

# Tests classiques de la relativité générale

Poggiaspalla . G

le 16 juin 1999

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Relativité Restreinte</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Les Transformations de Lorentz . . . . .	2
1.3	L'espace-temps . . . . .	3
1.4	Temps propre . . . . .	4
1.5	Dynamique relativiste . . . . .	5
1.6	Le tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Relativité Générale</b>	<b>8</b>
2.1	Introduction . . . . .	8
2.2	Le principe d'équivalence . . . . .	8
2.3	Les équations du champs . . . . .	11
2.4	Lien avec la mécanique classique . . . . .	12
2.5	La mesure des durées . . . . .	15
<b>3</b>	<b>La solution de Schwarzschild</b>	<b>17</b>
3.1	Introduction . . . . .	17
3.2	Métrique isotrope . . . . .	17
3.3	La métrique de Schwarzschild . . . . .	18
3.4	La géométrie de Schwarzschild . . . . .	19
3.5	La singularité de Schwarzschild . . . . .	20
3.6	Equations du mouvement . . . . .	22
3.7	Etude qualitative des orbites . . . . .	27
3.8	Tests classiques . . . . .	30
3.8.1	Déflexion des rayons lumineux . . . . .	31
3.8.2	Précession du périhélie de Mercure . . . . .	33
3.8.3	Retard de Shapiro d'un écho radar . . . . .	35
3.9	Conclusion . . . . .	38
<b>A</b>	<b>Mouvement dans un potentiel central newtonnien</b>	<b>39</b>
<b>B</b>	<b>Propriétés du tenseur de courbure</b>	<b>42</b>
<b>C</b>	<b>Programmes Mathematica</b>	<b>44</b>

### **Résumé**

Dans ce document on se propose dans un premier temps de donner un aperçut de la théorie de la relativité générale. L'exposé de cette première partie sera succinct, l'ambition de ce document n'étant en aucune manière de se substituer aux ouvrages autrement plus riches et rigoureux cités en bibliographie, que le lecteur intéressé pourra toujours consulter avec profit. On trouvera par ailleurs exposée une des solutions des équations d'Einstein les plus fréquemment utilisées : la solution de Schwarzschild qui décrit un champs de gravitation à symétrie sphérique. On comparera cette solution "relativiste" à la solution newtonienne et on utilisera ces résultats pour les calculs de trois tests dit "classiques" de la théorie de la relativité générale pour lesquels on aura besoin de modéliser le champs de gravitation du soleil.

### **Abstract**

This document deals with three classical tests of the general theory of relativity. First some basic notions of special and general relativity will be introduced in the two first chapters. The last chapter will expose one of the most useful solution to Einstein equations : the Schwarzschild solution for static spherically symmetric spacetime. This solution is analogous to newtonnian motion in a spherically symmetric gravitational potential, classic and relativistic approach will be compared and these results will be used for the tests calculations.

# Chapitre 1

## Relativité Restreinte

### 1.1 Introduction

Au début du vingtième siècle deux grandes théories physique expliquent la quasi-totalité des phénomènes naturels avec une grande précision. La mécanique de Galilée-Newton obtient d'immenses succès en dynamique céleste ;alors que l'électrodynamique de Maxwell opère une des plus belle unification de la physique en expliquant avec un même système d'équations les lois de l'électricité, du magnétisme et de l'optique. Pourtant certain théoriciens remarquent une sorte de "dissymétrie" dans les lois de la nature, en effet, Galilée est le premier à remarquer que le mouvement (sous-entendu rectiligne uniforme) est "comme rien". C'est à dire qu'il existe dans la nature un certain type de référentiel privilégié, (en fait ceux qui sont non accéléré) qui sont indiscernables du point de vue dynamique (on pense par exemple à l'expérience de la chute d'une balle du haut d'un mat, que le bateau soit en mouvement uniforme ou au repos la balle chutera au pied du mat) ;ce sont les référentiels *Galiléen*. La mécanique de Newton est ainsi invariante par changement de référentiel Galiléen. On suppose pour simplifier que le mouvement se fait uniquement dans une direction que l'on appellera  $x$ , pour avoir les coordonnées dans un référentiel se déplaçant avec une vitesse constante  $v$ , les formules de changement de coordonnées galiléenne sont :

$$t' = t \quad x' = x - vt \quad (1.1)$$

On voit par exemple que la relation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.2)$$

Est invariante par un tel changement de coordonnées. Ce n'est pas le cas pour l'électrodynamique de Maxwell. On peut vérifier facilement que l'équation des ondes :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (1.3)$$

N'est pas invariante. Cet état de fait a conduit à l'hypothèse de l'éther, milieu omniprésent, support des ondes lumineuses. Il serait au repos et ce serait le seul milieu où les équations de Maxwell seraient strictement valables. Michelson en 1881 fait une expérience interférométrique dont les conséquences seront

considérables, il essaie de mettre en évidence la composition des vitesses de la lumière et de la terre tournant autour du soleil ( $\approx 30\text{Km/s}$ ). Il n'y eu pourtant pas de déplacement des raies sur sa figure d'interférences, la vitesse de la lumière restait constante et n'obéissait pas au lois de Newton de composition des vitesses. Plusieurs tentatives furent faites pour expliquer ce résultat, comme la contraction des longueurs , avancée par Fitzgerald et Lorentz mais aucune ne fut satisfaisante jusqu'à ce qu'en 1905 un article paraisse dans la prestigieuse revue "Annalen der Physik", écrit par un jeune inconnu : A.Einstein .

## 1.2 Les Transformations de Lorentz

Afin d'expliquer le résultat de l'expérience de Michelson, Lorentz et Poincaré avaient indépendemment proposé un autre type de changement de coordonnées entre référentiel galiléen qui porte désormais leurs noms. Mais les deux savants n'allèrent pas jusqu'au bout et considèrent leurs trouvailles comme de pur artifices mathématiques. Il revient à Albert Einstein d'en avoir su tirer toutes les conséquences physique. Einstein, dans son article fondateur "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement" fait deux postulats fondamentaux qui lui permettent de construire toute la relativité restreinte :

- La vitesse de la lumière dans le vide est invariante.
- Tout les référentiels Galiléen sont équivalents, les lois de la nature doivent y prendre les même formes.

A partir là, les lois de composition de vitesses bien connues ne peuvent plus étre valables, il faut d'autres lois de changement de référentiel , c'est ce que l'on appellera les transformations de Lorentz. Si on considère deux référentiels en mouvement uniforme à une vitesse constante  $v$  l'un par rapport à l'autre le long d'un axe commun, on posera :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.4)$$

Alors, si on néglige les axes passifs les transformations prennent la forme :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad ct' = \gamma(-\beta x + ct) \quad (1.5)$$

On ajoute le facteur  $c$  à la coordonnée  $t$  pour préserver l'homogénéité avec les autres axes qui sont homogènes à des longueurs. Sous forme matricielle elles ont la forme :

$$\Lambda(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta c \\ -\beta & c \end{pmatrix}$$

On remarque que le temps n'a plus le rôle privilégié qu'il avait en mécanique Newtonienne, deux évènements simultanés dans un référentiel ne le sont plus forcément dans un autre. On voit aussi que si  $v \ll c$  on à  $\gamma \rightarrow 1$  et qu'alors les transformations de Lorentz se réduisent aux transformations de Galilé. On peut aussi remarquer que ces nouvelles transformations laissent invariantes le d'alembertien de l'équation 1.3, en fait, les lois de l'électrodynamique sont toutes invariantes par Lorentz. Désormais, afin de d'alléger les formules et parce que cela ne nuit pas à la généralité des calculs, on choisit de fixer  $c = 1$  et d'identifier la vitesse d'"entraînement"  $v$  avec la vitesse normalisée  $\beta$ .

### 1.3 L'espace-temps

Puisque l'espace et le temps sont si intimement liés, on ne parlera plus dorénavant que d' "espace-temps", cet entité comportera en général trois dimensions spatiales plus une dimension temporelle. Les points de cet espace seront nommés les *événements*. Les trajectoires dans l'espace deviennent des courbes dans l'espace-temps que l'on appellera des *lignes d'univers*. On peut montrer que si  $(x,t)$  est un événement et si  $(x',t')$  est ce même événement vu d'un autre référentiel on à l'égalité :

$$t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (1.6)$$

On définira ainsi la *pseudo-norme de Minkowski* par la matrice :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Cette forme bilinéaire est non dégénérée mais elle n'est pas positive, et de plus un vecteur peut avoir une pseudo-norme nulle sans être nul lui-même. On dira qu'un événement est du genre espace si sa pseudo-norme est négative, du genre temps si elle est positive et du genre lumière si elle est nulle. Les transformation de Lorentz sont des isométries pour cette norme. On a coutume de représenter l'espace-temps (au moins en version bi-dimensionnelle) sur un diagramme de Minkowski avec un axe  $x$  pour l'espace et un axe  $ct$  pour le temps ( $ct$  pour être homogène avec une distance). Du fait de l'indépassabilité de la vitesse de la lumière, deux événements ne peuvent être joints par une ligne dont la pente est plus grande que 1. On nomme *cône de lumière* le cône engendré par la première bisectrice, tout les événements qui sont dans le cône peuvent avoir des relations de causalité ; pour cette raison l'extérieur du cône est noté "ailleurs". Les transformation de Lorentz sont des isométries, en fait on peut pousser l'analogie plus loin et dire que ce sont des rotations, il faudra alors utiliser les fonctions de trigonométrie hyperbolique. En effet une rotation dans l'espace de Minkowski peut s'écrire :

$$x' = x \cosh \alpha - t \sinh \alpha \quad t' = t \cosh \alpha - x \sinh \alpha \quad (1.8)$$

dont le déterminant est bien 1 :

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

Comme les cosinus et sinus hyperboliques peuvent s'exprimer en fonction de la tangente hyperbolique :

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}} \quad \sinh \alpha = \frac{\tanh \alpha}{\sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}} \quad (1.9)$$

La "rotation" devient alors :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}} (x - t \tanh \alpha)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \alpha}} (t - x \tanh \alpha) \quad (1.10)$$

Qui sont ni plus ni moins que les transformations de Lorentz si on identifie :

$$\tanh \alpha = v (\equiv \beta)$$

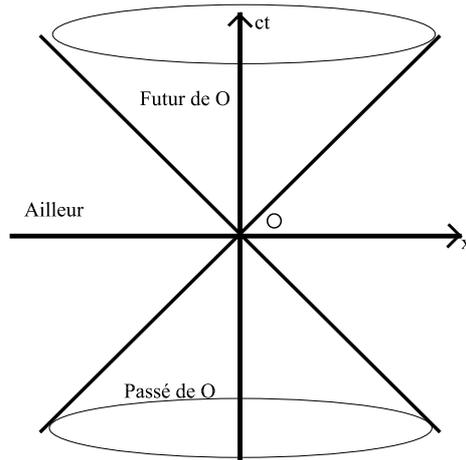


FIG. 1.1: Le cône de lumière

## 1.4 Temps propre

Si on considère des déplacements élémentaires  $d\vec{x}$  d'un objet le long de sa ligne d'univers, sa norme invariante est (en notation indicielle) :  $\eta_{ij} dx^i dx^j$ . Si on se place dans un référentiel  $R_0$  dans lequel l'objet est au repos alors on aura :

$$dt_0^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.11)$$

On appellera *temps propre* le temps mesuré dans un tel référentiel. On à, en utilisant les transformations de Lorentz :

$$(dt_0)^2 = \frac{1}{\gamma^2} (dt)^2 \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{1}{\gamma} \Delta t \quad (1.12)$$

On voit donc un effet de *ralentissement* des horloges dans des référentiels en mouvement par rapport à des référentiels fixes. Des vérifications expérimentales ont été faites de ce phénomène<sup>1</sup>. De manière analogue si on compare les mesures de longueur faites dans deux référentiels différents en mouvement relatif on a le phénomène de *contraction des longueurs*, toujours par les transformations de Lorentz :

$$L_0 = \gamma L \quad (1.13)$$

Où  $L_0$  est la longueur mesurée dans le référentiel où la règle est au repos, et  $L$  la longueur mesurée dans tout autre référentiel. Dans le cas général d'un espace à

<sup>1</sup>Expérience de Hafele et Keating 1971

trois dimensions, les longueurs sont toujours contractées dans le sens du mouvement, ce qui implique que les volumes et les angles sont eux aussi modifiés. Ce phénomène, aussi appelé contraction de Fitzgerald est d'autant plus intéressant qu'il nous amène à jeter un premier regard sur la géométrie non euclidienne. En effet, considérons un disque plan en rotation, si on mesure la longueur des rayons de ce disque, celle-ci n'est pas affectée par le mouvement puisque les rayons lui sont orthogonaux. Par contre si on mesure la circonférence du disque, on va mentalement increr le cercle dans un polygone dont chacun des côtés seront tangents à la circonférence. Le périmètre de ce polygone nous permettra d'avoir une approximation de la circonférence aussi bonne que souhaitée. Mais chacune de ces petites "règles" sont orientées dans le sens du mouvement donc sont affectées par la contraction de Fitzgerald, donc le périmètre du bord du disque sera plus petit que  $2\pi r$  si celui-ci est en mouvement que son périmètre au repos  $= 2\pi r$ . Ainsi, puisque la relation permettant de calculer le périmètre d'un cercle à partir de son rayon est fautive dès que le disque se met à tourner. La géométrie euclidienne n'est alors plus valable.

## 1.5 Dynamique relativiste

La nouvelle loi de changement de coordonnées induit une nouvelle cinématique, nouvelle loi de transformation des vitesses, des accélérations. Mais aussi une nouvelle dynamique puisque celle de Newton n'est plus invariante par changement de repère. Il faut en contruire une autre qui le soit et qui soit de plus compatible avec la mécanique classique au vitesses faibles devant celle de la lumière. Le but est donc de trouver de nouvelles "lois de la nature" sous la forme d'égalités entre vecteurs quadri-dimensionnel qui soit invariante sous transformation de Lorentz. On dira alors de cette équation qu'elle est sous forme *covariante*. On appellera un *quadri-vecteur* un vecteur quadri-dimensionnel qui se transforme comme des coordonnées d'espace-temps sous un changement de repère galiléen (pour plus d'informations on se reportera à [3]). On définit la quadri-vitesse comme :

$$\tilde{v} = (\gamma\vec{v}, \gamma)$$

et la quadri-impulsion par  $\tilde{p} = m_0\tilde{v}$  où  $m_0$  est la masse au repos ou masse propre de la particule, on a :  $\tilde{p} = (m_0\gamma\vec{v}, m_0\gamma)$  que l'on peut écrire comme  $p = (m\vec{v}, m)$ , la masse au repos est toujours plus petite que la masse d'une particule en mouvement :

$$m = \gamma m_0 \tag{1.14}$$

La quadri-impulsion se conserve comme son homologue classique. A la force classique correspond la quadri-force relativiste :

$$\tilde{F} = (\gamma\vec{F}, \gamma\vec{v}\cdot\vec{F})$$

et la relation fondamentale de la dynamique, formellement identique à celle de Newton met en jeu ces "quadri-quantités" :

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \tilde{F} \tag{1.15}$$

Ici  $\tau$  est le temps propre. Le concept d'énergie aussi subit d'intéressantes modifications. On définira l'énergie cinétique comme étant la quantité qui vérifie le

“théorème de l’énergie cinétique” classique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (1.16)$$

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si on prend le carré scalaire de la quadri-vitesse :

$$\tilde{v} \cdot \tilde{v} = \gamma^2 \vec{v} \cdot \vec{v} - \gamma^2 = \frac{1}{1-v^2} \cdot v^2 - \frac{1}{1-v^2} = -1$$

Ce qui implique que :

$$\frac{d\tilde{v} \cdot \tilde{v}}{dt} = \tilde{v} \cdot \frac{d\tilde{v}}{dt} = 0$$

en utilisant la définition de la quadri-vitesse :

$$\tilde{v} \cdot \frac{d\tilde{v}}{dt} = \gamma^2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - v_4 \frac{dv_4}{dt} = 0$$

Ainsi

$$\gamma^2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma \frac{d\gamma}{dt}$$

Ce qui permet d’écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} = m_0 \gamma \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma m_0}{dt}$$

En intégrant on obtient :

$$E_c = \gamma m_0 + cte$$

Comme par définition l’énergie cinétique doit être nulle quand la vitesse est nulle, on doit avoir :  $cte = -m_0$ , ainsi :

$$E_c = m - m_0 \quad (1.17)$$

Si on appelle “énergie totale” la somme de l’énergie cinétique et de l’énergie de repos on obtient :

$$E = m = m_0 \gamma \quad (1.18)$$

Si on fait un développement limité de  $E$  au second ordre en  $v$  on a :

$$E = m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + o(v^2)$$

On retrouve bien l’expression classique de l’énergie cinétique, mais en plus on a un terme supplémentaire qui ne dépend que de la masse, en réinsérant la constante  $c$  on a :

$$E = m_0 c^2 \quad (1.19)$$

Sans conteste l’équation la plus célèbre de la théorie de la relativité et peut-être de toute la physique. Tout corps a donc une énergie de repos qui est non nulle, et qui est même énorme à cause du facteur  $c^2$ . Cette équation, qui exprime l’équivalence entre la masse et l’énergie est à elle seule une véritable révolution conceptuelle, sa validité est expérimentée chaque jour par chacun, puisque environ 70 pour cent de l’électricité en France est nucléaire. Dans les réactions nucléaires c’est une fraction de la masse du noyau qui est convertie en énergie selon la loi ci-dessus. On “teste” donc d’une certaine manière la relativité chaque fois que l’on allume la télévision ou que l’on fait griller du pain.

## 1.6 Le tenseur d'énergie-impulsion

Ce tenseur décrit la distribution de masse-énergie et de mouvement dans l'espace-temps, il sera d'une grande importance en relativité générale. Ce tenseur noté  $T$  est une forme bilinéaire, il est défini par la propriété :  $T(\tilde{u}, \cdot) = T(\cdot, \tilde{u})$  est la densité d'énergie-impulsion par unité de volume (tridimensionnel), si  $\tilde{u}$  est la quadri-vitesse. Ainsi, si  $\tilde{n}$  un vecteur arbitraire normé alors  $T(\tilde{u}, \tilde{n})$  renvoie la "densité d'impulsion" dans la direction  $\tilde{n}$  et  $T(\tilde{u}, \tilde{u})$  est la densité de masse-énergie. Si la matière est modélisée comme un "fluide parfait" ce qui se fait souvent quand on considère la distribution de matière à des échelles astronomiques (nuage de gaz, intérieur des étoiles), de densité  $\rho$  et de pression  $p$  alors on a :

$$T = (p + \rho)\tilde{u} \otimes \tilde{u} + pg \quad (1.20)$$

ou bien

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}$$

On a en effet :

$$T_\beta^\alpha u^\beta = ((\rho + p)u^\alpha u_\beta + p\delta_\beta^\alpha)u^\beta = -(\rho + p)u^\alpha + pu^\alpha = -\rho u^\alpha$$

et aussi  $T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \rho$ . Les quantités représentées par ce tenseur se conservent comme la charge en électrodynamique, la forme de l'équation de conservation de  $T$  est la même que dans les cas usuels, elle provient toujours du théorème de Gauss :

$$\text{div } T = 0$$

Mais ici la divergence est, soit classique si on est en relativité restreinte où l'espace-temps est plat, soit "covariante" si l'espace-temps est courbé :

$$\nabla_\alpha T_\beta^\alpha = 0$$

Cette loi sera importante en relativité générale.

## Chapitre 2

# Relativité Générale

### 2.1 Introduction

Les limitations de la relativité restreinte sont apparues très tôt à Einstein, tout d'abord elle ne s'applique qu'à des référentiels inertiels mais surtout elle est incompatible avec la théorie de la gravitation de Newton. En relativité aucune interaction ne peut se propager plus vite que la lumière or la force de gravitation est censée agir instantanément sur deux corps distants. Pour étendre le principe de relativité aux transformations générales de coordonnées et pour trouver une description relativiste correcte de la force de gravitation A.Einstein a dut travailler dur d'à peu près 1907 à 1915 et franchir un pas conceptuel immense. Pendant deux ans de 1914 à 1915 il envoie une série d'articles à l'académie des sciences de Prusse dans lesquels il construit pas à pas sa nouvelle théorie. C'est finalement en 1916 que parait son article fondateur encore une fois dans *Annalen der Physik*<sup>1</sup>. La pierre de touche de sa "théorie de la relativité générale" est le principe d'équivalence.

### 2.2 Le principe d'équivalence

Le principe d'équivalence fut en substance découvert par Galilée, sa fameuse expérience du haut de la tour de Pise est une première démonstration de l'égalité qui surprendra des générations de physiciens entre la "masse inerte" et la "masse pesante". Cette expérience a été maintes fois refaite depuis, dans des tubes sous vide et cette égalité confirmée avec une grande précision<sup>2</sup>. C'est une surprise car ces deux quantités sont essentiellement différentes du point de vue de leurs sens physiques. L'une a un sens "inertiel", elle décrit comment le corps va réagir à une tentative pour le faire changer d'état de mouvement ; alors que l'autre a un sens purement gravitationnel, elle décrit comment le corps crée son propre champ gravifique et comment il réagit à un champ extérieur. C'est ce lien entre inertie et gravitation qui constitue la clef des équations de la relativité générale. Ce qui a guidé Einstein est une expérience de pensée un peu analogue à celle de Galilée. Supposons que nous soyons dans un ascenseur au dernier étage d'un très haut building, si soudain l'ascenseur se met à tomber, pendant

<sup>1</sup>*Annalen der Physik*, 49, 769 (1916).

<sup>2</sup>l'expérience de Roland von Eötvös confirme cette égalité à  $10^{-9}$  près.

la phase de chute libre nous allons flotter comme si nous étions en apesanteur et aucune des expériences physique que nous pourrions effectuer dans l'ascenseur ne pourra trahir la présence d'un champs gravitationnel. Donc localement, on a annulé les effets de la pesanteur, localement car si on fait des mesures sur une plus grande échelle le champs gravitationnel réel varie dans l'espace alors que la force d'inertie reste constante. Ainsi localement on a construit un référentiel galiléen. On en vient ainsi à une autre formulation du principe d'équivalence : *En tout point de l'espace temps il est possible de choisir un système de coordonnées "localement inertiel" qui soit tel que dans une région suffisamment petite les lois de la nature prennent la même forme que dans un référentiel Galiléen.* Par lois de la nature on entendra seulement lois du mouvement, (on peut choisir une formulation plus forte qui incluerait toutes les lois).

En relativité restreinte on se limitait à des changements de coordonnées galiléenne qui se traduisaient par des transformations linéaire appelées transformation de Lorentz. On considère maintenant des changements de référentiels généraux, qui peuvent donc êtres accélérés comme ceux utilisés dans le principe d'équivalence. Si une particule se meut dans un champs gravitationnel en décrivant une trajectoire  $x^\mu$ , on peut par le principe d'équivalence au moyen d'une transformation générale des coordonnées  $X^\alpha(x^\mu)$  réduire son mouvement à celui d'une chute libre :

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

où  $\tau$  est le temps propre, on peut écrire l'élément de longueur :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$$

comme les  $X^\alpha$  sont des fonctions de  $x^\mu$  on a par composition :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.1)$$

ou bien :

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\mu dx^\nu$$

De même l'équation de chute libre s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= 0 \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \end{aligned}$$

soit en définissant  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  par :

$$\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\lambda} \quad (2.2)$$

On obtient une équation du mouvement :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Qui est complètement analogue à une équation de géodésiques. On avait défini (equation 2.1) :

$$g_{\alpha\beta} = \frac{dX^\alpha}{dx^\mu} \frac{dX^\beta}{dx^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

En dérivant par rapport à  $x^\lambda$  on trouve :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{X^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

Ce qui donne par 2.2 :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta}$$

Par 2.3 :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}$$

On constate donc que :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 2g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$$

En multipliant par  $g^{\nu\sigma}$  on obtient finalement :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.4)$$

Toutes ces relations nous sont familières, elles apparaissent naturellement dans le cadre de la géométrie différentielle. On a donc une sorte de “triangle logique” dont les trois sommets sont la gravitation, les forces d’inertie et la géométrie, deux de ces sommets nous apparaissent comme logiquement connectés, reste une sorte de “chainon manquant”. C’est A.Einstein qui referma ce triangle logique 2.2, qui osa concevoir la force gravitationnelle comme une manifestation de la géométrie de l’espace-temps, idée fondamentale de théorie de la relativité générale. Une particule test soumise à une force d’origine purement gravitationnelle se meut comme si elle était libre mais se déplaçant dans un espace courbe, en décrivant des géodésiques de cet espace qui sont donc les trajectoires qui extrémalisent son temps propre. La courbure de l’espace étant provoquée par la présence de matière et d’énergie (qui sont d’ailleurs une seule et même chose par la relativité restreinte). La question de savoir précisément comment la distribution de masse et d’énergie modifie la structure de l’espace est l’objet des équations du champs.

Le principe d’équivalence aboutit à un autre principe, celui de la covariance générale. En substance il nous dit qu’une équation est valable dans un champs de gravitation général si elle vérifie les deux conditions :

- L’équation est valable en l’absence de gravitation, c’est à dire qu’elle obéit aux lois de la relativité restreinte si  $g = \eta$  le tenseur de Minkowski.
- L’équation préserve sa forme sous une transformation générale des coordonnées.

Le principe de covariance générale est aussi un principe d’invariance (ou de “démocratie”) entre référentiel comme le principe de relativité. C’est la relativité du mouvement uniforme étendue aux mouvements accélérés. Ce principe impose aussi de fortes contraintes sur la forme que peuvent prendre les lois de la nature, en fait pour être généralement covariantes elles doivent prendre la forme d’une égalité entre tenseurs de même ordre et de même variance.

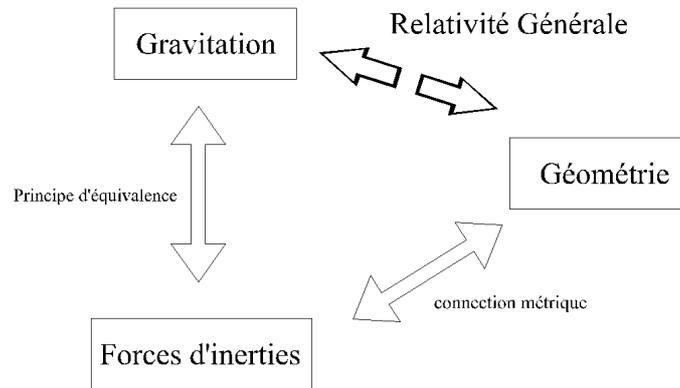


FIG. 2.1: Lien entre la gravitation et la géométrie

## 2.3 Les équations du champs

Le paragraphe précédent nous permet de faire les analogies suivantes :

	Mécanique classique	Relativité Générale
Potentiel	$\Phi$ (scalaire)	$g$ (tenseur)
Force	$-\nabla\Phi$ (vecteur)	$\Gamma$ (pseudo-tenseur)

Pour trouver les équations du champs il faudrait trouver une équation qui serait l'analogie de l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.5)$$

Ici le membre de gauche devra avoir un sens purement géométrique. Le membre de droite devra exprimer la distribution de matière et d'énergie, un candidat idéal est le tenseur d'énergie impulsion  $T_{\mu\nu}$ , l'équation devrait être de la forme :

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

Où  $k$  est une constante à déterminer. Les propriétés de  $T$  se répercutent donc sur  $G$ , ainsi  $G$  doit être un tenseur :

- d'ordre deux
- Symétrique
- à "divergence nulle" :  $\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$

Le tenseur géométrique le plus général que l'on puisse construire est le tenseur de Riemann, il est d'ordre quatre mais on ne peut générer essentiellement qu'un seul tenseur d'ordre deux à partir de ce tenseur de courbure, c'est le tenseur de Ricci, et un scalaire, le scalaire de courbure  $R$ . Le tenseur  $G$  devrait avoir la forme générale :

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R$$

C'est bien un tenseur d'ordre deux symétrique et l'identité de Bianchi nous indique que :

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = \left( \frac{C_1}{2} + C_2 \right) \nabla_\nu R$$

qui doit être nul donc, soit  $\nabla_\nu R = 0$  mais comme :

$$G_\mu^\mu = (C_1 + 4C_2)R = kT_\mu^\mu$$

on aurait :

$$\nabla_\nu R = \partial_\nu R = 0 \Rightarrow \nabla_\nu T_\mu^\mu = 0$$

Ce qui n'est pas toujours le cas (par exemple si le fluide est inhomogène). Donc forcément  $C_2 = -C_1/2$  et donc :

$$G_{\mu\nu} = C_1(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)$$

On peut donc tout réécrire sous la forme :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k'T_{\mu\nu}$$

Afin de déterminer la constante  $k'$  on doit passer à la limite non relativiste et connecter les deux théories.

## 2.4 Lien avec la mécanique classique

On se placera dans le cadre d'un champs faible et non dépendant du temps, alors on peut mettre en parallèle l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\Phi$$

avec l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad \mu, \nu, \lambda = 0 \dots 3 \quad \text{avec} \quad x^0 = t$$

On supposera la vitesse classique de la particule test très petite par rapport à  $c$  la vitesse de la lumière que l'on a posé comme étant l'unité. Comme on a par composition :

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

et que  $\frac{dx^i}{dt}$  est la vitesse classique de la particule on va négliger tous les termes de la somme qui la contiennent, il reste alors :

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \approx \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

Et l'équation des géodésiques devient :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Or

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} \underbrace{(g^{\mu\nu}(g_{\nu 0,0} + g_{0\nu,0} - g_{00,\nu}))}_{=0}$$

Puisque le champs est stationnaire. Et donc :

$$\Gamma_{00}^{\mu} = \frac{-1}{2} g^{\mu\nu} g_{00,\nu}$$

Puisque le champs est faible la métrique est quasi-minkowskienne, on pourra l'écrire comme :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

et  $\eta_{\alpha\beta}$  est la métrique de Minkowski. On pourra alors approximer  $g^{-1}$  par  $(\eta-h)$  en négligeant les termes du second ordre. Ainsi :

$$\Gamma_{00} = \frac{-1}{2} (\eta - h) \nabla g_{00} \approx \frac{-1}{2} \eta \nabla g_{00}$$

Or  $\eta \nabla g_{00} = \eta \nabla (\eta_{00} + h_{00}) = \eta \nabla h_{00} = \nabla h_{00}$  puisqu'en effet  $h_{00,0} = 0$  (champs stationnaire) et que la sous-matrice  $\eta_{ij}$  ( $i, j = 1 \dots 3$ ) est la matrice identité. Finalement l'équation des géodésiques devient :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h_{00,\mu} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Donc pour  $\mu = 0$  on a

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = C \quad (C \in \mathfrak{R})$$

Et alors :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = C^2 \frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2}$$

On écrit donc :

$$C^2 \frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} - \frac{C^2}{2} h_{00,\mu} = 0$$

C'est à dire :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad x = (x^1, x^2, x^3)$$

à comparer avec :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla \Phi$$

donc :

$$\frac{-1}{2} \nabla h_{00} = \nabla \Phi \Rightarrow h_{00} = -2\Phi + D \quad D \in \mathfrak{R}$$

Or  $h_{00}$  s'annule à l'infini pour que l'on ait bien  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ , il en est de même pour  $\Phi$  donc  $D$  doit être nulle. Donc enfin :

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\Phi \quad (2.6)$$

On va utiliser ces résultats pour déterminer complètement les équations du champs. Pour une distribution de matière fixe dans l'espace on a :

$$T_{00} \approx \rho$$

Or

$$\Delta g_{00} = -2\Delta \Phi$$

En combinant cela avec l'équation de Poisson (2.5) on obtient :

$$\Delta g_{00} = -8\pi G T_{00}$$

Il faut relier  $\Delta g_{00}$  avec  $G_{00}$ . Comme on a affaire à des champs faibles et statiques on considèrera encore  $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$  et on limitera le tenseur de courbure à sa partie linéaire cf B.1 :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\kappa\nu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\mu\nu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda})$$

donc, les dérivées temporelles éliminées donnent :

$$R_{i0j0} \approx \frac{1}{2}g_{00,ij} \quad R_{0000} = 0$$

Comme pour des systèmes non relativiste la vitesse est très faible devant 1, la composante dominante de  $T$  est  $T_{00}$ , donc la composante dominante de  $G$  est  $G_{00}$ , si  $R_{ij} - 1/2g_{ij}R \approx 0$  alors  $R_{ij} \approx 1/2g_{ij}R$ , de plus :

$$R \approx \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^3 R_{kk} - R_{00} \approx 1/2\eta_{ij}R - R_{00} = 3/2R - R_{00}$$

ce qui donne  $R \approx 2R_{00}$  et :

$$G_{00} \approx 2R_{00}$$

Or

$$R_{00} = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha 0 \beta 0} = \sum_{i=1}^3 R_{i0i0} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}g_{00,ii} = \frac{1}{2}\Delta g_{00}$$

donc :

$$G_{00} = \Delta g_{00} = -8\pi G T_{00}$$

Ce qui permet enfin de déterminer la constante  $k' = -8\pi G$  et d'écrire les équations du champs :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Si on contracte avec  $g^{\mu\nu}$  on obtient :

$$R = -8\pi G T_{\mu}^{\mu}$$

On peut utiliser ce résultat avec l'équation 2.7 :

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\nu}^{\nu}) \quad (2.8)$$

Donc dans l'espace vide, la courbure est astreinte à vérifier :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

## 2.5 La mesure des durées

Les coordonnées d'espace-temps  $x^\mu$  sont "arbitraires", ils ne sont limités par aucun changement de référentiel. Les distances et les laps de temps réels sont les temps et les distances propres, on peut les mesurer à partir de la forme :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.9)$$

Pour deux évènements voisin ayant lieu à un même point de l'espace on a :

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= g_{00} dx^{0^2} = g_{00} dt^2 \\ d\tau &= \sqrt{g_{00}} dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si le champs de gravitation est constant dans le temps (comme ce sera le cas pour la métrique de Schwarzschild), alors pour des intervalles de temps finis :

$$\Delta t = \sqrt{g_{00}} \Delta t \quad (2.11)$$

On voit donc bien que les dilatations des durées sont soumises, non seulement aux variations de mouvement comme c'était le cas en relativité restreinte mais aussi au champs de gravitation. On peut observer ce phénomène en mesurant la fréquence d'ondes lumineuses à différent points d'un champs gravitationnel. Si la fréquence en l'absence de gravitation est  $\nu = 1/T$ , on trouvera en deux points distincts :

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\sqrt{g_{00}(x_1)}}{T} \quad \text{et} \quad \nu_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{\sqrt{g_{00}(x_2)}}{T}$$

donc (puisque  $\nu = (g_{00}(x_1))^{-1/2} \nu_1$ ) on a un décalage :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \left( \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \right) \sqrt{g_{00}(x_1)} = \left( \sqrt{\frac{g_{00}(x_2)}{g_{00}(x_1)}} - 1 \right) \sqrt{g_{00}(x_1)} \\ \frac{\Delta\nu}{\nu} &= \sqrt{g_{00}(x_2)} - \sqrt{g_{00}(x_1)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si on utilise l'approximation  $g_{00} \approx -1 - 2\Phi$  on obtient :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (2.13)$$

Si on prend par exemple le cas du soleil et de la terre, on négligera le potentiel gravitationnel de la terre, alors :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \Phi_\odot = \frac{-GM_\odot}{R_\odot}$$

La fréquence observée est plus faible, la lumière est donc décalée vers le rouge, c'est ce que l'on appelle le "red-shift" gravitationnel. Bien sur le red-shift est d'autant plus grand que l'étoile est petite et dense, ce type de phénomène est donc beaucoup plus intense pour des astres comme des naines blanches.

Le phénomène de dilatation des durées peut être mesuré autrement que par des phénomènes de Red-shift. En effet, le système GPS (Global Positioning System) qui est utilisé pour le repérage géographique, consiste en 24 satellites, 4

dans chacun des six plans orbitaux ayant une inclinaison de 55 degrés par rapport à l'équateur. Chacun d'eux a une période orbitale de 12 heures (sidérale), chacun mesure le temps avec une horloge atomique extrêmement précise. Au début le projet était militaire et des précisions de l'ordre de quelques millimètres était envisagée, des mesures de temps précise à la nano-seconde près sont alors requisent. En Juin 1977 le premier satellite NTS-2 était lancé, il contenait la première horloge au Cesium placée en orbite, il contenait aussi un dispositif visant à corriger les effets relativistes. On laissa néanmoins fonctionner l'horloge pendant 20 jours sans cette aide, au bout de ce laps de temps on a décelé un retard des horloges au sol<sup>3</sup> par rapport à l'horloge en orbite, en moyenne 38 ns par jours. Aujourd'hui, le système GPS est largement utilisé dans le civil et la précision est "bridée" à quelques mètres, précision trop grossière pour déceler les effets relativistes.

---

<sup>3</sup>La seconde SI est fournie par l'USNO (US Naval Observatory)

## Chapitre 3

# La solution de Schwarzschild

### 3.1 Introduction

La solution de Schwarzschild est la métrique qui correspond au champs de gravitation créé par un point matériel, il est à symétrie sphérique et non dépendant du temps. C'est l'homologue du fameux "potentiel central" en mécanique newtonienne, comme lui c'est un des modèles les plus couramment utilisés, elle intervient dans la modélisation des étoiles, du système solaire et même des trous noirs. Nous l'utiliserons pour les tests classiques, dans lequel elle modélisera le champs gravitationnel du soleil.

### 3.2 Métrique isotrope

On considère la variété  $S^2 \times \mathfrak{R}^2$ , on choisira pour la décrire une carte dont les composantes seront  $t$ , interprétée comme une coordonnée temporelle,  $r$ , interprétée comme la distance spatiale à l'origine, et enfin  $(\theta, \phi)$  qui seront les angles sphériques sur  $S^2$ . Ce système de coordonnées est appelé *système de coordonnées de Shwarzschild* (à priori cette carte ne couvre pas la totalité de la variété). On va munir la variété d'une métrique  $g$  pseudo-riemannienne, comme on ne va considérer qu'un champs de gravitation statique à symétrie centrale, cette métrique ne devra dépendre que de  $r$ . On demandera aussi que quand  $r \rightarrow \infty$   $g$  tende vers la métrique de Minkowski  $\eta$  dont l'expression dans ces "coordonnées sphériques" est :

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 h \quad (3.1)$$

Où  $h$  est la métrique classique de  $S^2$  :

$$h = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

On va faire l'hypothèse que la solution cherchée est une généralisation simple de la quantité précédente :

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 h \quad (3.2)$$

Ce dernier résultat peut être justifié rigoureusement en utilisant la théorie des “espaces symétriques” (cf [1] chap 13 p 375) Cette forme est appelée *la forme standard de la métrique isotrope*.

### 3.3 La métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est une solution des équations d'Einstein dans le vide (cf équation 2.8) :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Cette solution sera donc valide par exemple pour l'extérieur d'un corps massif à symétrie sphérique. La forme de la métrique isotrope ainsi que la condition “espace euclidien à l'infini” va nous permettre de déterminer les fonctions  $A(r)$  et  $B(r)$ . Il nous faut calculer le tenseur de Ricci et donc les symboles de Christoffel pour la métrique isotrope (certains des calculs suivant ont été effectués sur Mathematica cf annexe C) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= (2A(r))^{-1}A'(r) & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -rA(r)^{-1} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2\theta A(r)^{-1} & (3.3) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= r^{-1} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= r^{-1} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot\theta & \Gamma_{tt}^r &= (2A(r))^{-1}B'(r) \\ \Gamma_{tr}^t &= (2B(r))^{-1}B'(r) & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Toutes les autres composantes étant nulles. De la même manière les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont :

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} & (3.4) \\ R_{\theta\theta} &= \frac{r}{2A(r)} \left( -\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} - 1 \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta} \\ R_{tt} &= \frac{B''(r)}{2A(r)} - \frac{B'(r)}{4A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} \end{aligned}$$

Les équations d'Einstein se réduisent donc à :

$$R_{rr} = 0 \quad R_{\theta\theta} = 0 \quad R_{tt} = 0$$

Comme on voit que :

$$\frac{R_{rr}}{A(r)} + \frac{R_{tt}}{B(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{B'(r)}{B(r)} = -\frac{A'(r)}{A(r)} \Leftrightarrow A(r)B(r) = C \quad C \in \mathfrak{R}$$

Mais on doit avoir  $g \rightarrow \eta$  quand  $r \rightarrow \infty$  donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

Ce qui permet de trouver  $C=1$ , ainsi :

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \quad (3.5)$$

On utilise cette dernière égalité dans les équations 3.4 qui restent :

$$R_{\theta\theta} = -1 + rB'(r) + B(r) = 0 \quad (3.6)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)} = 0$$

Il ne reste donc en fait qu'une seule équation :

$$rB'(r) + B(r) = 1 = \frac{d}{dr}(rB(r)) \Leftrightarrow rB(r) = r + F \quad F \in \mathfrak{R}$$

Finalelement :

$$B(r) = 1 + \frac{F}{r}$$

Cette constante d'intégration peut être déterminée en rapprochant la composante  $g_{tt}$  du potentiel newtonnien en effet :

$$g_{tt} \approx -1 + \frac{2MG}{r} = -B(r)$$

(cf 2.4 "Lien avec la mécanique classique" ). Donc la constante est  $-2MG$  et la solution finale est :

$$B(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \quad (3.7)$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \quad (3.8)$$

Cette solution fut trouvée par K.Schwarzschild en 1916<sup>1</sup>. Son importance est suggérée par le théorème suivant :

**Théorème de Birkhoff<sup>2</sup>** : Soit une région donnée de l'espace-temps qui soit :

- à symétrie sphérique
- et solution de l'équation d'Einstein dans le vide,

Alors cette géométrie est nécessairement une partie de la géométrie de Schwarzschild.

### 3.4 La géométrie de Schwarzschild

Est-il possible de visualiser la géométrie de Schwarzschild ? Plaçons nous au voisinage d'une étoile massive, la métrique trouvée plus haut est valable pour l'extérieur de cette étoile, comme on ne peut visualiser un espace quadridimensionnel on va tenter de plonger dans un espace à 3 dimensions une projection statique de cette géométrie. On prend donc  $t = cte$  et  $\theta = \pi/2$ , on se place

<sup>1</sup>Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys-Math.Klasse 1916,189-196.

<sup>2</sup>[2] p 843

ainsi à un instant fixé et dans le plan équatorial, l'expression de la métrique sur une telle projection est :

$$d\tau^2 = A(r)dr^2 + r^2d\phi^2$$

On utilisera dans l'espace à trois dimensions les coordonnées cylindriques  $r, \phi, z$  et on cherche une surface paramétrée dans ce système de coordonnées par  $z = z(r)$  dont la première forme fondamentale est de la forme précédente. La métrique d'une telle surface s'écrit :

$$d\tau^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) dr^2 + r^2d\phi^2$$

Soit en identifiant avec la métrique de la projection :

$$\left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) = A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}$$

On résout cette équation différentielle et on trouve :

$$z(r) = \pm\sqrt{8MG(r - 2MG)} + cte \quad cte \in \mathfrak{R} \quad (3.9)$$

C'est une solution générale, pour avoir une visualisation correcte de la géométrie on prendra la solution particulière :

$$z(r) = \sqrt{8MG(r - 2MG)}$$

Que l'on limitera à des valeurs de  $r$  plus grande que le rayon du corps celeste, la forme que peut prendre la surface pour l'intérieur dépend du modèle que l'on adopte (considère-t-on une densité de matière uniforme, une pression nulle ou fini, un corps stable ou animé de pulsation ?) Les deux solutions, intérieures et extérieures devront se raccorder continuellement. La fonction  $z(r)$  est représentée sur la figure (3.1).

### 3.5 La singularité de Schwarzschild

On observe que dans l'expression de la métrique de Schwarzschild il y a une hypersurface où elle est singulière, en  $r = r_g \equiv 2MG$  où  $g_{tt} \rightarrow 0$  et  $g_{rr} \rightarrow \infty$ . Cette valeur de  $r$  est appelée le rayon gravitationnel du corps. Il est habituellement très petit<sup>3</sup>, si bien que les endroits où la métrique est singulière sont à l'intérieur de l'étoile ou de la planète, où la solution discutée n'est plus valable. Cependant, il semble qu'il puisse exister des corps très petit et dense qui soit plus petit que leur rayon gravitationnel. De tels corps sont souvent appelés trous noirs, l'hypersurface  $r = r_g$  est appelée "l'horizon" du trou noir. A une époque ces corps (purement théorique) furent appelés "étoiles gelées"<sup>4</sup> à cause d'un phénomène étrange : il faut une quantité finie de temps propre pour, partant d'une distance  $R \gg r_g$ , atteindre la singularité centrale à  $r = 0$  mais pourtant il faut une quantité infinie de temps de coordonnée pour atteindre l'horizon  $r = r_g$ ,

<sup>3</sup>pour le soleil  $r_g \approx 3Km$ , pour la terre  $r_g \approx 0.44cm$

<sup>4</sup>à peu près jusqu'en 1969

(pour démontrer ceci on a besoin des équations du mouvement, ce résultat sera démontré dans la section 3.6). Donc si une étoile s’effondrait sur elle-même on devrait s’attendre à ce que son évolution se fige quand son rayon atteint le rayon gravitationnel. Un tel corps ne devrait donc jamais disparaître. Cependant le nom de trou noir n’est pas usurpé. L’adjectif “noir” provient du “red-shift” (cf section 2.5) qui devient énorme au voisinage de l’horizon puisque :

$$\lim_{r \rightarrow r_g} g_{00} = \infty$$

Ainsi la fréquence de la lumière émise tend vers zéro et le corps devient noir très rapidement. L’appellation “trou” elle aussi est justifiée, une fois passé l’horizon, rien ne peut plus s’échapper pas même la lumière.

Il est étrange de constater qu’entre l’intérieur et l’extérieur du “trou” on a inversion du rôle de  $t$  et de  $r$ , en effet :

- Si  $r > r_g$  alors  $g_{rr} > 0$  et  $g_{tt} < 0$  la direction  $e_r$  est du genre espace et la direction  $e_t$  du genre temps.
- Si  $r < r_g$  alors  $g_{rr} < 0$  et  $g_{tt} > 0$  la direction  $e_r$  est du genre temps et la direction  $e_t$  du genre espace.

Ainsi il semblerait que la chute d’un éventuel corps dans le trou serait aussi inexorable que l’écoulement du temps lui-même une fois passé l’horizon.

Si on étudie la métrique de Schwarzschild dans le vide comme si n’y avait pas de corps du tout, on peut se poser la question de savoir si la métrique est réellement singulière en  $r = r_g$ , ce n’est peut-être qu’une illusion due à un mauvais choix de coordonnées comme par exemple pour le pôle nord d’une sphère où les coordonnées sphériques sont singulières sans qu’il n’y ait de problème concernant la variété elle-même? On peut montrer qu’en fait cette singularité n’est qu’apparente on doit pour cela changer de carte. Plusieurs systèmes de coordonnées sont possibles et ont été proposés<sup>5</sup>, l’un des plus fréquemment cité est celui obtenu

<sup>5</sup>Par exemple ceux de Novikov ou d’Eddington-Finkelstein cf [2] p 828

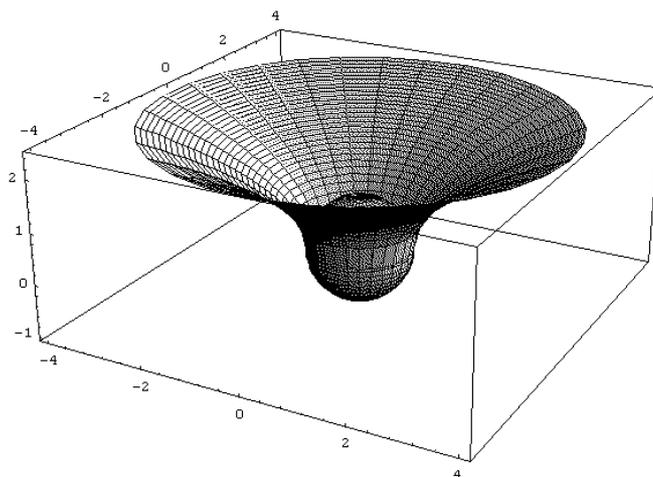


FIG. 3.1: La géométrie de Schwarzschild

independement par Kruskal et Szekeres en 1960. Il consiste en le changement de carte suivant :

$$r'^2 - t'^2 = \left( \frac{r}{2MG} - 1 \right) \exp \left( \frac{r}{2MG} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{2r't'}{r'^2 + t'^2} = \tanh \left( \frac{t}{2MG} \right) \quad (3.11)$$

Ou de manière plus explicite :

$$\text{sir} > r_g \begin{cases} r' = \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} e^{r/4MG} \cosh(t/4MG) \\ t' = \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} e^{r/4MG} \sinh(t/4MG) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\text{sir} < r_g \begin{cases} r' = \sqrt{1 - \frac{r}{2MG}} e^{r/4MG} \sinh(t/4MG) \\ t' = \sqrt{1 - \frac{r}{2MG}} e^{r/4MG} \cosh(t/4MG) \end{cases} \quad (3.13)$$

Dans les coordonnées de Kruskal-Szekeres, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$d\tau^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (dt'^2 - dr'^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.14)$$

où  $r$  est maintenant une fonction de  $t'$  et  $r'$  définie de manière implicite par l'équation (3.10). On constate qu'il n'y a plus aucun problème en " $r = r_g$ " puisque cela correspond à  $r' = t'$ . Dans les coordonnées de Schwarzschild on avait une autre singularité en  $r = 0$  ce qui correspond maintenant à :  $r'^2 - t'^2 = 1$ , on voit qu'il y en a deux! en  $r' = \pm \sqrt{t'^2 - 1}$ . Aucun élément de la métrique ne s'annule en  $r' = 0$  et rien ne nous empêche de continuer vers les  $r' < 0$ . En fait,  $r \gg 2MG$  est équivalent  $r'^2 \gg t'^2$  et on a donc deux régions extérieures distinctes<sup>6</sup> :

$$r' \gg +|t'| \quad \text{et} \quad r' \ll -|t'|$$

Les coordonnées de Schwarzschild ne couvraient qu'une partie de la variété. On peut visualiser cette géométrie en la plongeant comme on l'a déjà fait. En prenant les mêmes projections que précédemment, on trouve que la surface est décrite par un parabolôide de révolution :

$$r = 2MG + \frac{z^2}{8MG}$$

. Qui est représenté sur la figure (3.2). On appelle ce phénomène un trou de ver de Schwarzschild ou encore un pont d'Einstein-Rosen. Les équations d'Einstein ayant un caractère local, on n'a pas de renseignement sur la structure topologique globale, on ne sait pas si ce "trou de ver" connecte deux régions d'un même univers ou bien deux univers distincts.

### 3.6 Equations du mouvement

On considérera le mouvement d'une particule matérielle ou d'un photon dans le champs gravitationnel crée par un corps à symétrie sphérique. Cela revient à chercher les géodésiques pour la métrique de Schwarzschild. Les équations des géodésiques sont :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0 \quad (3.15)$$

<sup>6</sup>cette propriété fut découverte pour la première fois par Synge en 1950.

$p$  étant un paramètre arbitraire, on s'abstiendra de paramétrer la géodésique par longueur d'arc, car pour un photon le temps propre est toujours nul. Ce choix nuirait à la généralité de l'équation. En utilisant les coefficients 3.3 il vient quatre équations différentielles du second ordre en  $p$  à quatre inconnues que sont  $t, r, \theta, \phi$  :

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 - r \frac{\sin^2 \theta}{A(r)} \left( \frac{d\phi}{dp} \right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{dp} \right)^2 = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\phi}{dp} \frac{d\theta}{dp} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (3.19)$$

On ne considerera plus désormais que des mouvements dans le plan équatorial, on posera :

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

il ne reste alors plus que trois équations puisque l'équation 3.17 disparaît. Si on divise l'équation 3.18 par  $d\phi/dp$  on obtient :

$$\frac{2}{r} \frac{dr}{dp} + \left( \frac{d\phi}{dp} \right)^{-1} \frac{d^2 \phi}{dp^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dp} \left( \ln \frac{d\phi}{dp} + \ln r^2 \right) = 0$$

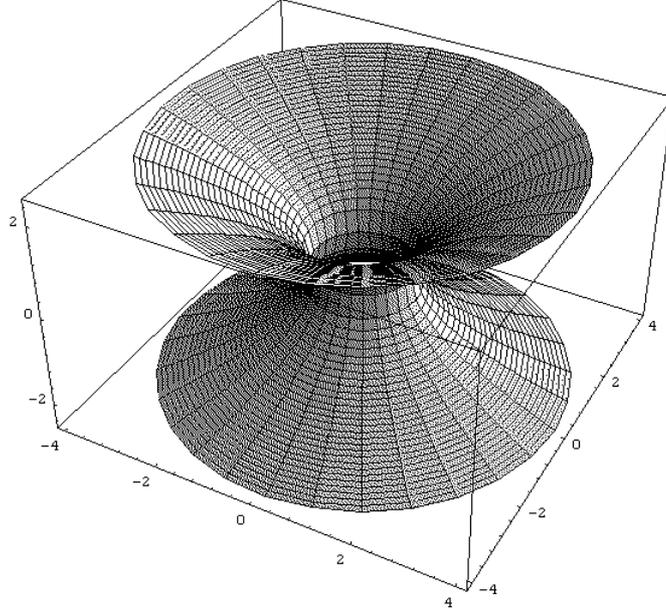


FIG. 3.2: Le trou de ver de Schwarzschild

De même si on divise l'équation 3.19 par  $dt/dp$  on obtient :

$$\frac{d^2t}{dp^2} \left( \frac{dt}{dp} \right)^{-1} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dr}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dp} \left( \ln \frac{dt}{dp} + \ln B(r) \right) = 0$$

La première de ces relation nous amène une constante du mouvement :

$$r^2 \frac{d\phi}{dp} = J \quad J \in \mathfrak{R} \quad (3.20)$$

On nommera cette constante J par la similitude de l'équation précédente avec l'équation donnant le moment angulaire en mécanique newtonienne. La seconde relation donne une autre constante que l'on peut choisir de fixer à un en normalisant p correctement. On a finalement la relation :

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)} \quad (3.21)$$

Grace à ces deux nouvelles relations, on peut simplifier l'équation (3.15) qui devient :

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{J^2 B(r)}{r^3} + \frac{B'(r)}{2B(r)} = 0$$

Si on multiplie cette dernière par  $2A(r)dr/dp$ , on obtient :

$$\frac{d}{dp} \left( A(r) \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right) = 0$$

Et donc :

$$A(r) \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - A(r) = -E \quad E \in \mathfrak{R} \quad (3.22)$$

Cette dernière constante permet de mettre en relation le paramètre des géodésiques et le temps propre, on obtient, tout calculs fait en utilisant tout les résultats ci-dessus et la forme de la métrique :

$$d\tau^2 = E dp^2 \quad (3.23)$$

Ce qui implique que pour des photons  $E = 0$ . Grâce à l'équation 3.21 on peut exprimer ces équations en fonction du temps :

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = JB(r) \quad (3.24)$$

$$A^3(r) \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - A(r) = -E \quad (3.25)$$

On peut aussi grâce à 3.20 tout exprimer en fonction de  $\phi$  ce qui permet d'avoir la forme des orbites dans le plan équatorial exprimée en en fonction des coordonnées polaires  $r, \phi$  :

$$\frac{A(r)}{r^4} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{A(r)}{J^2} = \frac{-E}{J^2} \quad (3.26)$$

Si on cherche  $\phi$  en fonction de  $r$  on peut même réduire cela à une intégrale :

$$\phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{A(r)}{J^2} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2}}} \quad (3.27)$$

Cette intégrale (que l'on notera  $I$ ) est une intégrale elliptique, c'est ainsi que l'on appelle une intégrale dont l'intégrand est une fraction rationnelle de  $z$  et de  $\sqrt{P(z)}$  où  $P(z)$  est un polynôme de degré 3 ou 4. En effet :

$$I = \int_{r_1}^{r_2} (B(r)r^4 \left( \frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right))^{-1/2} dr$$

Ce qui donne :

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \left( r^4 \frac{1-E}{J^2} + \frac{r^3 Em}{J^2} - r^2 + mr \right)^{-1/2} dr \quad (3.28)$$

Le terme sous le radical est un polynôme de degré 4, I est donc bien une intégrale elliptique de première espèce (cf [4] p236). Si on pose le changement de variable  $u = 1/r$  on peut ramener ce polynôme au troisième degré :

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \left( \frac{1-E+Emu}{J^2} - u^2 + mu^3 \right)^{-1/2} du \quad (u_{1,2} = 1/r_{1,2}) \quad (3.29)$$

Toute intégrale elliptique peut être mise sous la forme normale de Legendre. Pour ça on doit transformer l'intégrale précédente pour obtenir un polynôme bicarré sous le radical. On pose pour cela un nouveau changement de variable :  $u = x^2 + h$ . avec  $x_{1,2} = \sqrt{u_{1,2} - h}$  on a  $I$  qui devient :

$$2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{\sqrt{(mx^6 + x^4(3mh - 1) + x^2(\frac{Em}{J^2} - 2h + 3mh^2) + \frac{1-E+Emh}{J^2} - h^2 + mh^3)}}$$

On prend  $h$  tel qu'il n'y ait pas de terme constant dans le polynôme sous le radical, c'est à dire tel que  $mh^3 - h^2 + Emh/J^2 + (1-E)/J^2 = 0$  alors :

$$I = 2 \int_{x_1}^{x_2} (mx^4 + (3mh - 1)x^2 + \frac{Em}{J^2} - 2h + 3mh^2)^{-1/2} dx$$

Si on pose  $a_1$  et  $a_2$  les racines du polynôme  $mx^2 + (3mh - 1)x + Em/J^2 - 2h + 3mh^2$  on peut réécrire l'intégrale comme :

$$I = \frac{2}{\sqrt{ma_1 a_2}} \int_{x_1}^{x_2} \left( \left( \frac{x^2}{a_1} - 1 \right) \left( \frac{x^2}{a_2} - 1 \right) \right)^{-1/2} dx$$

en en posant  $y = x/\sqrt{a_1}$  et  $y_{1,2} = x_{1,2}/\sqrt{a_1}$  :

$$I = \frac{2}{\sqrt{ma_2}} \int_{y_1}^{y_2} ((y^2 - 1)(\frac{a_1}{a_2} y^2 - 1))^{-1/2} dy \quad (3.30)$$

Ce qui est la forme normale de Legendre on peut aussi la mettre sous une forme trigonométrique et posant  $y = \sin \theta$  :

$$I = \frac{2}{\sqrt{ma_2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad k^2 \equiv \frac{a_1}{a_2} \quad (3.31)$$

Si dans cette intégrale  $\theta_1 = 0$  alors, vue comme une fonction dépendant de  $\theta_2$ , cette intégrale est la fonction inverse de la fonction elliptique sn de Jacobi :

$$\int_0^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \text{sn}^{-1} \theta_1$$

Une autre fonction “conjuguée” est définie ainsi :

$$u = \int_{\text{cnu}}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{k'^2 + k^2 \theta}} \quad k^2 + k'^2 = 1$$

Les noms cn et sn de ces fonctions sont donnés par analogie avec les fonctions circulaires, autant par leurs propriétés (on a aussi  $\text{cn}^2(u) + \text{sn}^2(u) = 1$  et de nombreuses autres relations constituant une véritable trigonométrie elliptique) que par leurs définitions, en effet on peut définir la fonction sinus comme fonction inverse d’une intégrale :

$$u = \int_0^{\sin u} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Cette idée de généraliser les fonctions circulaires est due à Carl Jacobi, qui fonda ainsi l’étude des fonctions elliptiques définie comme inverses des intégrales elliptiques.

Fort de toutes ces relations, on peut maintenant prouver ce qui a été dit dans la section précédente : il faut un temps propre fini pour atteindre la singularité en  $r = 0$  en partant de  $r = R \gg r_g$ , alors qu’il faut déjà un temps impropre infini pour atteindre  $r = r_g$ . Pour cela on considèrera une particule en chute libre radiale dans un trou noir, ce qui implique que  $J = 0$  (puisque  $\phi = \text{cte}$ ). On utilisera l’équation 3.22, en remplaçant  $p$  par le temps propre  $\tau$  grâce à l’équation 3.23 et en multipliant par  $B(r)$  il vient :

$$E \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 1 - EB(r)$$

Ce qui permet d’écrire :

$$d\tau = \pm \sqrt{\frac{Er}{(1 - E)r + 2MGE}} dr$$

Ou bien sous une forme plus agréable :

$$d\tau = \pm \frac{\sqrt{2}}{C} \sqrt{\frac{u}{2 - u}} du \quad \text{avec } C \equiv \frac{2(E - 1)}{2MGE} \quad (3.32)$$

On voit déjà que le temps propre nécessaire pour aller de  $r = R$  à  $r = 0$  est :

$$\Delta\tau = -\frac{\sqrt{2}}{C} \int_{R/C}^0 \sqrt{\frac{u}{2 - u}} du$$

et que cette intégrale n’est pas singulière ni en 0 ni en  $u = 2$ , donc qu’elle converge vers une valeur finie. On peut aller plus loin, en faisant le changement

de variable  $u = \cos \eta + 1$  il vient :

$$\begin{aligned} d\tau &= \pm \frac{\sqrt{2}}{C} \sqrt{\frac{\cos \eta + 1}{1 - \cos \eta}} \sin \eta d\eta \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{C} \left( \frac{(\cos \eta + 1)(1 - \cos^2 \eta)}{(1 - \cos \eta)} \right)^{1/2} d\eta \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{C} |\cos \eta + 1| d\eta \end{aligned}$$

en choisissant convenablement l'origine des temps on peut écrire :

$$\begin{aligned} r &= \cos \eta + 1 \\ \tau &= \frac{\sqrt{2}}{C} (\eta + \sin \eta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

C'est l'équation d'une cycloïde,  $r = 0$  quand  $\eta = \pi$  et donc quand  $\tau = \frac{\pi\sqrt{2}}{C}$ . Si maintenant on veut remplacer  $\tau$  par  $t$  on va utiliser 3.21 :

$$dt = \frac{r}{r - 2MG} d\tau = \frac{(1 + \cos \eta)^2 d\eta}{\cos \eta + 1 - 2MG}$$

Intégrer cette expression n'est pas simple, Mathematica donne la primitive :

$$t = \eta + 2MG\eta + \frac{4M^2G^2}{\sqrt{MG - M^2G^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{MG \tan(\eta/2)}{\sqrt{MG - M^2G^2}} \right) + \sin \eta$$

(cf annexe C pour le notebook on trouvera aussi un graphique comparatif des deux courbes paramétrées) à l'inverse de la cycloïde, la courbe avec le temps impropre a comme asymptote la droite  $y = 2MG$ . Un observateur extérieur ne verra donc jamais une particule tomber dans un trou noir. Cela se voit aussi en utilisant l'équation 3.25, en effet on a :

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = B(r)^2 - EB(r)^3 = \frac{(r - 2MG)^2 (r - E(r - 2MG))}{r^3}$$

ce qui donne :

$$\Delta t = \pm \int_R^0 \frac{r^{3/2}}{(r - 2MG) \sqrt{r - E(r - 2MG)}} dr$$

Or on voit bien que cette intégrale a une singularité non intégrable en  $r = 2MG = r_g$ , elle a une valeur infinie.

### 3.7 Etude qualitative des orbites

En posant  $u = 1/r$  dans l'équation 3.26 on obtient :

$$A(u)(u'(\phi))^2 + u^2 - \frac{A(u)}{J^2} = \frac{-E}{J^2}$$

Ce qui donne en multipliant par  $B(r)$  et en développant :

$$u'(\phi)^2 + u^2 - 2MGu^3 - J^{-2} = -EJ^{-2} + 2MGEJ^{-2}$$

En dérivant par rapport à  $\phi$  et en simplifiant par  $u'(\phi)$  on obtient l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3MGu^2 - \frac{MGE}{J^2} = 0 \quad (3.34)$$

Or en mécanique classique on a une équation analogue (cf annexe A.6) qui est :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{MGm^2}{L^2} = 0 \quad (3.35)$$

Le terme correctif apporté par la mécanique relativiste est du "second ordre en  $1/r$ ", c'est cette petite perturbation qui amène les phénomènes de précessions dans les orbites planétaires. On peut justifier l'interprétation de  $J$  et on peut identifier  $E$  avec  $m^2$  ce qui est cohérent avec ce que l'on avait dit précédemment :  $E = 0$  pour les photons et toutes les particules sans masse. On peut comme dans le cas du mouvement non relativiste chercher un "potentiel effectif" analogue à celui trouvé en A.5. On partira donc de ce qui généralise la vitesse d'une particule en mécanique relativiste, la 4-vitesse qui est par définition la dérivée de la position par rapport au temps propre. Ainsi on partira de l'équation 3.22 et on l'exprimera en fonction du temps propre grâce à 3.23, (cela ne se justifiant que pour des particules matérielles, pour des photons on sera obligé de garder le paramètre affine). On obtient après multiplication par  $B(r)$  :

$$E \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{J^2 B(r)}{r^2} - 1 = -EB(r)$$

en divisant par  $E$  et en remplaçant  $B(r)$  par sa valeur on obtient :

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{J^2}{Er^2} - \frac{2MGJ^2}{Er^3} - \frac{2MG}{r} = \frac{1}{E} - 1$$

En remplaçant  $E$  par  $m^2$  et en multipliant par  $m/2$  on arrive à :

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r} - \frac{MGJ^2}{mr^3} = Cte$$

ce qui est à un terme en  $1/r^3$  près la relation A.4, on posera donc le potentiel effectif égal à :

$$V(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r} - \frac{MGJ^2}{mr^3} \quad (3.36)$$

On a que la dérivée de cette fonction est :

$$V'(r) = \frac{2J^2MG}{mr^4} - \frac{J^2}{mr^3} + \frac{mMG}{r^2}$$

qui s'annule en deux points :

$$r_1 = \frac{J^2 - \sqrt{J^4 - 12J^2(mMG)^2}}{2m^2MG}$$

$$r_2 = \frac{J^2 + \sqrt{J^4 - 12J^2(mMG)^2}}{2m^2MG}$$

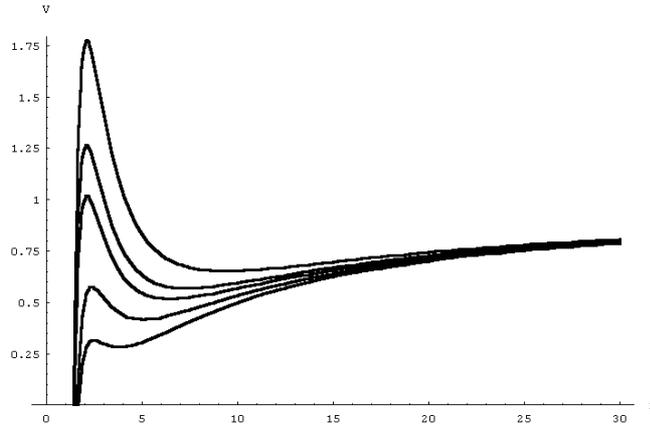


FIG. 3.3: Allure du potentiel effectif de Schwarzschild

A condition que  $J^2 > 12(mMG)^2$  sinon la fonction est monotone croissante. Le point  $r_1$  correspond à un maximum de la fonction et le point  $r_2$  à un minimum. Ce sont donc respectivement des points d'équilibre instable et stable. Les valeurs de  $V$  pour  $r_{1,2}$  sont :

$$V_{\max} = \frac{4\tilde{J}M^2G^2(\tilde{J} - 8M^2G^2 - \sqrt{\tilde{J}(\tilde{J} - 12M^2G^2)})}{(\sqrt{\tilde{J}(\tilde{J} - 12M^2G^2)} - \tilde{J})^3}$$

$$V_{\min} = \frac{-4\tilde{J}M^2G^2(\tilde{J} - 8M^2G^2 + \sqrt{\tilde{J}(\tilde{J} - 12M^2G^2)})}{(\sqrt{\tilde{J}(\tilde{J} - 12M^2G^2)} + \tilde{J})^3}$$

avec  $\tilde{J} \equiv \frac{J^2}{E}$

La figure 3.3 montre graphiquement ce potentiel pour différentes valeurs de  $J$ , on observe que qualitativement, la principale différence avec le cas non relativiste (cf fig A.1) est la présence d'une sorte de "puit" de potentiel. Les mouvements caractéristiques sont :

- Orbite circulaire quand  $(1 - E)/E$  est égal à  $V_{\min}$
- Orbite de type Keplerien (avec des phénomènes de précession) quand  $(1 - E)/E$  est un peu plus grand que  $V_{\min}$
- Orbite temporaire quand  $(1 - E)/E$  est égal à  $V_{\max}$ , le corps peut tourner plusieurs fois autour du centre d'attraction mais l'orbite est instable.
- Capture dans le trou noir si  $(1 - E)/E$  est plus grand que  $V_{\max}$ .

Si on veut faire le même type d'étude pour des particules sans masses il faut garder le paramètre affine et poser  $E = 0$  dans 3.22, après multiplication par  $B(r)$  on à :

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{2MGJ^2}{r^3} = 1$$

on posera alors :

$$V_{ph} = \frac{J^2}{r^2} - \frac{2MGJ^2}{r^3} \quad (3.37)$$

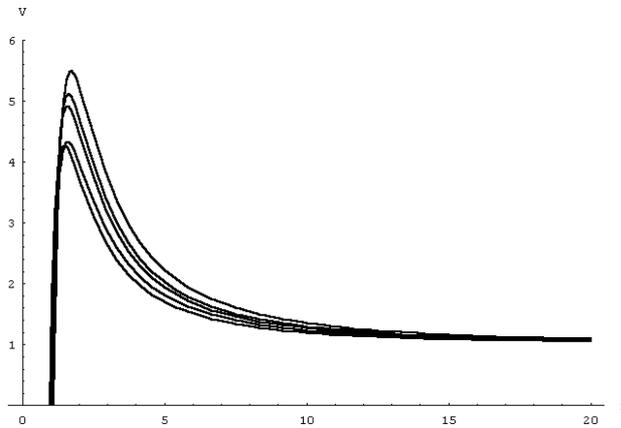


FIG. 3.4: Allure du potentiel effectif pour des photons

Cette fonction n'a qu'un seul extremum en  $r = 3MG$  et c'est un maximum. Puisqu' en effet :

$$V'_{ph}(r) = \frac{6J^2MG}{r^4} - \frac{2J^2}{r^3}$$

et que :

$$V''_{ph}(r) = \frac{-24J^2MG}{r^5} + \frac{6J^2}{r^4} \Rightarrow V''_{ph}(3MG) = \frac{-2J^2}{81MG^4} < 0$$

on a donc pas d'orbite stable (un photon ne peut pas se "satéliser" dans le sens où il n'y a pas d'équilibre stable.). On à toujours le puit de potentiel (cf fig 3.4).

### 3.8 Tests classiques

On va ici developper trois tests classiques de la relativité générale qui sont :

- La déflexion des rayons lumineux par le soleil
- La précession du perihélie de Mercure
- Le retard de Shapiro d'un écho radar

Chronologiquement le premier de ces tests fut la découverte de la précession du perihélie de Mercure. Au début du siècle, il y avait déjà plusieurs décennies que l'on avait remarquer que Mercure ne suivait pas exactement les prévisions de la mécanique classique, son mouvement n'était pas une ellipse parfaite, le point de son orbite le plus proche du soleil son "perihélie" se déplaçait d'une manière infime mais indubitable. Ce comportement inexplicable par la mécanique newtonniene fut pour la première fois expliqué convenablement par Einstein <sup>7</sup> en utilisant sa théorie de la relativité, il ne trouva pas la solution générale du problème mais réussit néanmoins à expliquer le phénomène en utilisant une approximation au second ordre (le premier ordre étant la mécanique de Newton).

<sup>7</sup>Sitzungsberitche du 18 Nov 1915

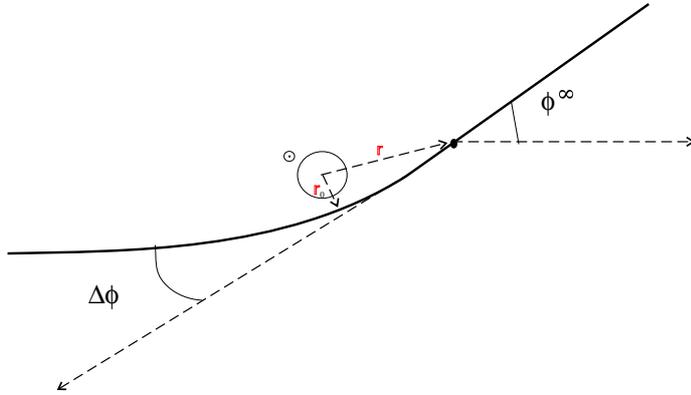


FIG. 3.5: Déflexion des rayons lumineux par le soleil.

La déflexion de la lumière mesurée à Sobral et à Principe durant l'éclipse totale du 29 Mai 1919 par Eddington<sup>8</sup>. est l'expérience qui propulsa Einstein sur le devant de la scène du jour au lendemain. Le retard de Shapiro est un test beaucoup plus récent, dont l'accomplissement est rendu possible seulement aujourd'hui par les technologies modernes, notamment dans la mesure du temps grâce aux horloges atomiques, à la radio-astronomie etc.

Toutes ces expériences confirment la théorie de la relativité générale avec une marge d'erreur inférieure au millième.

### 3.8.1 Déflexion des rayons lumineux

Selon la théorie de la relativité générale, les rayons lumineux suivent comme les objets matériels des géodésiques de l'espace-temps et sont donc soumis à l'attraction du soleil. En conséquence ils doivent se courber quand ils passent à sa proximité. Pour calculer quantitativement cet effet on utilisera l'équation 3.27. Comme on a affaire à des photons :  $E = 0$ . Pour exprimer  $J$  on va considérer une valeur particulière de  $r$  que l'on supposera être la plus petite valeur possible. Si  $r_0$  est un minimum de  $r(\phi)$  alors  $r'(\phi) = 0$  et l'équation 3.26 nous donne :

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{J^2 B(r_0)} = 0 \Leftrightarrow J^2 = \frac{r_0^2}{B(r_0)} \quad (3.38)$$

Si on considère un photon arrivant au voisinage du soleil avec un angle d'incidence  $\phi^\infty$  alors la variation d'angle entre  $r = \infty$  et  $r = r_0$  est  $\phi^\infty - \phi(r_0)$  et comme la trajectoire est symétrique la variation d'angle total est  $2|\phi^\infty - \phi(r_0)|$ . En l'absence de déflexion cette valeur doit être  $\pi$  donc la déflexion est :

$$\Delta\phi = 2|\phi^\infty - \phi(r_0)| - \pi$$

l'équation 3.27 nous donne donc :

$$\Delta\phi = 2 \left| \int_{r_0}^{\infty} \left( B(r) \left( \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{B(r)}{B(r_0)} - 1 \right) \right)^{-1/2} \frac{dr}{r} \right| - \pi \quad (3.39)$$

<sup>8</sup>F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, Phil. Trans. Roy. Soc., 220A, 291 (1920); Mem. Roy. Astron. Soc., 62, 291 (1920)

Cette intégrale converge. Le polynôme sous le radical est de degré quatre, et  $r_0$  est une de ses racines, l'intégrand se comporte comme  $1/r^2$  en  $+\infty$  et comme  $1/\sqrt{r-r_0}$  en  $r_0$ . On sait que cette intégrale est elliptique et que donc on ne peut que l'intégrer numériquement. On utilisera l'équation 3.29 avec  $E = 0$  et le  $J$  calculé plus haut, les valeurs numériques seront celles du soleil  $M_\odot G = 1.475$  (il s'agit en fait de  $M_\odot G/c$ ) et  $r_0 = R_\odot = 6,95.10^5 Km$  la valeur atteint alors  $\Delta\phi_\odot \approx 1.75''$  (voir en annexe C les calculs effectués sous le logiciel Mathematica). C'est un angle de déflexion maximal. Afin de mesurer cet effet, on photographie une zone étoilée du ciel de nuit (il n'y a alors pas d'obstacle à la propagation des rayons) pour servir de position de référence. Il faut ensuite mesurer la position apparente des étoiles quand les rayons passent à proximité d'une grosse masse comme le soleil; pour que les étoiles ne soient pas noyées dans la lumière solaire il faut attendre une éclipse totale pour refaire les mesures. Les images des étoiles, devraient apparaître décalées par rapport à la position qu'elles occupaient dans la nuit. A Sobral et à Principe des mesures faites respectivement sur 7 et 5 étoiles montrent une déflexion, (ce qui est déjà un résultat puisque la mécanique newtonnienne n'en prévoit pas), variant de  $1.98''$  à  $1.61''$  avec une précision convenable. Depuis de nombreuses autres observations ont été faites confirmant avec toujours plus de précision les prévisions. Un phénomène analogue beaucoup plus spectaculaire est très souvent observé aujourd'hui par les astronomes du monde entier; celui des "lentilles gravitationnelles". Les premiers calculs d'Einstein dans les années trente montrèrent qu'une étoile pouvait jouer un rôle de "lentille", une source placée derrière elle apparaîtrait comme un mince anneau, si petit qu'il serait dans la plupart des cas noyé dans la tache de lumière formée par l'étoile au foyer d'un telescope. Si par contre c'est une galaxie ou même un amas de galaxies qui joue le rôle de lentille, l'anneau devrait être beaucoup plus gros et deviendrait visible, si la lentille n'est pas exactement alignée avec la source, l'anneau est fragmenté en plusieurs images de la source. C'est ce phénomène que montre la fig (3.6), un quasar situé à approximativement 8 milliard d'années lumières apparaît quatre fois sous l'effet de lentille d'une galaxie (l'objet au centre). Cette célèbre image, prise par le telescope spatial Hubble à été baptisé la "croix d'Einstein". Ainsi, l'effet de courbure des rayons lumineux est passé du statut de test à celui d'outil, les observations de "mirages gravitationnels" peuvent en effet être utile :

- elles nous renseignent sur la géométrie de la "lentille" (la distribution de matière dans l'amas par exemple.).
- elles nous renseignent sur la source, la lentille se comporte parfois comme un véritable telescope qui nous permet de voir des objets beaucoup plus faibles ou plus lointains.

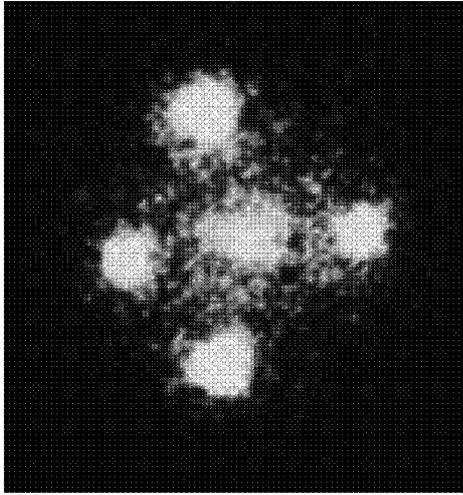


FIG. 3.6: Un mirage gravitationnel : La croix d'Einstein.

### 3.8.2 Précession du périhélie de Mercure

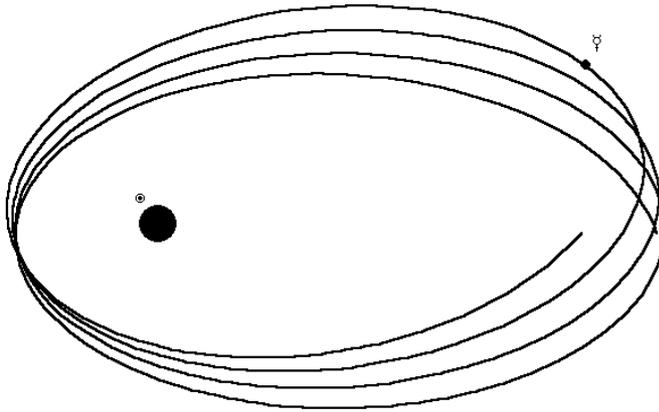


FIG. 3.7: Orbite de Mercure selon la relativité générale (effet exagéré)

Ce fut chronologiquement le premier phénomène dont Einstein se rendit compte en étudiant ses équations. La dynamique newtonnienne nous apprend que les planètes du système solaire gravitent autour du soleil en décrivant une ellipse dont il est le foyer. L'orbite de Mercure se décale de  $5601''$  par siècle, dont  $5558''$  sont imputables aux perturbations connues induites par les autres planètes. Il reste  $43''$  qui sont explicables par la relativité générale. On notera respectivement  $r_+$  et  $r_-$  la plus grande et la plus petite distance au soleil, c'est à dire l'aphélie et le périhélie, on connaît ces valeurs si on connaît la valeur de l'excentricité  $e$  et du demi-grand axe  $a$  de l'orbite cf fig 3.8 :

$$r_+ = (1 + e)a \quad r_- = (1 - e)a$$

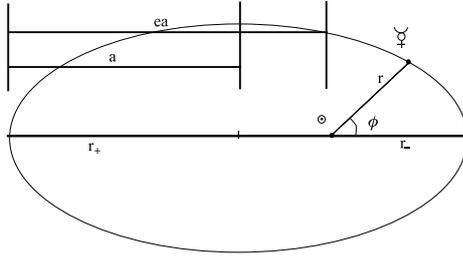


FIG. 3.8: Quantités relative à l'ellipse

On va une fois de plus utiliser l'équation 3.26 afin de déterminer les constantes du mouvement, comme  $r_+$  et  $r_-$  sont des extréma :

$$\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{J^2 B(r_+)} = \frac{-E}{J^2}$$

$$\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{J^2 B(r_-)} = \frac{-E}{J^2}$$

ce système résolu nous donne :

$$J^2 = (B(r_-)^{-1} - B(r_+)^{-1})(r_-^{-2} - r_+^{-2})^{-1} \quad (3.40)$$

$$E = (r_+^2 - r_-^2)^{-1} \left( \frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)} \right) \quad (3.41)$$

La variation de l'angle polaire entre le périhélie et l'aphélie  $|\phi(r_-) - \phi(r_+)|$  devrait être de  $\pi$  et pour un tour complet, comme l'orbite est symétrique on aurait  $2|\phi(r_-) - \phi(r_+)| = 2\pi$ , un éventuel écart entre les deux théorie serait alors de :

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_-) - \phi(r_+)| - 2\pi \quad (3.42)$$

Plus explicitement :

$$\Delta\phi = 2 \left| \int_{r_+}^{r_-} A^{1/2}(r) \left( \frac{1}{J^2} B(r) - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{-1/2} \frac{dr}{r} \right| - 2\pi \quad (3.43)$$

Ici les deux bornes d'intégration correspondent à deux zéros du polynôme sous le radical, ces singularités sont donc intégrables. Comme la précédente c'est une intégrale elliptique. Un calcul numérique de cette intégrale (voir en annexe une méthode utilisant les capacités de Mathematica) donne un résultat  $\approx 43''$  d'arc par siècle. C'est cet effet que l'on appelle "précession du périhélie". C'est pour Mercure que cet effet est le plus important, ce qui explique que c'est pour cette planète qu'il ait été détecté pour la première fois, mais en fait toutes les planètes le subissent (Les distances sont en millions de kilomètres et les angles en seconde d'arc par siècle) :

Planète	$r_-$	$r_+$	révolution siècle	$\Delta\phi$ (théorique)	$\Delta\phi$ (observé)
Mercure	46	70	415	43''	43.11'' $\pm$ 0.45
Venus	108.95	107.47	149	8.6''	8.4'' $\pm$ 4.8
Terre	147.1	152.09	100	3.8''	5.0'' $\pm$ 1.2

### 3.8.3 Retard de Shapiro d'un écho radar

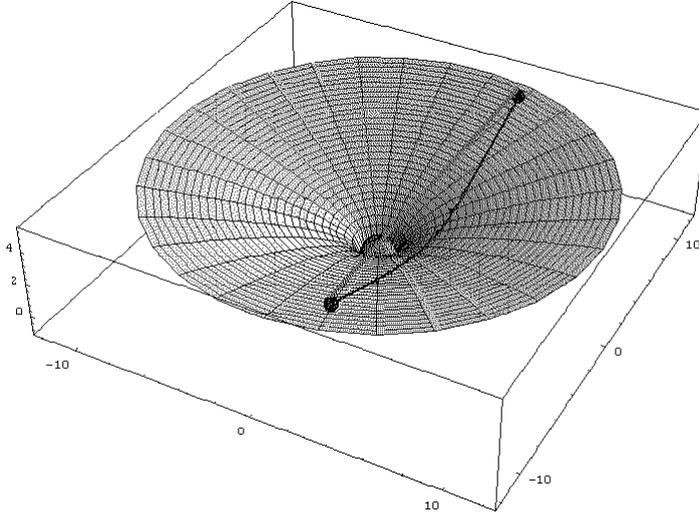


FIG. 3.9: En gris le chemin selon Newton, en noir selon Einstein.

L'expérience proposée par I.Shapiro<sup>9</sup> n'est possible à mettre en oeuvre qu'avec le secours de la technologie moderne car elle nécessite des mesures de temps très précises. Le principe est simple, on envoie un puissant signal radar se réfléchir sur une planète intérieure (ici Mercure) et on mesure le temps qu'a mis le signal pour faire l'aller-retour Mercure-Terre. Si on suppose que les ondes électromagnétiques voyagent en ligne droite on a un temps de parcours dans le cadre théorique classique. Mais puisque l'espace au voisinage du soleil est courbé, le signal radar va lui aussi suivre une trajectoire incurvée d'où un retard par rapport au temps de parcours théorique. Cet effet est d'autant plus marqué que la trajectoire du signal frôle le soleil au plus près. On va donc calculer le temps de parcours entre deux points en utilisant l'équation 3.25. On posera  $E = 0$  puisqu'on travaille avec des photons et on considèrera une nouvelle fois la plus petite distance au soleil  $r_0$  où  $dr/d\phi = 0$  ce qui nous permet d'avoir :

$$J^2 = \frac{r_0^2}{B(r_0)}$$

L'équation 3.25 devient :

$$A^3(r) \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + A(r_0) \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - A(r) = 0$$

On en retire une expression permettant de calculer le temps nécessaire à une onde électromagnétique pour voyager d'un point  $r$  au point  $r_0$  :

$$t_{r_0}^r = \int_{r_0}^r A(r) \left( 1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (3.44)$$

<sup>9</sup>I.I.Shapiro,Phys.Rev.Letters,13,789(1964)

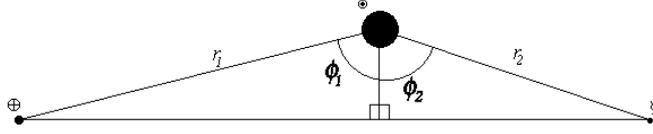


FIG. 3.10: Longueurs dans le cas d'un mouvement plan.

Et donc pour voyager d'un point  $r_1$  à un point  $r_2$  :

$$t_{12} = t_{r_1}^{r_0} + t_{r_0}^{r_1}$$

Si les rayons voyageaient en ligne droite (cf fig 3.10) on aurait (n'oublions pas que l'on a fixé  $c = 1$ ) :

$$t_{r_0}^{r_1} = \sqrt{r_1^2 - r_0^2}$$

L'effet est maximal quand les photons frôlent le soleil c'est à dire  $r_0 \approx R_\odot$ , et que mercure est proche de sa conjonction supérieure, le retard de Shapiro est alors :

$$\Delta t = 2(t_{r_\oplus}^{R_\odot} + t_{R_\odot}^{r_\diamond} - \sqrt{r_\oplus^2 - R_\odot^2} - \sqrt{R_\odot^2 - r_\diamond^2}) \quad (3.45)$$

où  $r_\diamond$  est la distance soleil-mercure. Comme l'effet est très faible, on doit connaître la distance  $\sqrt{r_\oplus^2 - R_\odot^2} - \sqrt{R_\odot^2 - r_\diamond^2}$  presque au kilomètre près ! Afin de minimiser l'impact des imprécisions sur  $r_\oplus$  etc... on va évaluer de manière approchée l'intégrale 3.44 en faisant apparaître des termes  $\sqrt{r^2 - r_0^2}$  qui s'annuleront ceux de l'équation 3.45. Pour cela, on va approximer l'intégrand en négligeant systématiquement tout les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en  $1/r$ . On suppose donc que :

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r} \quad A(r) \approx 1 + \frac{2MG}{r} \quad (3.46)$$

Comme d'autre part :

$$(\sqrt{r^2 - r_0^2})' = \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

On va faire apparaître ce terme dans l'intégrand, on va approcher le terme sous le radical :

$$\begin{aligned} 1 - B(r)A(r_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 &\approx 1 - \left(1 + 2MG \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \\ &= \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) \left(1 - \frac{2MG r_0}{r(r + r_0)}\right) \end{aligned}$$

En négligeant le terme en  $1/r r_0$  considéré comme d'ordre 2. L'intégrand sera donc :

$$I = \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2MG r_0}{r(r + r_0)}\right)^{-1/2} A(r)$$

On va faire un développement limité à l'ordre 1 de  $(1 - x)^\alpha \approx 1 - \alpha x$  :

$$\left(1 - \frac{2MG r_0}{r(r + r_0)}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{MG r_0}{r(r + r_0)}$$

L'intégrand devient alors :

$$I \approx \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{2MG}{r} + \frac{MG r_0}{r(r + r_0)} + \underbrace{\frac{2M^2 G^2 r_0}{r^2(r + r_0)}}_{o(1/r)}\right) \quad (3.47)$$

Ainsi :

$$t_{r_0}^{r_1} \approx \int_{r_0}^{r_1} \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} dr + 2MG \int_{r_0}^{r_1} (r^2 - r_0^2)^{-1/2} dr + MG r_0 \int_{r_0}^{r_1} \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-1/2} (r(r + r_0))^{-1} dr \quad (3.48)$$

on peut intégrer cette expression :

$$t_{r_0}^{r_1} \approx \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2MG \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) + MG \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \quad (3.49)$$

Comme le rayon du soleil est petit devant les distances considérées, on peut admettre que  $R_\odot + r_\oplus \approx r_\oplus$  et de même pour  $r_\diamond$ . Donc :

$$MG \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \approx MG \quad r = r_{\oplus, \diamond}$$

Cette approximation peut aussi être faite dans le terme :

$$MG \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) \approx MG \ln \left(\frac{2r}{r_0}\right) \quad r = r_{\oplus, \diamond}$$

puisque le logarithme minimise les erreurs ainsi commises. Finalement on peut réécrire 3.45 :

$$\Delta t \approx 4MG \left(1 + \ln \left(\frac{4r_\diamond r_\oplus}{R_\oplus^2}\right)\right) \quad (3.50)$$

Cette valeur vaut à peu près 72Km soit, remis à l'échelle, à peu près 240 $\mu$ s. Une telle précision sur une durée de trajet d'à peu près vingt minutes n'est pas irréaliste mais 240 $\mu$ s est un retard maximum! et plusieurs difficultés techniques surgissent. Si la précision des mesures est à 10 $\mu$ s alors on doit connaître les valeurs de  $r_\oplus, r_\diamond \dots$  à 2Km près! ce que l'astronomie optique ne permet pas. De plus quand le faisceau radar est réfléchi par Mercure il subit une diffusion qui nuit encore à la précision des mesures. Malgré tout cela, I.Shapiro et son équipe obtinrent des résultats en accord avec la théorie lors de leurs premières expériences. Ils utilisèrent le radar Haystack du laboratoire Lincoln durant la conjonction supérieure de Mercure du 28 avril au 20 Mai 1967 et du 15 août au 10 septembre 1967. Le même type d'expérience fut refaite par une équipe du Jet Propulsion Laboratory en utilisant les sondes Mariner 6 et 7 de Mars à juin 1970, les résultats furent en accord à 5 pour cent près avec la théorie de la relativité générale.

### 3.9 Conclusion

Les expériences développées ici sont des classiques, les deux premières ont fait de la relativité générale ce qu'elle est aujourd'hui : La théorie moderne de la gravitation. La troisième, plus récente est un des premiers exemples d'application des techniques modernes aux mesures fines que nécessite la relativité. Aujourd'hui, d'autres défis attendent les expérimentateurs, la détection des ondes de gravitation par exemple nécessiterait de mesurer la distance entre deux objets et de détecter une variation de longueur relative avec une précision de l'ordre de  $10^{-18}$  (la distance de la terre à la lune à l'épaisseur d'un atome près!), ces extraordinaires contraintes n'ont pas fait reculer les physiciens : grâce à un cylindre d'aluminium entouré de quartz piezo-electriques on a réussi à atteindre des précisions de  $10^{-15}$ . Plus récemment les projets des interféromètres VIRGO(en Europe) et LIGO (au Etats-Unis) ambitionnent d'atteindre des précisions de  $10^{-22}$ , ce qui permettrait de mesurer le rayonnement gravitationnel d'un système binaire. Pour certain, on a mesuré une baisse de leurs périodes de rotation (d'à peine  $75\mu s$  par an) qui trahirait une perte d'énergie due à un rayonnement gravitationnel. Si la relativité continue donc d'être éprouvée elle surtout devenue un formidable outil de précision pour les astronomes, les physiciens, les ingénieurs... et même les philosophes. Car la relativité a des implications d'ordre cosmique, c'est la seule théorie qui permette à la science d'avoir une cosmologie, de théoriser sur le début de l'univers et de spéculer sur son devenir. Jusqu'ici ces questions restaient l'appanage des religions, aujourd'hui, la science a une genèse. Bien sur, la relativité n'est pas pour autant une théorie ultime ; elle et la seconde grande révolution de la physique du vingtième siècle : la mécanique quantique, sont incompatibles, ce qui constitue un des plus grand problème de la physique contemporaine. La nature nous semble divisée en deux mondes qui s'ignorent et qui obeissent à des lois fondamentalement différentes, la théorie quantique règne sur les petites échelles avec autant de succes que la relativité sur les grandes et nul ne sait si il faut "quantifier" la gravité ou "relativiser" la mécanique quantique pour enfin guérir la "schizophrénie" de la physique moderne. De nombreuses tentatives furent faites, par Einstein lui-même tout d'abord qui le premier chercha sans succes une théorie du "champs unique". Aujourd'hui encore, la théories des supercordes, la relativité fractale, sont des tentatives parmi d'autres essayant de contredire le physicien Wolfgang Pauli qui un jour prononça cette phrase désormais célèbre : "nul ne pourra réunir ce que la main de Dieu a séparée." ; humilité ou pessimisme?...

#### Remerciements :

Je tient à remercier tout ceux qui m'on permis de travailler sur ce sujet passionnant, en particulier :

- Mr Joachim Asch, mon tuteur, qui me proposa ce sujet "sur mesure" pourtant bien loin de son domaine de recherche habituel.
- Mr Thomas Shücker, sans qui rien n'aurait été possible.

## Annexe A

# Mouvement dans un potentiel central newtonnien

La force de gravitation selon Newton est :

$$\vec{F}(r) = \frac{-MmG}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{A.1})$$

où  $M$  et  $m$  sont les masses des deux corps en interaction réciproques,  $G$  la constante de gravitation et  $e_r$  le vecteur unitaire  $\frac{r}{||r||}$ . La force dérive d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\nabla\Phi \quad \text{et} \quad \Phi = -\frac{MG}{r}$$

Si on applique le théorème du moment cinétique à la force de gravitation on à :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$$

donc le moment cinétique se conserve, ce qui implique que le mouvement est plan et de plus :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr\vec{e}_r \wedge \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt}$$

or

$$\frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

et ainsi :

$$||\vec{L}|| = mr^2\dot{\theta} = J \quad J \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.2})$$

La force de gravitation est conservative donc on a conservation de l'énergie mécanique somme de l'énergie mécanique et de l'énergie potentielle :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \Phi \quad (\text{A.3})$$

On a

$$E_c = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = \frac{m}{2}\|\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}e_\theta\|^2$$

or on a d'après A.2

$$J^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 \Rightarrow r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{J^2}{r^2 m^2}$$

donc :

$$E = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{MmG}{r} \quad (\text{A.4})$$

Ainsi on appellera  $V$  le potentiel effectif :

$$V = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{MmG}{r} \quad (\text{A.5})$$

On utilisera l'équation A.4 pour avoir une équation polaire de la trajectoire dans le plan équatorial, on a :

$$E = \frac{m}{2} \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{MmG}{r}$$

en substituant à  $\dot{\theta}$  sa valeur en fonction de  $J$  et en faisant un changement de variable  $u = 1/r$  on obtient :

$$E = \frac{J^2}{2m} \left( \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) - MmGu$$

en dérivant par rapport à  $\theta$  on obtient finalement :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Mm^2 G}{J^2} \quad (\text{A.6})$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$u_h = D \cos(\theta + \theta_0)$$

on fixera  $\theta_0 = 0$  par un choix convenable des coordonnées. Une solution particulière de l'équation est :

$$u_p = \frac{Mm^2 G}{J^2}$$

donc

$$u = u_h + u_p = D \cos \theta + \frac{Mm^2}{J^2}$$

ou encore

$$r(\theta) = \frac{J^2}{Mm^2 G} \left( 1 + \frac{L^2 D}{Mm^2 G} \cos \theta \right)^{-1} \equiv \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{A.7})$$

On reconnait l'équation d'une conique de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$ , la constante d'intégration  $D$  peut être déterminée en fonction de l'énergie mécanique ce qui permet de mettre en relation cette dernière avec l'excentricité de la conique et donc avec l'allure de l'orbite.

$$e^2 = \frac{2J^2 E}{m^3 M^2 G^2} + 1$$

Par les propriétés des coniques on à :

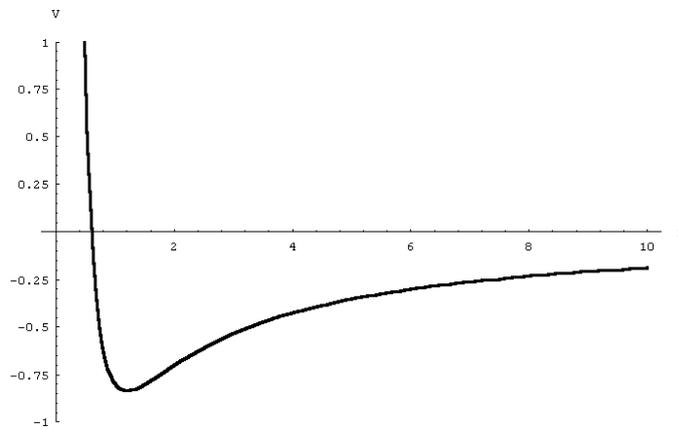


FIG. A.1: Allure générale du potentiel effectif newtonnien

- si  $e = 0$  alors  $E = E_{min}$  et la trajectoire est un cercle.
- si  $1 < e < 0$  alors  $E_{min} < E < 0$  et la trajectoire est une ellipse.
- si  $e = 1$  alors  $E = 0$  et la trajectoire est une parabole.
- si  $e > 1$  alors  $E > 0$  et la trajectoire est une hyperbole.

Sur le graphe du potentiel effectif (fig A.1) on peut voir qualitativement les différentes formes des orbites. Les intersections de  $V$  avec les droites  $y = E = cte$  correspondent à des valeurs de  $r$  où la particule change de direction, on voit que si l'on a deux intersections, la trajectoire est fermée, cela correspond aux valeurs négatives de l'énergie (trajectoires elliptiques et circulaires), alors que les autres valeurs correspondent à des trajectoires ouvertes (hyperbolique et paraboliques).

## Annexe B

# Propriétés du tenseur de courbure

On considèrera la forme covariante du tenseur de courbure de Riemann :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu\kappa}^{\rho}$$

Un calcul fastidieux nous amène à :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\kappa\nu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\mu\nu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda}) + g_{\eta\rho}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\rho} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) \quad (\text{B.1})$$

De cette dernière équation on tire des propriétés algébriques pour  $R$  :

- Symétrie :  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$
- Antisymétrie :  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$
- Cyclicité :  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\mu\kappa\nu} = 0$

C'est donc la propriété de symétrie qui fait que le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

est symétrique. De plus la propriété d'antisymétrie implique qu'il n'y a en fait qu'une seule façon de construire un tenseur d'ordre deux à partir du tenseur de courbure. Toutes les autres contractions possibles donnent  $R_{\mu\nu}$  ou bien  $-R_{\mu\nu}$ . De la même façon, le scalaire de courbure aussi est unique puisque :

$$R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\nu\kappa}$$
$$g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

et même le scalaire que l'on aurait pu former avec le tenseur d'orientation :

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

en vertu de la propriété de cyclicité. Une autre propriété importante peut être mise en évidence en prenant la dérivée covariante de l'équation B.1 dans un système de coordonnées tel que les symboles de Christoffel s'annulent (donc les corrections dues à la dérivation covariante disparaissent.) :

$$\nabla_{\eta} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} (g_{\lambda\mu,\kappa\nu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda} - g_{\lambda\kappa,\mu\nu} + g_{\mu\kappa,\nu\lambda})$$

En faisant des permutations circulaires on obtient l'identité de Bianchi :

$$\nabla_{\eta} R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_{\kappa} R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Cette équation est "covariante", elle ne dépend pas du système de coordonnées donc si elle est vrai dans ce système particulier elle est vrai dans un système général. En multipliant B.2 par  $g^{\lambda\nu}$  on trouve :

$$\nabla_{\eta} R_{\mu\kappa} - \nabla_{\kappa} R_{\mu\eta} + \nabla_{\nu} R_{\mu\kappa\eta}^{\nu} = 0$$

En multipliant une nouvelle fois avec  $g^{\mu\kappa}$  :

$$\nabla_{\eta} R - \nabla_{\mu} R_{\eta}^{\mu} - \nabla_{\eta} R_{\eta}^{\nu} = 0$$

et une dernière fois par  $g^{\nu\eta}$  :

$$\nabla_{\mu} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Cette équation exprime la conservation du tenseur d'Einstein cf 2.3.

## Annexe C

# Programmes Mathematica

On l'a vu, les calculs à effectuer en relativité générale sont parfois lourds et complexes, on peut utiliser avec profit un logiciel de calcul formel pour tout les calculs "mécaniques" (calcul des symboles de Christoffel par exemple.) ainsi que pour la résolution numérique de certain problèmes. On a utiliser le logiciel Mathematica de Wolfram Research, les pages qui suivent contiennent des "notebooks" contenant des calculs qui sont parfois cités en références dans le mémoire, ou d'autres qui servirent à en tracer les illustrations.

# Bibliographie

- [1] Steven Weinberg :Gravitation and Cosmology (John Wiley and Sons,Inc. 1972)
- [2] Misner-Thorne-Wheeler :Gravitation (W.H Freeman and Company San-Francisco 1973)
- [3] Murat Boratav-Ryszard Kerner :Relativité (ellipse 1991)
- [4] J.Bass :Cours de Mathematiques TOME 1 (Masson et Cie 1968)
- [5] R.K.Sachs-H.Wu General Relativity for Mathematicians (Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin 1977)
- [6] General Relativity An Einstein Centenary Survey (Edited by S.W Hawking and W.Israel 1979)
- [7] P.A.M Dirac :General theory of relativity (John Wiley and sons 1975)