$. $m(\kappa)$ nimmt dann Werte in $C_0^\infty(R^{2n})$ an.

Für $\eta < \varepsilon/2$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_\eta(h_1) \dots \chi_\eta(h_n) \{m, f(h_\nu)\} &= \chi_\eta(h_1) \dots \chi_\eta(h_n) f'(h_\nu) \{\tilde{m}, h_\nu\} \\ &= \chi_\eta(h_1) \dots \chi_\eta(h_n) f'(h_\nu) \big(dh_\nu - \langle dh_\nu\rangle \circ h\big) \\ &= \chi_\eta(h_1) \dots \chi_\eta(h_n) \big(df(h_\nu) - \langle df(h_\nu)\rangle \circ h\big). \end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{m}$ als beliebig auf R^{2n} fortgesetzt aufgefaßt.

(2): Für $\eta > 0, \nu \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$P_1 \ldots \left[[\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu), P_\nu \right] \ldots P_n$$
$$= P_1 \ldots P_{\nu-1} \Big(Q_\nu \big([\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu)\big)\; P_\nu$$
$$- P_\nu \big([\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu)\big)\; Q_\nu\Big)\, P_{\nu+1} \ldots P_n$$
$$= P_1 \ldots P_{\nu-1}\, Q_\nu\, \chi_\eta (H_1) \ldots \chi_\eta (H_{\nu-1}) \big([\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu)\big)$$
$$\cdot \chi_\eta (H_\nu) \ldots \chi_\eta (H_n)\, P_\nu \ldots P_n$$
$$- P_1 \ldots P_\nu\, \chi_\eta (H_1) \ldots \chi_\eta (H_\nu) \big([\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu)\big)$$
$$\cdot \chi_\eta (H_{\nu+1}) \ldots \chi_\eta (H_n)\, P_{\nu+1} \ldots P_n\,.$$

Beide Terme sind von quadratischer Ordnung. Wir zeigen dies für den ersten:
Satz 2.1 ergibt:

$$\begin{aligned} f(H_\nu) &= F_0 + \mathbf{h}^2 F_2 + 0(\mathbf{h}^3) \\ df(H_\nu) &= \overline{df_0(x,\ \mathbf{h}D)} + 0(\mathbf{h}^2) \\ \chi_\eta (H_\nu) &= \overline{\chi_\eta(h_\nu)(x,\ \mathbf{h}D)} + 0(\mathbf{h}^2) \end{aligned}$$

Bei der Rechnung können wir uns auf $s(R^n)$ einschränken, dort steht der Weyl-Kalkül (Satz A1) zur Verfügung.

Für $a_\nu \in S(1),\ B_\nu := a_\nu\,(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)$ gilt:

$$B_1 \ldots B_n = a_1 \ldots a_n\,(x, \mathbf{h}D) + \frac{i\mathbf{h}}{2}\Big(\sum_{j<k} \{a_j, a_k\} \prod_{j\neq\nu\neq k} a_\nu\Big)(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)\,.$$

Mit (1) und Satz 2.2 folgt:

$$\chi_\eta (H_1) \ldots \chi_\eta (H_{\nu-1}) \big([\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu)\big)\, \chi_\eta (H_\nu) \ldots \chi_\eta (H_n)$$
$$= \chi_\eta (H_1) \ldots \chi_\eta (H_{\nu-1}) \big((\{m, f(h_\nu)\} - df(h_\nu))\,(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)\big)$$
$$\cdot\, \chi_\eta (H_\nu) \ldots \chi_\eta (H_n)$$
$$= \chi_\eta (h_1) \ldots \chi_\eta (h_n) \big(\{m, f(h_\nu)\} - df(h_\nu)\big)\,(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}\,\tilde{0}_1(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)$$
$$= \chi_\eta (h_1) \ldots \chi_\eta (h_n) \langle df(h_\nu)\rangle \circ h(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}\,\tilde{0}_1(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)$$
$$= \chi_\eta (H_1) \ldots \chi_\eta (H_n) \langle df(h_\nu)\rangle (H) + \mathbf{h}\, 0_1(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)\,.$$

Das Symbol 0_1 besteht aus Termen in denen jeweils eine Poissonklammer mit wenigstens einem $\chi_\eta (h_\nu)$ enthalten ist. $0_1(x, \mathbf{h}D)$ "lebt" damit bis auf höhere Ordnung außerhalb des "Energietorus", genauer:

$$P_1 \ldots P_{\nu-1}\, Q_\nu \big([\tfrac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)] - df(H_\nu)\big)\; P_\nu \ldots P_n$$

$$
\begin{aligned}
&= P_1 \dots P_{\nu-1} Q_\nu \big(\mathbf{h}\, 0_1(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^2)\big) P_\nu \dots P_n \\
&= \mathbf{h}\, P_1 \dots P_{\nu-1} Q_\nu\, \chi_{\eta/2}(H_1) \dots \chi_{\eta/2}(H_{\nu-1})\, 0_1(x, \mathbf{h}D)\, \chi_{\eta/2}(H_\nu) \dots \\
&\qquad \cdot \chi_{\eta/2}(H_n) P_\nu \dots P_n \quad + P_1 \dots P_{\nu-1} Q_\nu\, 0(\mathbf{h}^2) P_\nu \dots P_n \\
&= P_1 \dots P_{\nu-1} Q_\nu\, 0(\mathbf{h}^2) P_\nu \dots P_n \,.
\end{aligned}
$$

Damit ist (2) gezeigt.

■

Wir wollen nun die Γ-Operation (vgl. Lemma 1.4) verwenden, um dP zu approximieren. Der Fehler wird durch den Abstand von $E_\mathbf{h}$ zum Restspektrum bestimmt. Wir benutzen Aussagen aus [Ch].
Das gemeinsame Spektrum der H_ν $(\nu \in \{1, \dots, n\})$ ist

$$
\sigma(H_1, \dots, H_n) := \Big\{ E \in R^n \,;\, \forall_{\varepsilon>0} \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu\big((E_\nu - \varepsilon, E_\nu + \varepsilon)\big) \neq 0 \Big\} \,.
$$

Ist $P \neq 0$, was wir natürlich annehmen, so ist $E_\mathbf{h} \in \sigma(H_1, \dots, H_n)$. [Ch, Th. 2] ergibt dann:

$$
\operatorname{dist}\big(E_\mathbf{h}, \sigma(H_1, \dots, H_n) \setminus \{E_\mathbf{h}\}\big) \geq c\, \mathbf{h} \quad (c > 0 \text{ geeignet}, \mathbf{h} \text{ klein}).
$$

Aus Satz 3.1 folgt dann

Satz 3.2

Seien (H1), (H2), (H3) erfüllt. Es gilt an der Stelle κ=0:

$$
dP = \Big[\frac{M}{i\mathbf{h}}, P\Big] + 0(\mathbf{h}) \qquad (\mathbf{h} \to 0).
$$

Beweis

Wir folgen den in Kapitel 1 beschriebenen Überlegungen.

$$
\begin{aligned}
dP &= \sum_{\nu=1}^{n} P_1 \dots dP_\nu \dots P_n \\
&= \sum P_1 \dots \Gamma_{f(H_\nu)} \big[df(H_\nu), P_\nu\big] \dots P_n \quad \text{(Lemma 1.4)} \\
&= \sum P_1 \dots \Gamma_{f(H_\nu)} \Big[\Big[\frac{M}{i\mathbf{h}}, f(H_\nu)\Big], P_\nu \Big] \dots P_n + \text{Fehler} \quad \text{(Satz 3.1)} \\
&= \sum P_1 \dots \Gamma_{f(H_\nu)} \Big[\Big[\frac{M}{i\mathbf{h}}, P_\nu\Big], f(H_\nu) \Big] \dots P_n + \text{Fehler} \\
&= \sum P_1 \dots \Big[\frac{M}{i\mathbf{h}}, P_\nu\Big] \dots P_n + \text{Fehler} \quad \big(\text{Lemma 1.3(2), 4(1)}\big)
\end{aligned}
$$

$$= [\frac{M}{i\mathbf{h}}, P] + \text{Fehler} .$$

Dabei ist

$$\text{Fehler} = \sum P_1 \ldots \Gamma_{f(H_\nu)} [0(\mathbf{h}^2), P_\nu] \ldots P_n .$$

Aus Lemma 1.4(1) folgt:

$$P_1 \ldots \Gamma_{f(H_\nu)} [0(\mathbf{h}^2), P_\nu] \ldots P_n$$

$$= - P_1 \ldots P_{\nu-1} \Big(\hat{R}_f (f_\nu (E_{\mathbf{h}}^\nu))\, 0(\mathbf{h}^2)\, P_\nu + P_\nu\, 0(\mathbf{h}^2)\, \hat{R}_f (f_\nu (E_{\mathbf{h}}^\nu))\Big) P_{\nu+1} \ldots P_n$$

$$= 0(\mathbf{h}) ,$$

also Fehler $= 0(\mathbf{h})$.

■

Das Problem des Limes von trPdPdP wird nun mit Satz 3.2 und folgendem Ergebnis über die Konzentration von Wellenfunktionen gelöst.

Satz 3.3 ([Ch 2, Th 2.4])

Seien (H1), (H2), (H3) erfüllt, sei $a \in S(1)$, $\psi_{\mathbf{h}} \in \text{Ran } P_{\mathbf{h}}(0)$, $\|\psi_{\mathbf{h}}\| = 1$. Es gilt:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \langle\psi_{\mathbf{h}}, A\, \psi_{\mathbf{h}}\rangle = \langle a\rangle (E_0) .$$

Der folgende Satz ist das Hauptresultat.

Satz 3.4

Seien (H1), (H2), (H3) erfüllt. An der Stelle $\kappa = 0$ gilt:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{\text{tr} P} \text{tr}\, PdPdP = \frac{1}{2} \langle\{m, m\}\rangle (E_0) .$$

(* Dabei ist $\frac{1}{2} \{m, m\} = \sum_{i<k} \{m_i, m_k\}\, d\kappa^i \wedge d\kappa^k$.*)

Beweis

Wir verwenden den Weyl-Kalkül, Satz 3.2, Satz 3.3.

tr PdPdP

$$= \operatorname{tr} P \left([\frac{M}{i\mathbf{h}}, P]\, [\frac{M}{i\mathbf{h}}, P] + 0(1) \right)$$
$$= -\frac{1}{\mathbf{h}^2} \operatorname{tr} P\,(MPMP - MPM - MMP + MPM) + \operatorname{tr}\left(P\, 0(1)\right)$$
$$= \frac{1}{\mathbf{h}^2} \operatorname{tr} PMM + \operatorname{tr}\left(P\, 0(1)\right) + 0 \text{ in Spur}$$
$$= \frac{i}{\mathbf{h}} \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(P\, \{m, m\}(x, \mathbf{h}D)\right) + \frac{1}{\mathbf{h}^2}\left(P\, 0(\mathbf{h}^3)\right) + \left(P\, 0(1)\right),$$

also: $$\frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{\operatorname{tr} P} \operatorname{tr} PdPdP = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tr} P} \operatorname{tr}\left(P\, \{m, m\}(x, \mathbf{h}D)\right) + 0(\mathbf{h}) .$$

■

Bemerkung

Wie bereits erwähnt, resultiert die Einschränkung auf den Punkt $\kappa = 0$ aus der a priori Differenzierbarkeit von P. Ist P in U_0 differenzierbar, $P(\kappa)$ der Projektor auf den gemeinsamen Eigenraum zu $E_{\mathbf{h}}(\kappa)$ mit $E_{\mathbf{h}}(\kappa) \to E_0(\kappa)$ in U_0, so gilt

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{\operatorname{tr} P(\kappa)} \operatorname{tr} PdPdP(\kappa) = \frac{1}{2} <\{m, m\}> \left(E_0(\kappa)\right) \quad (\kappa \in U_0) .$$

Eine detailierte Analyse des Eigenwertproblems zeigt sogar [Ch]: $\dim \operatorname{Ran} P \neq 1$.

Wir wollen nun zur Interpretation des Hauptergebnisses, Satz 3.2, den geometrischen Hintergrund zusammenfassen.
Ist $P(\cdot)$ in einer Mannigfaltigkeit K differenzierbar, so ist durch

$$B := \left\{<\kappa, \psi> \in K \times L^2(R^n);\ \psi \in \operatorname{Ran} P(\kappa)\right\},\ \pi(\kappa, \psi) := \kappa \ \ (<\kappa, \psi> \in B)$$

ein differenzierbares komplexes Vektorbündel über K gegeben. (∗ Die lokale Trivialität sieht man mit [K2, II (4.18)] ein. ∗)

Mit $Q := 1 - P$ ist in $K \times L^2$ durch

$$PdP + QdQ = d - \left[(dP), P\right]$$

ein natürlicher Zusammenhang gegeben, der auf B zu einem Zusammenhang
$\nabla = Pd = d - (dP)$ reduziert.
Die erste Chernklasse von B ist nach der Chern-Weil Theorie [M-S] mit Hilfe der Krümmung zu berechnen. Die Krümmung ist die operatorwertige 2-Form auf K:

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = \left[(XP), (YP)\right] = (dP)(dP)(X, Y) .$$

Die erste Chernklasse ist $\operatorname{tr} PdPdP$.

Die parallele Bewegung zu ∇ ist der wesentliche geometrische Anteil der adiabatischen Bewegung des quantenmechanischen Systems [K], [A-S-Y]. Wegen $\nabla = d - (dP)$ ist also $i(dP)$ der Hamiltonsche Erzeuger der parallelen Bewegung.
Die Geometrie des klassischen Systems sei grob wie folgt beschrieben (für Details vgl. [M] oder [Kn] für einen verwandten Zugang): Sind die "Wirkungen" $\phi_\nu \circ h$ glatt in $K \times R^{2n}$, so können sie so gewählt werden, daß $\langle d\phi_\nu \circ h\rangle \neq 0$ gilt.
Argumentiert man wie in Lemma 2.3, so findet man eine 1-Form m auf K mit glatten Koeffinzienten, $\langle m\rangle \neq 0$ und

$$\{m, \phi_\nu \circ h\} = d\phi_\nu \circ h \qquad \text{für alle } \nu .$$

Die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial \kappa^k} + X_{m_k}$ $(k \in \{1, \dots, d\})$, (X_{m_k}-Hamiltonsches Feld zu m_k) spannen die Distribution in $K \times R^{2n}$ auf, die man durch Mittelung der $\frac{\partial}{\partial \kappa^k}$ über die durch den gemeinsamen Fluß der $\phi_\nu \circ h$ definierte Torusaktion erhält. Diese projiziert auf einen Zusammenhang in dem Torusbündel über K

$$B_c = \{\langle\kappa, p\rangle \in K \times R^{2n};\ \ \phi(\kappa, p) = \text{konst}\}\ ;\ \ \pi(\kappa, p) := \kappa \quad (\langle\kappa, p\rangle \in B_c)\ .$$

m ist also der Hamiltonsche Erzeuger der zugehörigen parallelen Bewegung.
Ist P für alle $\mathbf{h}$ in U_0 differenzierbar, so impliziert Satz 3.2, daß $\frac{M}{i\mathbf{h}}$ bis auf einen quasi–klassischen Fehler eine Bewegung im "adiabatischen" Bündel des Quanten-Systems erzeugt. Genauer:
Sei $\gamma \in C^1([0, 1], U_0)$ und W die unitäre Lösung von

$$i\mathbf{h} \frac{d}{dt} W(t) = M(\gamma(t))\,(\dot\gamma(t))\, W(t)\ , \quad W(\gamma(0)) = \mathrm{Id}\ .$$

Aus

$$\begin{aligned} i\mathbf{h} \frac{d}{dt} &\big(P(\gamma(t))\, W(t) - W(t)\, (P(\gamma(0)))\big) \\ &= \big[M(\gamma(t))\, (\dot\gamma(t)), P(\gamma(t))\big]\, W(t) + i\mathbf{h}\,\big(P(\gamma(t))\, \dot W(t) - \dot W(t)\, P(\gamma(t))\big) + 0(\mathbf{h}) \\ &= M(\gamma(t))\, (\dot\gamma(t))\, \big(P(\gamma(t))\, W(t) - W(t)\, (P(\gamma(0)))\big) + 0(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

folgt dann:

$$P(\gamma(t))\, W(t) - W(t)\, P(0) = 0(\mathbf{h})\ .$$

In [M] ist gezeigt, daß $\frac{1}{2} \langle\{m, m\}\rangle$ die Krümmung des durch $\frac{\partial}{\partial \kappa} + X_m$ definierten Zusammenhangs ist.

Die Aussage von Satz 3.4 ist damit

$$\frac{\mathbf{h}}{i} \times \text{ mittlere Krümmung } \to_{\mathbf{h}\to 0} \text{ klassische Krümmung.}$$

Da weiter gezeigt werden kann (z.B. [M]), daß $\frac{1}{2}\langle\{m, m\}\rangle$ mit den von Berry [B2] und Hannay [H] angegebenen 2-Formen übereinstimmt, ist unser Resultat konsistent mit dem von Berry [B2] mit heuristischen Methoden abgeleiteten.

Einer Verallgemeinerung des Resultats auf Systeme mit ergodischen Eigenschaften stehen zwei Hindernisse im Weg:
Der Abstand von Eigenwerten ist im allgemeinen nicht linear, sondern nur polynomiell in **h**; die klassischen Gleichungen $df(h_\gamma) = \{\,\cdot\,, f(h_\gamma)\}$ (modulo Mittelwertbildung) haben im allgmeinen keine global glatte Lösung auf der Umgebung einer Energieschale.

Die erste Schwierigkeit kann allerdings durch eine genauere Approximation von dP beseitigt werden; dies wird ein Ergebnis der Überlegungen im nächsten Abschnitt sein.

4. Asymptotische Entwicklungen

Für Systeme mit einem Freiheitsgrad, n = 1, können wir die Ergebnisse des dritten Abschnitts verbessern.

Es gilt

Satz 4.1

Seien (H1), (H3) erfüllt, n = 1.
Für $j \in N_0$ existiert dann eine $C_0^\infty(R^2)$-wertige 1-Form m_j auf U_0 mit

$$\Big[\frac{1}{i\mathbf{h}}\Big[\sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j M_j,\ f(H)\Big], P\Big] = [df(H), P] + 0(\mathbf{h}^{N+1}) \qquad (N \in N),$$

punktweise in der Operatornorm.

Wir werden nun erst zwei Folgerungen angeben, dann Satz 4.1 beweisen.

Mit dem Beweis von Satz 3.2 ergibt sich aus Satz 4.1

Satz 4.2

Sind (H1), (H3) erfüllt, so gilt für $\kappa \in U_{\mathbf{h}}$, $N \in N$

$$dP(\kappa) = \Big[\frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j M_j, P\Big](\kappa) + 0(\mathbf{h}^N) .$$

Daraus folgt

Satz 4.3

Sind (H1), (H3) erfüllt, so gibt es für $j \in N_0$ eine 2-Form ω_j auf $U_{\mathbf{h}}$ mit

$$\frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{\mathrm{tr} P} \mathrm{tr}\, PdPdP(\kappa) = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j \omega_j(\kappa) + 0(\mathbf{h}^{N+1})$$

für $N \in N$, $\kappa \in U_{\mathbf{h}}$.

Beweis

Für $N \in N$ gilt mit Lemma 1.4

$$dPdP = -\frac{1}{\mathbf{h}^2}\Big[\sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j M_j, P\Big]\Big[\sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j M_j, P\Big] + 0(\mathbf{h}^{N-1}),$$

$$\mathrm{tr}\, PdPdP \quad = \frac{1}{\mathbf{h}^2}\, \mathrm{tr}\, P \sum_{j=0}^{N+1} \mathbf{h}^j \sum_{\substack{k+l=j\\ k\le N}} M_k\, M_l + \mathrm{tr}\, P\, 0(\mathbf{h}^{N-1}) .$$

Nach Satz A1 gibt es S(1)-wertige 2-Formen $n_{kl\nu}$ $(\nu \in N)$ mit

$$\mathrm{tr}\, PdPdP = \frac{1}{\mathbf{h}^2}\, \mathrm{tr}\, P \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{h}^j \sum_{\substack{k+l+\nu=j\\ \nu\ge 1}} N_{kl\nu} + \mathrm{tr}\, P\, 0(\mathbf{h}^{N-1})$$

also
$$\frac{1}{\mathrm{tr}\, P}\, \mathbf{h}\, \mathrm{tr}\, PdPdP = \frac{1}{\mathrm{tr}\, P}\, \mathrm{tr}\, P \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j \sum_{\substack{k+l+\nu=j+1\\ \nu\ge 1}} N_{kl\nu} + 0(\mathbf{h}^N) .$$

Für $\psi \in \mathrm{Ran}\, P$, $\|\psi\| = 1$, $a \in S(1)$ gibt es nach WKB-Theorie (c.f. [H-R-M, App.]) Funktionen a_j mit

$$<\psi, a\,\psi> = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j a_j + 0(\mathbf{h}^{N+1}) .$$

Damit ist dann

$$\frac{1}{\mathrm{tr}\, P}\, \mathbf{h}\, \mathrm{tr}\, PdPdP = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j w_j + 0(\mathbf{h}^N) \quad (N \in N)$$

mit geeigneten 2-Formen w_j, woraus die Behauptung für $N \in N_0$ folgt.

■

Die Idee für den Beweise von Satz 4.1 ist nun, für $j \in N_0$ S(1)-wertige 1-Formen m_j anzugeben, für die

$$\frac{1}{i\mathbf{h}}\Big[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{h}^j M_j, f(H)\Big] = df(H) + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{h}^j g_j\,(H) + 0(\mathbf{h}^{\infty})$$

in der Nähe der betrachten Energie gilt. f ist dabei wie in Abschnitt 3 gewählt, $g_j\,(H)$ sind noch zu bestimmende 1-Formen, deren Koeffizienten beschränkte Funktionen von H sind. Die Lösung der korrespondierenden klassischen Gleichungen liefert wieder Lemma 2.3:

Korollar 4.4

Für $\kappa \in U_0$ seien $b(\kappa) \in C^\infty(V_\kappa)$, $<b(\kappa)> \neq 0$. Es gilt:

(1) Es gibt lineare Abildungen $\tilde{m}(\kappa)$ von R^d nach $C^\infty(V_\kappa)$ mit

$$\{\tilde{m}, f(h)\} = b|_\kappa \quad \text{in } V_\kappa ;$$

(2) Es gibt $\eta > 0$ und eine $C_0^\infty(R^2)$-wertige 1-Form m auf U_0 mit

$$\chi_\eta(h)\,\{m, f(h)\} = \chi_\eta(h)\, b .$$

Beweis

(1): Lemma 2.3 auf $\partial_E \phi \circ h/f'(h) \cdot b$ angewendet gibt ein $\tilde{m}$ mit
$\{\tilde{m}, \phi(h)\} = \partial_E \phi \circ h/f'(h) \cdot b = \partial_E \phi \circ h\,\{\tilde{m}, h\}$, also $\{\tilde{m}, f(h)\} = b$.

(2): Mit ε wie in Abschnitt 3 sei $m(\kappa) := \chi_\varepsilon(h)\,\tilde{m}(\kappa)$ in V_κ, $m(\kappa) \neq 0$ in $R^2 \setminus V_\kappa$.
Für $\eta < \varepsilon/2$ ist dann $\chi_\eta(h)\,\{m, f(h)\} = \chi_\eta(h)\, b$.

■

Nun der

Beweis von Satz 4.1.

Für $a, b \in S(1)$ bezeichne $\Sigma_\nu(a, b)$ (resp.: $k_\nu(a, b)$) die in Satz (A1) durch

$$a\#b = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{h}^\nu \Sigma_\nu(a, b) + 0(\mathbf{h}^\infty) \ \left(\text{resp.}(a\#b - b\#a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{h}^\nu k_\nu(a, b) + 0(\mathbf{h}^\infty)\right) \quad \text{definierten}$$

S(1)-Funktionen.

Für ein $\eta > 0, l \in N_0$ lassen sich 1-Formen g_l auf U_0 mit Werten in $C_0^\infty(R)$ und wegen Korollar 4.4 1-Formen m_l mit Werten in $C_0^\infty(R^2)$ rekursiv definieren durch:

$$g_0(E) := -<df_0>(E) \qquad (E \in [E_0 - \eta, E_0 + \eta]),$$
$$\chi_\eta(h)\,\{m_0, f_0\} = \chi_\eta(h)\,(df_0 + g_0(h)) ;$$

$$g_l(E) := -<df_l>(E) - \sum_{\substack{j+n=l \\ n<l}} <g_{nj}>(E) + \sum_{\substack{j+k+\nu=l+1 \\ \nu\geq 1, j<l}} <-i\,k_\nu(m_j, f_k)>(E)$$

$$\chi_\eta(h)\,\{m_l, f_0\} \quad = \chi_\eta(h)\,\Big(df_l + \sum_{j+n=l} g_{nj} - \sum_{\substack{j+k+\nu=l+1\\ \nu\geq 1, j<l}} - i\,k_\nu\,(m_j, f_k)\Big)\,.$$

Ebenfalls mit g_l wird eine beliebige C_0^∞ (R)-Funktion bezeichnet, die mit dem so definierten g_l in der Nähe von E_0 übereinstimmt. g_{lj} und f_j sind durch Satz 2.1 definiert.

Für $N \in N_0$ erhalten wir mit einer Rechnung, in der Satz A1 und Satz 2.1 verwendet werden:

$$\chi_\eta(H)\,\frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l\,[M_l, f(H)]$$

$$= \chi_\eta(H)\,\Big(df(H) + \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l\, g_l(H)\Big) \tag{✦}$$

$$+ \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+k+\nu+\mu+\lambda=l+1\\ \nu\geq 1\\ \mu+\lambda\geq 1}} \Sigma_\lambda\,\big(\chi_{\eta\mu}, -\,i\,k_\nu(m_j, f_k)\big)\,(x, \mathbf{h}D)$$

$$- \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+\mu+\lambda=l\\ \mu+\lambda\geq 1}} \Sigma_\lambda\,\Big(\chi_{\eta\mu}, df_j + \sum_{k+n=j} g_{nk}\Big)\,(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^{N+1})\,.$$

Ausführlich:

$$\chi_\eta(H)\,\frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l\,[M_l, f(H)]$$

$$= \frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{j+k+\mu=l} \chi_{\eta\mu}\,(x, \mathbf{h}D)\,[M_j, F_k] + 0(\mathbf{h}^N)$$

$$= \frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=1}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+k+\mu+\nu+\lambda=l\\ \nu\geq 1}} \Sigma_\lambda\,\big(\chi_{\eta\mu}, k_\nu\,(m_j, f_k)\big)\,(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^N)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+k+\mu+\nu+\lambda=l+1\\ \nu\geq 1}} \Sigma_\lambda\,\big(\chi_{\eta\mu}, -\,i\,k_\nu\,(m_j, f_k)\big)\,(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^N)$$

$$= \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+k+\nu+\mu+\lambda=l+1\\ \nu\geq 1, \mu+\lambda\geq 1}} \Sigma_\lambda\,\big(\chi_{\eta\mu}, -\,i\,k_\nu\,(m_j, f_k)\big)\,(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^N)$$

$$+ \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{h}^l \chi_\eta(h) \{m_l, f(h)\} + \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{h}^l \chi_\eta(h) \sum_{\substack{j+k+\nu=l+1 \\ \nu\geq 1, j<l}} - i\, k_\nu\, (m_j, f_k)\, (x, \mathbf{h}D)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{h}^l \chi_\eta(h) \big(df_l + \sum_{j+n=l} g_{nj}\big)\, (x, \mathbf{h}D)$$

$$+ \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+k+\nu+\mu+\lambda=l+1 \\ \nu\geq 1, \mu+\lambda\geq 1}} \Sigma_\lambda \big(\chi_{\eta\mu}, - i\, k_\nu\, (m_j, f_k)\big)\, (x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^N)$$

Andererseits gilt:

$$\chi_\eta(H) \big(df(H) + \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^j g_l(H)\big)$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{j+\mu=l} \chi_{\eta\mu} \big(df_j + \sum_{k+n=j} g_{nk}\big)\, (x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^{N+1})$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{j+\mu+\lambda=l} \Sigma_\lambda \big(\chi_{\eta\mu}, df_j + \sum_{k+n=j} g_{nk}\big)\, (x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^{N+1})$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \chi_\eta(h) \big(df_l + \sum_{j+n=l} g_{nj}\big)\, (x, \mathbf{h}D)$$

$$+ \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{\substack{j+\mu+\lambda=l \\ \mu+\lambda\geq 1}} \Sigma_\lambda \big(\chi_{\eta\mu}, df_j + \sum_{k+n=j} g_{nk}\big) + 0(\mathbf{h}^{N+1}).$$

Damit ist (✦) gezeigt.

Nun ist

$$\Big[\frac{1}{i\mathbf{h}} [\sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l M_l, f(H)], P\Big] = Q \frac{1}{i\mathbf{h}} [\sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l M_l, f(H)]\, P - P \frac{1}{i\mathbf{h}} [\sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l M_l, f(H)]\, Q\,.$$

Wegen (✦) haben wir

$$P\, [\frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l M_l, f(H)]$$

$$= P\, \chi_\eta(H)\ \ [\frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l M_l, f(H)]$$

$$= P\big(df(H) + \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l g_l(H)\big) + 0(\mathbf{h}^{N+1})$$

$$+ P \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \Big\{ \sum_{\dots} \Sigma_\lambda \, (\chi_{\eta\mu}, -i\, k_\nu(m_j, f_n)) - \sum_{\dots} \Sigma_\lambda \, (\chi_{\eta\mu}, df_j + \Sigma g_{nk}) \Big\} (x, \mathbf{h}D)$$

Auch der dritte Term ist $0(\mathbf{h}^{N+1})$, da die Symbole in der Energie delokalisiert sind. Genauer:

$$\text{Dritter Term} = P\, \chi_{\eta/2}(H) \cdot \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \{ \dots \}_l$$

$$= P \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l \sum_{\rho+\zeta=l} \chi_{\eta/2\rho}(x, \mathbf{h}D) \{ \dots \}_\zeta + 0(\mathbf{h}^{N+1}) \,.$$

Nun ist aber für $a \in S(1)$:

$$\chi_{\eta/2\rho}(x, \mathbf{h}D)\, \Sigma_\lambda \, (\chi_{\eta\mu}, a)(x, \mathbf{h}D)$$

$$= \sum_{\xi=0}^{N} \mathbf{h}^\xi \, \Sigma_\xi \, (\chi_{\eta/2\rho}, \Sigma_\lambda(\chi_{\eta\mu}, a))(x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h}^{N+1})$$

$$= 0(\mathbf{h}^{N+1}) \quad \text{für } \lambda + \mu \geq 1,$$

da der Träger von $\chi_{\eta/2\rho}$ in $\overset{-1}{h}\,([E_0 - \eta/2, E_0 + \eta/2])$ liegt, wo $\Sigma_\lambda \, (\chi_{\eta\mu}, a) = 0$ für $\lambda + \mu \geq 1$ ist.

Damit haben wir nun:

$$P \Big[\frac{1}{i\mathbf{h}} \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l M_l, f(H)\Big] Q = Pdf(H)Q + 0(\mathbf{h}^{N+1}) \,.$$

Behandelt man den zweiten Term des Kommutators analog, so folgt die Behauptung.

■

Bemerkung

Zusammen mit den Überlegungen in Abschnitt 3 ergibt sich aus diesen Rechnungen: Für ein System von n Freiheitsgraden ist der klassische Grenzwert von tr PdPdP berechenbar, wenn gilt:

(1) Die klassische Gleichung hat eine glatte Lösung, d.h.: es gilt eine Korollar 4.4(2) entsprechende Aussage, wobei der Mittelwert über die Energieschale mit dem Liouville-Maß definiert ist,

(2) $\mathrm{dist}(E_\mathbf{h}, \sigma(H)\backslash E_\mathbf{h}) \geq c\, \mathbf{h}^M$ für eine ganze Zahl M,

(3) $\frac{1}{\mathrm{tr}P}\, \mathrm{tr}\, P A \to_{\mathbf{h}\to 0} \langle a \rangle$.

(1) impliziert dann nämlich eine zu 4.1 analoge Aussage und diese wiederum:

$$dP = \left[\frac{1}{i\mathbf{h}} M_N, P\right] + 0(\mathbf{h}^{N-M}),$$

woraus mit $N > M+1$ folgt:

$$\frac{\mathbf{h}}{i}\frac{1}{\mathrm{tr}P} \mathrm{tr}\, PdPdP = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{tr}P} \mathrm{tr}\, P\, \{m_0, m_0\}\;\; (x, \mathbf{h}D) + 0(\mathbf{h})\, .$$

(3) ist für eine gewisse Klasse von nicht-integrablen Systemen erfüllt [H-R-M, Th 1.3], und auch (2) ist eine physikalisch vernünftig Bedingung [B3].

Die auf integrable Systeme begrenzte Anwendbarkeit der bisherigen Überlegungen ergibt sich also allein aus der Tatsache, daß im allgemeinen ein glatte Lösung der Gleichung

$$\{\bullet, f(h)\} = b\, ,$$

also eine Hamiltonsch erzeugte klassisch-"adiabatische" Bewegung nicht existiert.

5. Allgemeine Systeme

Wir betrachten eine "ausgeschmierte" 2-Form und zeigen, daß diese eine asymptotische Entwicklung in **h** hat. Vergleiche dazu auch [S-T].
Dafür sind keine Annahmen über den klassischen Fluß oder die Existenz einer klassisch adiabatischen Bewegung nötig.

Sei $E_0 \in R^+$ eine klassische Energie, $E_1 < E_0 < E_2$.
Betrachte weiter $\chi_i \in C_0^\infty(R)$ $(i \in \{1, \dots, 4\})$ mit $\operatorname{supp} \chi_i \; 1 \; (E_1, E_2)$, $\chi_i \neq 1$ auf $[E_1 + \varepsilon, E_2 - \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$.

Dann gilt

<u>Satz 5.1</u>

Für h gelte (H1), für $\kappa \in U_0$ sei $h_\kappa^{-1}([E_1, E_2]) \; 1 \; R^{2n}$ kompakt.
Für $\kappa \in U_0$ sind dann die Koeffizienten von $\chi_1(H) d\chi_2(H) d\chi_3(H) \chi_4(H)(\kappa)$ aus der Spurklasse, für $j \in N$ existieren 2-Formen a_j auf U_0 mit Koeffizienten in $C_0^\infty(R^{2n})$ so, daß für $N \in N_0$

$$\mathbf{h}^n \operatorname{tr} \chi_1(H) d\chi_2(H) d\chi_3(H) \chi_4(H) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{h}^j \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} a_j + 0(\mathbf{h}^{N+1}) \,.$$

<u>Beweis</u>

Nach [Hör, Lemma 19.3.2 und den vorhergehenden Bemerkungen] gilt:

$$\mathbf{h}^n \, \| a(x, \mathbf{h}D) \|_{tr} \leq \text{konst} \sup_{\substack{\alpha, \beta \in N_0^{2n} \\ |\alpha| + |\beta| \leq N}} \| p \square^\alpha D^\beta a \|_{L^2(R^{2n})} \,;$$

für $a \in L^1$, $a(x, \mathbf{h}D)$ aus der Spurklasse:

$$\mathbf{h}^n \operatorname{tr} a(x, \mathbf{h}D) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^{2n}} a \,.$$

Sei $\chi \in C_0^\infty(R)$, $\operatorname{supp} \chi \; 1 \; (E_1, E_2)$, $\chi \neq 1$ auf $\operatorname{supp} \chi_1$.
Wegen [H-R, Prop 5.1] gilt

$$\mathbf{h}^n \, \|\chi(H)\|_{tr} = 0(1)$$

und für $\chi^i \in C_0^\infty(R^{2n}), R_{\chi_N}$ mit

$$\chi(H) \qquad = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j \chi^j(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}^{N+1} R_{\chi_N}$$

gilt $$\mathbf{h}^n \, \|R_{\chi_N}\|_{tr} = 0(1) \, .$$

Wegen Satz 2.1 und (A1) gibt es $C_0^\infty(R^{2n})$-wertige 2-Formen a_k mit

$$\chi_1(H)d\chi_2(H)d\chi_3(H)\chi_4(H) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k a_k(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}^{N+1} R_N \, .$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\chi_1(H)d\chi_2(H)d\chi_3(H)\chi_4(H) \\ &\qquad = \chi(H)\chi_1(H)d\chi_2(H)d\chi_3(H)\chi_4(H) \end{aligned}$$

sind die Koeffizienten aus der Spurklasse und

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\chi^j(x, \mathbf{h}D) \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k a_k(x, \mathbf{h}D) \\ &\qquad + \mathbf{h}^{N+1} (R_{\chi_N} \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k a_k(x, \mathbf{h}D) + \chi(H)R_N) \, . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathbf{h}^n \, \|R_{\chi_N} \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k a_k(x, \mathbf{h}D) + \chi(H)R_N\|_{tr} = 0(1) \, .$$

Die Symbole der expliziten Terme haben Träger in $\overset{-1}{h}((E_1, E_2))$ sind also insbesondere in $S(1, \frac{1}{1+p^2} \sum_{i=1}^{2n} dp^i \otimes dp^i =: g)$.

Mit dem Weyl-Kalkül (Satz A1) folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j \chi^j(x, \mathbf{h}D) \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k a_k(x, \mathbf{h}D) \\ &\qquad = \sum_{l=0}^{2N} \mathbf{h}^l \sum_{j+k=l} (\chi^j \# a_k)(x, \mathbf{h}D) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{2N+M} \mathbf{h}^l \sum_{j+k+\nu=l} \Sigma_\nu(\chi^j, a_k)(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}^{M+1} \sum_{l=0}^{2N} \mathbf{h}^l \sum_{j+k=l} r_{M+1}(\mathbf{h}, \chi^j, a_k)$$

$$= \sum_{l=0}^{2N+M} \mathbf{h}^l \chi(h) a_l(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}^{M+1} \sum_{l=0}^{2N} \mathbf{h}^l \sum_{j+k=l} r_{M+1}(\mathbf{h}, \chi^j, a_k)$$

$$= \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l a_l(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}^{N+1} R_N(\mathbf{h}) .$$

Wegen [H-R, Prop 5.3] ist $r_{M+1}(\mathbf{h}, \chi^j, a_k) \in S((1 + p^2)^{-M}, g)$, also gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}$: $\sup_p |(1 + p^2)^{M+\alpha/2} D^\alpha r_N(\mathbf{h}, p)| \leq$ konst unabhängig von $\mathbf{h}$. Damit ist $r_{M+1}(\mathbf{h}, \chi^j, a_k)$ in der Spurklasse, sofern M groß genug gewählt wird.
Damit ist auch $R_N(\mathbf{h})$ uniform in $\mathbf{h}$ aus der Spurklasse, also

$$\chi_1(H) d\chi_2(H) d\chi_3(H) \chi_4(H)$$
$$= \sum_{l=0}^{N} \mathbf{h}^l a_l(x, \mathbf{h}D) + \mathbf{h}^{N+1} 0(1) \qquad \text{in Spurnorm.}$$

■

<u>Bemerkung</u>

- Wählt man $\chi_1 = \ldots = \chi_4 = \chi$, so ist der führende Term der Entwicklung

$$\frac{\mathbf{h}}{i} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi^2(h) \frac{1}{2} \{d\chi(h), d\chi(h)\} .$$

- Für ein festes $\mathbf{h}$ kann χ so gewählt werden, daß die "ausgeschmierte" Form gleich tr PdPdP ist.
  Hält man χ fest und läßt $\mathbf{h}$ klein werden, so verliert tr $\chi(H)d\chi(H)d\chi(H)$ seine geometrische Bedeutung, ist insbesondere im allgemeinen nicht mehr geschlossen, nicht mehr ganzzahlig und hängt von der Wahl von χ ab.
  Allerdings besteht gewisses physikalisches Interesse an dieser Form.

- Die formale Aussage in Satz 5.1 ist im Wesentlichen ein Spezialfall der Aussage von Proposition 7-1 in [S-T]. Der Zugang dort unterscheidet sich von unserem in den folgenden Punkten:
  Die betrachteten Systeme sind durch elliptische Differential-Operatoren zweiter Ordnung
  auf einer kompakten Mannigfaltigkeit mit zusätzlichen Eichfeldern definiert.

Der Funktionalkalkül geht nicht von komplexen Potenzen der Hamiltonoperatoren aus, sondern basiert auf einer Parametrixkonstruktion der Fundamentallösung der Wellengleichung.
Die Parameterabhängigkeit der betrachteten Systeme wird nicht streng behandelt.

Anhang

Es werden einige, in den Kapiteln 1, 2 benötigte technische Hilfsmittel entwickelt.
Zunächst wird der semiklassische Parameter **h** in Hörmanders Weyl-Kalkül [Hör] eingebaut, dann die Differenzierbarkeit bezüglich äußeren Parametern untersucht. Wir benutzen Begriffe aus [Hör].
Für ein temperiertes Gewicht w (d.h.: es gibt $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ mit :

$w(p) \leq C\ w(q)\,(1 + |p-q|^2)^N \quad (p, q \in \mathbb{R}^{2n})$) und $a \in S(w)$, $\psi \in s(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$a(x, \mathbf{h}D)\,\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi\rangle}\, a\left(\tfrac{x+y}{2}, \mathbf{h}\xi\right) \psi(y)dy\, d\xi\,.$$

Definiere

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{h}}(x, \xi) &:= a(x, \mathbf{h}\xi), \\ w_{\mathbf{h}}(x, \xi) &:= w(x, \mathbf{h}\xi) && (\langle x, \xi\rangle \in \mathbb{R}^{2n}), \\ g_{\mathbf{h}}(q) &:= (dx^2 + \mathbf{h}^2 d\xi^2)(q, q) = q_x^2 + \mathbf{h}^2 q_\xi^2 && (q = \langle q_x, q_\xi\rangle \in \mathbb{R}^{2n}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sup_{\langle x, \xi\rangle \in \mathbb{R}^{2n}} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_{\mathbf{h}}(x, \xi)}{w_{\mathbf{h}}(x, \xi)\, g_{\mathbf{h}}(e_x)^{\alpha/2}\, g_{\mathbf{h}}(e_\xi)^{\beta/2}} \right| = \sup \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a}{w} \right|,$$

also $\|a\|_{w, \alpha} = \|a_{\mathbf{h}}\|_{w_{\mathbf{h}}, g_{\mathbf{h}}, \alpha}$ und $a_{\mathbf{h}} \in S(w_{\mathbf{h}}, g_{\mathbf{h}})$.

Wir wollen den Kalkül für diese Klasse benutzen.
$g_{\mathbf{h}}^\sigma$ und h sind durch

$$g_{\mathbf{h}}^\sigma(p) := \sup_q \left(|p_\xi \cdot q_x - p_x \cdot q_\xi|^2 / g_{\mathbf{h}}(q)\right) = \frac{1}{\mathbf{h}^2} p_x^2 + p_\xi^2\,,$$

$$h^2(p) := \sup_q\left(g_{\mathbf{h}}(q)/\, g_{\mathbf{h}}^\sigma(q)\right) = \mathbf{h}^2 \qquad (p \in \mathbb{R}^{2n})$$

gegeben.

Die Voraussetzungen für Hörmanders Kalkül sind mit in **h** uniformen Konstanten erfüllt, denn

(1) $g_{\mathbf{h}}$ ist konstant also insbesondere σ temperiert für $\mathbf{h} \in (0, \infty)$,

(2) Für $\mathbf{h} \in (0, 1]$ ist $g_{\mathbf{h}} \leq g_{\mathbf{h}}^\sigma$. w ist temperiert, demnach $w_{\mathbf{h}}$ σ-$g_{\mathbf{h}}$ temperiert mit den Konstanten für w und $\mathbf{h} \in (0, 1]$.

Der Kalkül liefert den

Satz A1

Seien w_1, w_2 temperierte Gewichte und $a_i \in S(w_i)$. Es gilt:

(1) Für $\mathbf{h} \in (0, 1]$ ist die bilineare Abbildung

$$S(w) \times s(R^n) \to s(R^n)$$
$$<a, \psi> \to a(x, \mathbf{h}D)\psi$$

stetig;

(2) Für $\mathbf{h} \in (0, 1]$ gibt es eine bilineare stetige Abbildung

$$\#: \quad S(w_1) \times S(w_2) \to S(w_1\, w_2) \text{ mit}$$
$$a_1 \# a_2(x, \mathbf{h}D) \;= a_1(x, \mathbf{h}D)\, a_2(x, \mathbf{h}D)\,;$$

(3) Für $N \in N$, $\mathbf{h} \in (0, 1]$ ist die bilineare Abbildung r_N mit

$$r_N(a_1, a_2)(\mathbf{h}, <x, \xi>)$$
$$:= \frac{1}{\mathbf{h}^N}\left[a_1 \# a_2(\mathbf{h}, <x, \xi>) - \sum_{k<N} \frac{1}{k!}\left[\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)\right]^k a_1(x, \xi) a_2(y, \eta)\right]\Big|_{<x,\, \xi> = <y,\, \eta>}$$

stetig von $S(w_1) \times S(w_2)$ nach $S(w_1\, w_2)$. Die Konstanten sind uniform in $\mathbf{h}$;

(4) Für $a \in S(1)$ gibt es $C > 0, N \in N$ so, daß für $\mathbf{h} \in (0, 1]$ gilt

$$\|a(x, \mathbf{h}D)\psi\|_{L^2(R^n)} \le C\,(\sup_{|\alpha| \le N} \|a\|_{1,\alpha})\, \|\psi\|_{L^2(R^n)} \quad (\psi \in s(R^n))\,.$$

Beweis

(1): Für $\mathbf{h} \le 1$ liefert [Hör, Th. 18.5.10] die Aussage für $S(w_\mathbf{h}, g_\mathbf{h}) \times s(R^n) \to s(R^n), <a_\mathbf{h}, \psi> \to a_\mathbf{h}(x, D)\psi$.

(2), (3): Aus [Hör, Th. 18.5.4] und der Bemerkung nach Th. 18.5.10.

(4): Aus [Hör, Th. 18.6.3] für $a_\mathbf{h} \in S(1, g_\mathbf{h})$.

■

Über die Differenzierbarkeit des Kalküls machen wir nun folgende Aussage:

Satz A2

Seien w, w' temperiert, U_0 eine offene Nullumgebung in R^d, $g \in C^1(U_0, S(w))$,

$f \in C^1(U_0, S(w'))$. Dann gilt:

(1) $g(\cdot)(x, \mathbf{h}D)\psi \in C^1(U_0, s(R^n))(\psi \in s(R^n))$ und

$$d[g(\cdot)(x, \mathbf{h}D)\psi] = (dg)(\cdot)(x, \mathbf{h}D)\psi;$$

(2) $f \cdot g \in C^1(U_0, S(ww'))$, $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$;

(3) $f \# g \in C^1(U_0, S(ww'))$, $d(f \# g) = df \# g + f \# dg$;

(4) $r_N(f, g) \in C^1(U_0, S(ww'))$, $\sup_{\mathbf{h}} \|dr_N(f, g)\|_{ww',\alpha} < \text{const}$;

(5) wenn $|g(\kappa, p)/w(p)| > C$ $\quad$ ($C > 0$ geeignet, $\kappa \in U_0$, $p \in R^{2n}$),

dann $1/g \in C^1(U_0, S(1/w))$, $d\, 1/g = -\, 1/g^2\, dg$;

(6) für $w = 1$ ist

$$G(\cdot) \in C^1(U_0, B(L^2(R^n)), dG = \overline{(dg)(x, \mathbf{h}D)}\, .$$

Beweis

Die Abbildungen in (1) - (4) sind mit (A1) Kompositionen von stetigen, (bi-) linearen mit stetig differenzierbaren und als solche wieder stetig differenzierbar. Wir führen das für (1) und (2) aus.

(1): Für $\delta, \gamma \in N_0^n$ gibt es $N, M \in N$ mit

$$\|g(\kappa + \eta)(x, \mathbf{h}D)\psi - g(\kappa)(\kappa)\psi - dg(\kappa)(\eta)(x, \mathbf{h}D)\psi\|_{\delta, \gamma}$$
$$\leq \text{konst}\, (\sup_{|\alpha| \leq N} \|g(\kappa + \eta) - g(\kappa) - dg(\kappa)(\eta)\|_{w, \alpha})\, (\sup_{|\xi|, |\zeta| \leq M} \|\psi\|_{\xi, \zeta})$$
$$= o(\eta) \quad (\eta \to o)\, .$$

Analog: $\quad \sup_{|y|=1} \|dg(\kappa + \eta)(y)(x, \mathbf{h}D)\psi - dg(\kappa)(y)(x, \mathbf{h}D)\psi\|_{\delta, \gamma} = o(1) \quad (\eta \to o)$.

(2): Für $\alpha \in N_0^{2n}$ ist

$$\begin{aligned} \|fg\|_{ww', \alpha} &= \sup_{R^{2n}} |D^\alpha (fg)/ww'| \\ &= \sup \left| \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} C_{\alpha_1 \alpha_2} \quad (D^{\alpha_2} f\, D^{\alpha_1} g)/ww' \right| \\ &\leq \text{konst} \sup_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} (\|g\|_{w, \alpha_1}\, \|f\|_{w', \alpha_2})\, . \end{aligned}$$

Es gilt also die Produktregel:

$$\|f(\kappa + \eta)\, g(\kappa + \eta) - f(\kappa)\, g(\kappa) - df(\kappa)(\eta)\, g(\kappa) - f(\kappa)\, dg(\kappa)(\eta)\|_{ww', \alpha}$$
$$\leq \{\|[f(\kappa + \eta) - f(\kappa) - df(\kappa)(\eta)]g(\kappa)\|_{ww', \alpha}$$
$$+ \|f(\kappa + \eta)\, (g(\kappa + \eta) - g(\kappa) - dg(\kappa)(\eta))\|_{ww', \alpha}$$

$$+ \|(f(\kappa + \eta) - f(\kappa))\, dg(\kappa)(\eta)\|_{ww',\alpha} \Big\}$$
$$= o(\eta) \quad (\eta \to o)\,.$$

Die Stetigkeit der Ableitung folgt analog.

(5): $$\|1/g\|_{1/w,\,\alpha} = \sup \left| w \cdot \sum_{j \le |\alpha|} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_j=\alpha \\ \beta_j \ge 1}} \frac{(-1)^j}{g^{j+1}} D^{\beta_1} g \ldots D^{\beta_j} g \right|$$

$$\le \text{konst} \sum_{j \le |\alpha|} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots\beta_j=\alpha \\ \beta_j \ge 1}} \|1/g\|^{j+1}_{1/w,\,0} \|g\|_{w,\,\beta_1} \ldots \|g\|_{w,\,\beta_j} < \infty\,.$$

Dann folgt die Quotientenregel

$$\|1/g(\kappa + \eta) - 1/g(\kappa) + 1/g^2(\kappa) \cdot dg(\kappa)(\eta)\|_{1/w,\,\alpha}$$
$$\le \text{konst} \Big\{ \sup_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha} \|1/g(\kappa + \eta)\|_{1/w,\,\alpha_1} \|1/g(\kappa)\|_{1/w,\,\alpha_2} \|g(\kappa) - g(\kappa + \eta) + dg(\kappa)(\eta)\|_{w,\,\alpha_3}$$
$$+ \sup_{\alpha_1+\ldots+\alpha_4=\alpha} \|1/g(\kappa + \eta)\|_{1/w,\alpha_1} \|1/g^2(\kappa)\|_{1/w^2,\alpha_2} \|dg(\kappa)(\eta)\|_{w,\alpha_3} \|g(\kappa) - g(\kappa + \eta)\|_{w,\alpha_4} \Big\}$$
$$= o(\eta) \qquad (\eta \to o)\,.$$

Die Stetigkeit der Ableitung folgt aus der von $1/g^2$ und (2).

(6): Folgt aus (1) und A1(4).

■

Die nun folgende Konstruktion führt zu einer asymptotischen Entwicklung der Resolvente und weiteren Funktionen von H in ψDOen. Sie wurde von [H-R], [Se] angegeben, wir werden wieder die Differenzierbarkeit überprüfen.

Für $n \in N_0$ seien $b_n : U_0 \times C\backslash[\gamma\gamma', \infty) \times R^{2n} \to C$ rekursiv definert durch

$$b_0(\kappa, z, p) \quad := 1/h(\kappa, p) - z,$$

$$b_{k+1}(\kappa, z, p) := - b_0(\kappa, z, p) \sum_{\substack{j+L=k+1 \\ L \le k}} \frac{1}{j!} \left[\frac{i}{2}\, \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)\right]^j h(\kappa, <x, \xi>) b_L (\kappa, z, <y, \eta>)$$

an der Stelle $p = \langle x, \xi \rangle = \langle y, \eta \rangle$.

Wir müssen die Abhängigkeit von z kontrollieren, dazu einige Bezeichnungen:

$$d(z) := \text{Abstand}\big(z, [\gamma\gamma', \infty)\big),\ \tau(z) := 1 + \frac{|z|}{d(z)} \quad \big(z \in C\backslash[\gamma\gamma', \infty)\big) .$$

Für ein temperiertes Gewicht w, eine Familie $\{g_\alpha\}_{\alpha\in N_0^{2n}}$ von natürlichen Zahlen und eine Funktion $f : C\backslash[\gamma\gamma', \infty) \to S(w)$ sei

$$|||f|||_{w,\, g_\alpha} := \sup_z \big(\tau(z)^{-g_\alpha} \|f(z)\|_{w,\, \alpha}\big) .$$

Mit $S(w, \{g_\alpha\})$ bezeichnen wir dann den durch $\{f, |||f|||_{w,\, g_\alpha} < \infty \quad (\alpha \in N_0^{2n})\}$ definierten lokalkonvexen Raum. Es gilt:

Lemma A3

Gelte (H1) für h.

(1) Für $z \in C\backslash[\gamma\gamma', \infty), k \in N_0$ ist

$$b_k\,(z) \in C^1\big(U_0, S(1/h(0))\big) .$$

(2) Für $N \in N_0$ gibt es $\delta_N : (0, 1] \times U(\kappa_0) \times C\backslash[\gamma\gamma', \infty) \times R^{2n} \to C$ mit $\delta_N(\mathbf{h}, z) \in C^1\,(U_0, S(1))$ für $z \in C\backslash[\gamma\gamma', \infty)$ uniform in $\mathbf{h}$ und

$$(h(\kappa) - z)(x, \mathbf{h}D) \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k b_k(\kappa, z)(x, \mathbf{h}D) = 1 + \mathbf{h}^{N+1}\, \delta_{N+1}(\mathbf{h}, \kappa, z)(x, \mathbf{h}D) .$$

(3) Für $k \in N_0$ gibt es eine Familie $\{g_\alpha\}_{\alpha\in N_0^{2n}}$ in N_0 mit

$$b_k \in C^1\,(U_0, S(1/h_0, \{g_\alpha\}),$$
$$\delta_k \in C^1\big(U_0, S(1, \{g_\alpha\})\big) .$$

Beweis

(1): Für $s \in [\gamma\gamma', \infty), z \in C\backslash[\gamma\gamma', \infty)$ gilt

$$\frac{s}{|s-z|} \quad \le 1 + \frac{z}{d(z)} \qquad = \tau(z).$$

Wir haben dann $\frac{|h(\kappa)-z|}{h_0} \geq \gamma' \frac{|h(\kappa)-z|}{h(\kappa)} \geq \gamma'/\tau(z)$.

Die Behauptung folgt dann für b_0 aus (A2)(5).
Gilt sie für b_j mit $j \leq k$ dann mit (A2)(2) auch für b_{k+1}.

(2): Nach Konstruktion und wegen (A1)(2), (3):

$$(h - z)(x, \mathbf{h}D) \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k\, b_k\, (x, \mathbf{h}D)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k \sum_{j+L=k} \frac{1}{j!} [i/2\, \sigma\, (....)]^j\, (h - z) b_L \,|_{Diag}\, (x, \mathbf{h}D)$$
$$+ \mathbf{h}^{N+1} \sum_{L=0}^{N} r_{N+1-L}\, (h, b_L)(\mathbf{h})(x, \mathbf{h}D) = 1 + \mathbf{h}^{N+1}\, \delta_{N+1}(\mathbf{h})(x, \mathbf{h}D).$$

Die Differenzierbarkeit von δ_{N+1} ergibt sich aus (1) und (A2)(4).

(3): Aus der Rechnung zu (A2)(5) ergibt sich

$\|b_0(\kappa, z)\|_{1/h_0,\, \alpha} \leq \text{const}\, \tau(z)^{|\alpha|+1}$ uniform für κ in einem Kompaktum.

$|b_0(\kappa + \eta, z) - b_0(\kappa, z) + b_0^2(\kappa, z)\, dh(\kappa)\|_{1/h_0,\, \alpha} = \tau(z)^{|\alpha|+1}\; o(\eta) \quad (\eta \to o)$

mit o uniform in z.

Wie in A2(2) zeigt man
$f \in S(w, \{g_\alpha\}),\, g \in S(w, \{g'_\alpha\}) \Rightarrow fg \in S(w, \{g''_\alpha\})$.

Für differenzierbare f,g gilt die Produktregel. Induktiv folgt nun die Behauptung für alle b_k.

$\delta_N = \sum_{i=0}^{N-1} r_{N-i}\, (h - z, b_i) = \sum_{i=0}^{N-1} r_{N-i}\, (h, b_i)$. Die polynomielle Beschränktheit in τ ergibt sich aus der Bilinearität r_N: $S(h_0) \times S(1/h_0) \to S(1)$ und den Eigenschaften der b_k.

■

Bemerkung

(1) Die Konstruktion einer Linksparametrix $\sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k\, b_k^{lks}\, (x, \mathbf{h}D)$ geht analog; in der Definition sind $h - z$ und b_k zu vertauschen. Es gilt allerdings

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k b_k^{lks} (x, \mathbf{h}D)(h - z)(x, \mathbf{h}D) \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k b_k (x, \mathbf{h}D)$$

$$= \sum_{u=0}^{N} \mathbf{h}^k b_k^{lks}(x, \mathbf{h}D)\big(1 + \mathbf{h}^{N+1} \delta_{N+1} (x, \mathbf{h}D)\big)$$

$$= \big(1 + \mathbf{h}^{N+1} \delta_{N+1}^{lks} \; (x, \mathbf{h}D)\big) \sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k b_k (x, \mathbf{h}D)$$

also

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{h}^k (b_k^{lks} - b_k)(x, \mathbf{h}D) = 0(\mathbf{h}^{N+1}) \quad (h \to o)$$

im Sinne beschränkter Operatoren auf $L^2(R^n)$.

(2) Mit der Poissonklammer

$$\{a, b\} := \partial_x a \, \partial_\xi b - \partial_\xi a \, \partial_x b \text{ ist } b_1 = 1/(z - h) \cdot \{h, 1/h - z\} = 0.$$

Wir kommen nun zu der Differenzierbarkeit des Funktionalkalküls; dabei machen wir wieder von Ideen von [H-R] Gebrauch.

Zunächst wird die Differenzierbarkeit und asymptotische Entwickelbarkeit von H^{-s} gezeigt. Erfülle h die Hypothese (H1). Für $\theta \in (0, \pi/2)$ seien

$$K_{\theta,1}(t) := t\, e^{i\theta} \; (t \in [\gamma\gamma'/2, \infty)),\; K_{\theta,2}(t) := \gamma\gamma'/2\, e^{it\theta} \; \big(t \in [-1, 1]\big)$$

und die Kurve K_θ definiert durch: $K_\theta := - K_{\theta,1} - K_{\theta,2} + K_{\bar{\theta},1}$.

Dann ist für $\operatorname{Re} s > 0$

$$H^{-s} (\kappa) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\theta} z^{-s} \,(H(\kappa) - z)^{-1} \, dz.$$

Das Integral ist als uneigentliches Riemann–Integral im uniformen Sinn erklärt, die Gleichheit sieht man für die Erwartungswerte mit den Sätzen von Cauchy und Fubini ein.

Wir müssen die s-Abhängigkeit kontollieren, dazu einige Bezeichnungen. Sei ρ reell,

$f : \rho + iR \times R^{2n} \to C$ mit $f(s) \in S(1)$ für $s \in \rho + iR$.Für eine Familie natürlicher Zahlen $\{g_\alpha\}_{\alpha \in N_0^{2n}}$ sei

$$|||f|||_{\rho, w, g_\alpha} := \sup_{s \in \rho + iR} (1 + |\operatorname{Im} s|)^{-g_\alpha} \, \|f(s)\|_{w, \alpha} .$$

Mit $S_\rho(w, \{g_\alpha\})$ bezeichnen wir den durch $\{f, |||f|||_{\rho,\, w,\, g_\alpha} < \infty \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n})\}$ definierten lokalkonvexen Raum, für $g \in \mathrm{N}_0$ mit $B_{\rho,\, g}$ den durch

$$\{f : \rho + i\mathrm{R} \to B(L^2);\ \sup_s\ (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^{-g}\, \|f(s)\| < \infty\}$$

definierten normierten Raum.

Mit den b_j, R_N aus (A3), Satz 1.1 definieren wir

$$d_j(\kappa, s, p) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\theta} z^{-s}\, b_j(\kappa, z, p)\, dz,$$

$$T_N(\mathbf{h}, \kappa, s) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\theta} z^{-s}\, R_N\, (\mathbf{h}, \kappa, z)\, dz$$

und haben dann

Lemma A4

Sei $\rho > 2$, gelte (H1) für h. Dann gilt:

(1) Es gibt ein $g \in \mathrm{N}_0$ so, daß

$$\kappa \to H^{-\bullet}(\kappa) \in C^1\ (U_0, B_{\rho,\, g});$$

(2) Für $j, N \in \mathrm{N}_0$ gibt es $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{2n}}, g$ in N_0 mit

$$\kappa \to d_j\ (\kappa, \cdot\ ) \in C^1\ (U_0, S_\rho(1, \{g_\alpha\}),$$
$$\kappa \to T_N\ (\kappa, \cdot\ ) \in C^1\ (U_0, B_{\rho,\, g}) \text{ uniform in } \mathbf{h}$$

und

$$H^{-s}(\kappa) = \sum_{j=0}^{N} \mathbf{h}^j\, D_j\ (\kappa, s) + \mathbf{h}^{N+1}\, T_N\, (\mathbf{h}, \kappa, s)\ .$$

Beweis

Für $\theta \in (0, \pi/2)$, $\rho \in \mathrm{R}^+$, $L, M \in \mathrm{N}_0$, $M - \rho < -1$ gilt für $s \in \rho + i\mathrm{R}$

$$\int_{K_\theta} |z^{-s}\, z^M \left(\frac{|z|}{d(z)}\right)^L |\, dz \le \mathrm{konst}_\rho\, e^{\theta |\mathrm{Im}\, s|}\, (\theta + \left|\frac{1}{\sin\theta}\right|^L).$$

Dies folgt aus $d(z) \ge |\mathrm{Im}\, z|$ auf $K_{\theta,\, 1}$ und $d(z) \ge$ konst auf $K_{\theta,\, 2}$.

Mit der Wahl von $\theta_s = \begin{cases} 1 & |\mathrm{Im}\, s| \le 1 \\ 1/\mathrm{Im}\, s & |\mathrm{Im}\, s| > 1 \end{cases}$ gilt insbesondere

$$\int_{K_{\theta_s}} |z^{-s}\, z^M \left(\frac{|z|}{d(z)}\right)^L |\, dz \le \mathrm{konst}_\rho\, (1 + |\mathrm{Im}\, s|)^L$$

(1): Nach Satz 1.1 ist $(H(\cdot) - z)^{-1}$ differenzierbar und $d(H - z)^{-1} = 1/z^2\, (H^{-1} - 1/z)^{-1} dH^{-1} (H^{-1} - 1/z)^{-1}$. Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|H^{-1} - 1/z)^{-1}\| &= (\inf_{\zeta \in \sigma(H) \cup \{\infty\}} |1/\zeta - 1/z|)^{-1} \\ &= |z|\, \sup_\zeta \left|\frac{\zeta}{\xi - z}\right| \le \mathrm{const}\, |z|\, (1 + \frac{z}{d(z)}) = \mathrm{const}\, |z|\, \tau(z). \end{aligned}$$

Damit haben wir dann

$$\begin{aligned} &\|(H(\kappa + \eta) - z)^{-1} - (H(\kappa) - z)^{-1}\| \\ &\quad = \frac{1}{z^2} \|(H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1} - (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\| \\ &\quad \le \frac{1}{|z|^2} \|(H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1}\|\ \|H^{-1}(\kappa + \eta) - H^{-1}(\kappa)\|\ \|(H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\| \\ &\quad = o(1)\, (\tau(z))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|(H(\kappa + \eta) - z)^{-1} - (H(\kappa) - z)^{-1} - d(H - z)^{-1}(\kappa)\eta\| \\ &\quad \le \frac{1}{|z|^2} \| - (H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1} + (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1} \\ &\qquad + (H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1}\, dH^{-1}(\kappa)\eta\ (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\| \\ &\qquad + \frac{1}{|z|^2} (H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1} - (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\| \\ &\qquad \cdot \|dH^{-1}(\kappa)\eta\|\ \|(H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\| \\ &\quad = o(\eta)\, (\tau(z))^2 + |z|\, \tau(z)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|d(H - z)^{-1}(\kappa + \eta) - d(H - z)^{-1}(\kappa)\| \\ &\quad \le \frac{1}{|z|^2} \|\big((H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1} - (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\big)\, dH^{-1}(\kappa + \eta) \\ &\qquad (H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1}\| \\ &\qquad + \frac{1}{|z|^2} (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\, (dH^{-1}(\kappa + \eta) - dH^{-1}(\kappa))\, (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\| \\ &\qquad + \frac{1}{|z|^2} (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\, dH^{-1}(\kappa + \eta)\, (H^{-1}(\kappa + \eta) - 1/z)^{-1} \\ &\qquad - (H^{-1}(\kappa) - 1/z)^{-1}\big)\| \end{aligned}$$

$$= o(1)_{\eta\to o}\left(|z|(\tau(z))^3 + (\tau(z))^2 + |z|\,(\tau(z))^2\right).$$

In der Darstellung von H^{-s} ist die Wahl von $\theta \in (0, \pi/2)$ beliebig, wir können die Abschätzung für die Wahl von θ_s benutzen und erhalten für $\rho > 2$

$$\|H^{-s}(\kappa + \eta) - H^{-s}(\kappa) + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\theta} z^{-s}\, d(H - z)^{-1}(\kappa)\eta\, dz\|$$
$$= o(1)_{\eta\to o}\,(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^3,$$
$$\|dH^{-s}(\kappa + \eta) - dH^{-s}(\kappa)\|$$
$$= o(1)_{\eta\to o}\,(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^3.$$

(2): Die Aussage für die d_j folgt analog mit (A3)(3) und $h_0 \geq \gamma$.

$T_N(\kappa, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\theta} z^{-s}\,(H - z)^{-1}\,\delta_N(\kappa, s)(x, \mathbf{h}D)dz$ mit δ_N wie in (A3). Die Aussage folgt mit A3(3) und (1).

■

Bemerkung

Die Einschränkung $\rho > 2$ ergibt sich aus der Verwendung von

$$(H - z)^{-1} = -1/z - 1/z^2\,(H^{-1} - 1/z)^{-1} \quad (z \neq 0)$$

für die Abschätzung der Norm von $d(H - z)^{-1}$.

Für die expliziten Terme kommt man mit $\rho > 0$ aus, wie man sich mit dem Beweis von A3(3) klarmacht.

Für $H > 0$, $f \in S_r$ mit $r < 0$ gilt für $\rho \in (0, |r|)$ die Darstellung

$$f(\kappa, H) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho + iR} Mf(s)\, H^{-s}\, ds$$

als uneigentliches Riemann-Integral im schwachen Sinn. Dabei bezeichnet M die Mellintransformation

$$Mf(s) := \int_0^\infty E^{s-1}\, f(E)\, dE \quad (s \in \rho + iR).$$

Für den Beweis von Satz 2.1 müssen wir noch das Verhalten der Mellintransformierten und ihrer Ableitung für $f \in C^1(U_0, S_r)$ entlang Parallelen zur imaginären Achse kontrollieren.

Lemma A5

Ist $r < 0$, $f \in C^1(U_0, S_r)$, $0 < \rho < |r|$, so gilt für $k \in N_0$:

$$\sup_{s\in\zeta+iR} |(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^k\, Mf(\kappa, s)| < \infty \;,$$

$$\sup_s \Big|(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^k \Big(Mf(\kappa + \eta, s) - Mf(\kappa, s) - \int_0^\infty E^{s-1}\, df(\kappa, E)\eta\, dE\Big)\Big| = o(\eta)_{\eta\to o}.$$

<u>Beweis</u>

Für $j, k \in N_0$, $j \le k$ gibt es Zahlen C_{jk} mit

$$s^k E^{s-1} = (\partial_s\, s)^k E^{s-1} = \sum_{j=1}^{k} C_{jk}\, E^j\, \partial_E^j E^{s-1} \,.$$

Damit für $s \in \rho + iR$ und Zahlen d_{im} :

$$(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^k\, |Mf(\kappa, s)| \le \text{konst}\, |s^k\, Mf(\kappa, s)|$$

$$\le \text{konst} \sum_{j=1}^{k} C_{jk} \left| \int_0^\infty E^{s-1} \sum_{i+m=j} d_{im}\, (\partial_E^i E^j)\, \partial_E^m f(\kappa,\, E)\, dE \right|$$

$$\le \text{konst} \sum_j \sum_{i+m=j} C_{jk}\, d_{im}\, \|f(\kappa, \cdot\,)\|^{(m)} \int_{\alpha>0}^\infty E^{\rho-1}\, E^{j-i}\, E^{r-m}\, dE < \infty.$$

Genauso:

$$(1 + |\mathrm{Im}\, s|)^k\, \Big|Mf(\kappa + \eta, s) - Mf(\kappa, s) - \int_0^\infty E^{s-1}\, df(\kappa, E)\eta\, dE\Big|$$

$$\le \sum_{j,\; i+m=j} \text{konst}_{ijm}\, \|f(\kappa + \eta) - f(\kappa) - df(\kappa)\eta\|^{(m)} \int_{\alpha>0}^\infty E^{\rho-r-1}\, dE$$

$$= o(\eta)_{\eta\to o} \,.$$

■

Literatur

[A] Asch, J.:
On the semiclassical limit of Berry´s Phase, integrable systems
Comm. Math. Phys. 127, 637-651 (1990).

[A-M] Abraham, R., Marsden, J.E.:
Foundations of Mechanics
Benjamin/Cummings, Reading, 1978.

[A-V] Arnold, V.I., Avez, A.:
Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique
Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[A-S-Y] Avron, J.E., Seiler, R., Yaffe, L.G.:
Adiabatic Theorems and Applications to the Quantum Hall Effect
Commun. Math. Phys. 82, 33-49 (1987).

[B] Berry, M.V.:
Quantal phase factors accompanying adiabatic changes
Proc. R. Soc. Lond. A 392, 45-57 (1984).

[B2] Berry, M.V.:
Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase
J. Phys. A 18, 15-27 (1985).

[B3] Berry, M.V.:
Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion
Les Houches Lecture Notes, North-Holland 1983.

[Ch] Charbonnel, Anne-Marie:
Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent
Asymptotic Analysis 1, 227-261 (1988).

[Ch2] Charbonnel, Anne-Marie:

Comportement semi-classique des systèmes ergodiques
Preprint, Université de Nantes (1989).

[D-S] Dunford, N., Schwartz, J.T.
Linear Operators II
Interscience, New York, 1964.

[H] Hannay, J.H.:
Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian
J. Phys. A 18, 221-230 (1985).

[H-R] Helffer, B., Robert, D.:
Calcul fonctionelle par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles
J. Funct. Anal. 53, 246-268 (1983).

[H-M-R] Helffer, B., Martinez, A., Robert, D.:
Ergodicité et limite semi-classique
Comm. Math. Phys. 109, 313-326 (1987).

[Hör] Hörmander, L.:
The Analysis of Linear Partial Differential Operators III
Springer, Berlin, 1985.

[K] Kato, T.:
On the adiabatic theorem in quantum mechanics
J. Phys. Soc. Jpn 5, 435-439 (1950).

[K2] Kato, T.:
Perturbation Theory for Linear Operators
Springer, New York, 1984.

[Kn] Golin, S., Knauf, A., Marmi, S.:
The Hannay Angles: Geometry, Adiabaticity, and an Example
Comm. Math. Phys. 123, 95-122 (1989).

[M] Montgomery, R.:

The Connection Whose Holonomy is the Classical Adiabatic Angles of Hannay and Berry and its Generalizations to the Non-Integrable Case
Comm. Math. Phys. 120, 269-294 (1988).

[M-S] Milnor, J.W., Stasheff, J.D.:
Characteristic classes
Princeton, 1974.

[S-T] Schrader, R., Taylor, M.:
Semiclassical asymptotics, gauge fields, and quantum chaos
J. Funct.Anal. 83, 258-316 (1989).

[S] Simon, B.:
Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's phase
Phys. Rev. Lett. 51, 2167-2170 (1983).

[S-W] Shapere, A., Wilczek, F.:
Geometric phases in physics
World scientific, Singapore, 1989.

Glossar

n	Raumdimension
d	Anzahl der Parameter
$a(x, \mathbf{h}D)$, A	p. 4
$B(L^2(R^n))$	beschränkte Operatoren in $L^2(R^n)$
$C^1(U_0, F)$	stetig differenzierbare Funktionen von U_0 in einen Fréchetraum F
$C_0^\infty(R^n)$	Menge der beliebig oft stetig partiell differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger
$L^p(R^n)$	Lebesgue-Raum für $p \geq 1$
S_r	p. 13
$S(w)$	p. 4, auch [Hör, Ch. XVIII]
$s(R^n)$	Schwartzraum
U_0	offene Nullumgebung in R^d
$U_{\mathbf{h}}$	p. 8
N	Menge der natürlichen Zahlen
N_0	$N \cup \{0\}$
T^n	n Torus
$\sigma(H)$ $(\rho(H))$	Spektrum (Resolventenmenge) eines abgeschlossenen Operators
$\Vert \cdot \Vert$	Norm in L^2 oder $B(L^2)$
$\Vert \cdot \Vert_{\gamma,\delta}$	Halbnorm in s
$\Vert \cdot \Vert_{w,g,\alpha}$	Halbnorm in $S(w, g)$
$\Vert \cdot \Vert^{(k)}$	Halbnorm in S_r
$< \cdot >$	Mittelwert, p. 16
$< \cdot , \cdot >$	Skalarprodukt in L^2
$\{f, g\}$	Poissonklammer $\sum_{i=1}^{n} \partial_{x^i} f \, \partial_{\xi^i} g - \partial_{\xi^i} f \, \partial_{x^i} g$
tr A	Spur des Operators A in L^2
(* ... *)	Kommentar
$f\vert_K$	Einschränkung einer Funktion f auf die Menge K

Lebenslauf

1.8.59	geboren in Stadthagen
1966 – 69	Graf-Wilhelm Schule in Bückeburg
1969 – 78	Gymnasium Adolfinum in Bückeburg
Mai 78	Abitur
WS 78/79 – SS 85	Studium der Physik an der TU Berlin
SS 82 – SS 85	Studentische Hilfskraft mit Lehraufgaben am Fachbereich Mathematik, TU Berlin
November 85	Diplom-Hauptprüfung in Physik
WS 85/86	Lehrbeauftragter am FB Mathematik, TU Berlin
seit SS 86	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am FB Mathematik, TU Berlin