

Alain Barrat

TRAVAUX DE RECHERCHE 2005-2008

Contexte

Mon travail de recherche s'est déroulé jusqu'en août 2008 au sein de l'équipe de physique statistique du LPT, et avec des collaborations nombreuses nationales et internationales. Mes travaux ont concerné deux thématiques principales : les matériaux granulaires d'une part, et les réseaux complexes et leurs applications interdisciplinaires d'autre part.

Milieux granulaires : gaz granulaires

De par les échelles d'énergie mises en jeu, les milieux granulaires peuvent être considérés comme à température nulle. Ceci implique que l'on doit leur apporter de l'énergie afin de leur permettre d'explorer l'espace des phases, et que toute dynamique s'étudie comme la réponse à une perturbation extérieure.

Le cas des granulaires fortement vibrés, ou *gaz granulaires*, est particulièrement intéressant car il fournit un paradigme pour les systèmes en état stationnaire hors d'équilibre. De nombreuses expériences sont menées afin d'explorer la riche phénoménologie de ces systèmes, les instabilités, les distributions de vitesse, etc...

Les études théoriques utilisent en général le modèle des sphères dures inélastiques, qui permet de reproduire de nombreux phénomènes expérimentaux observés dans des systèmes granulaires fortement vibrés. Ce modèle considère des sphères dures de même masse qui évoluent en dimension d avec des collisions binaires, conservant la quantité de mouvement mais inélastiques : à chaque collision, une fraction $(1 - \alpha)$ de la composante normale de la vitesse relative est dissipée (α est appelé coefficient de restitution), et donc de l'énergie est perdue. Usuellement α est constant ; la limite $\alpha = 1$ correspond à des sphères parfaitement élastiques.

Propriétés de l'équation de Boltzmann inélastique

En collaboration avec M. Ernst et E. Trizac, nous nous sommes intéressés à la généralisation de l'équation de Boltzmann inélastique et au comportement des solutions correspondantes. Cette équation décrit l'évolution de la distribution des vitesses d'un gaz de sphères inélastiques. Différentes formes d'interaction entre sphères, et différents types d'injection d'énergie, correspondent à différentes équations. Bien que l'on ne sache pas les résoudre complètement de manière analytique, il est possible de développer des méthodes pour étudier certaines propriétés de leurs solutions. De plus, un algorithme de simulation permet de résoudre ces équations numériquement avec une grande précision. Nous nous sommes en particulier intéressés au comportement de la distribution à grandes vitesses, en fonction des paramètres d'interaction entre sphères et d'injection d'énergie. Nous avons ainsi montré que ces distributions ont génériquement une forme d'exponentielle étirée, avec un exposant dépendant des paramètres du modèle, et de plus des corrections sous-dominantes importantes. Des exponentielles étirées ont en effet été obtenues expérimentalement par divers groupes, et certains travaux ont pu laisser penser que la distribution obtenue était universelle. Nos résultats sur l'équation de Boltzmann, alliés à des simulations beaucoup plus réalistes de dynamique moléculaire, ont montré qu'on ne pouvait pas parler d'universalité. De plus, l'importance des corrections sous-dominantes nous a permis de montrer qu'une procédure de fitting qui n'en tient pas compte pourrait fausser l'interprétation de données expérimentales. D'autre part, des

comportements en loi de puissance sont obtenus dans des cas de stabilité marginale de l'état stationnaire. Dans le cas de la limite quasi-élastique, nous avons caractérisé le diagramme de phase du système et montré que des distributions de vitesse très particulières apparaissent comme solutions de l'équation de Boltzmann, comme des sommes de pics de Dirac, superposées ou non à une distribution à support continu.

Un milieu modèle hors d'équilibre

Une collaboration avec A. Puglisi, P. Visco, E. Trizac et F. van Wijland a porté sur l'étude de propriétés globales d'un gaz granulaire vibré, comme son énergie cinétique totale, ou la puissance injectée afin de la maintenir dans un état stationnaire. Nous avons d'une part montré comment interpréter de manière simple les récents résultats expérimentaux du groupe de N. Menon qui affirmaient avoir vérifié expérimentalement une extension du « théorème fluctuation » de Gallavotti et Cohen. Grâce à des arguments théoriques et des simulations numériques aussi proches des expériences que possible, nous avons reproduit les résultats expérimentaux et montré qu'ils s'expliquaient sans faire recours au théorème fluctuation. D'autre part, nous avons montré dans une catégorie de modèles de gaz granulaires que l'extension du théorème fluctuation n'est en fait pas valide, même si, sur les échelles de temps accessibles expérimentalement et numériquement, elle semble souvent vérifiée.

Toujours dans le cadre de divers modèles de gaz granulaires vibrés, nous avons étudié et caractérisé le comportement des fluctuations d'énergie cinétique. Lorsque l'énergie est injectée au système par les bords, les hétérogénéités spatiales déterminent ces fluctuations, qui peuvent ainsi être calculées par des approches hydrodynamiques qui négligent les corrélations, alors que des travaux précédents considéraient que ces corrélations étaient responsables de la forme fonctionnelle (non Gaussienne) de la distribution d'énergie. Nous avons également étudié le cas d'une injection d'énergie homogène, qui permet donc de se débarrasser des hétérogénéités spatiales. Dans ce cas, nous avons pu mettre en évidence l'effet (faible, et donc dominé, dans le cas précédent, par l'effet des hétérogénéités) des corrélations de vitesse entre particules, qui sont dues à l'inélasticité des collisions et à la taille finie du système.

Annihilation balistique

L'approche hydrodynamique des milieux granulaires, qui consiste à écrire des équations pour l'évolution d'un certain nombre de quantités moyennées localement, s'est révélée très intéressante et fructueuse pour comprendre et prédire un certain nombre de phénomènes, bien que l'un des champs utilisés (l'énergie cinétique) ne soit pas conservé. Avec M.I. Garcia de Soria, P. Maynar, G. Schehr et E. Trizac, nous nous sommes intéressés à la validité d'une approche hydrodynamique dans un cas encore plus extrême, l'annihilation balistique : dans ce cas, deux particules entrant en collision peuvent s'annihiler avec une certaine probabilité. Le nombre de particules n'est donc plus conservé par la dynamique. Nous avons dérivé les équations hydrodynamiques décrivant l'évolution des différents champs (qui ne sont donc plus conservés) à partir de l'équation de Boltzmann linéarisée, et testé leurs prédictions par comparaison avec des simulations numériques, aussi bien de DSMC (qui résout l'équation de Boltzmann) que de dynamique moléculaire. Ceci nous a permis de montrer la validité de l'approche, qui a ensuite été utilisée pour obtenir l'évolution des fluctuations et des corrélations des quantités globales (nombre de particules, quantité de mouvement, énergie cinétique) dans ce modèle de dynamique hors d'équilibre.

Réseaux

De nombreux systèmes, aussi bien naturels qu'artificiels, peuvent être représentés par des réseaux c'est-à-dire par des ensembles de sites ou sommets reliés par des liens. L'étude de ces réseaux est par nature interdisciplinaire car ceux-ci apparaissent dans des domaines scientifiques aussi variés que la physique, la biologie, l'informatique ou bien les technologies de l'information. Les exemples de réseaux vont de l'Internet jusqu'aux interconnexions d'agents financiers ou bien aux réseaux d'interactions entre gènes et protéines à l'intérieur de la cellule. On peut aussi citer les grandes infrastructures telles que les réseaux électrique ou de transport, dont dépendent de manière cruciale nos sociétés modernes.

La recherche dans le domaine des réseaux complexes peut se diviser en plusieurs aspects, liés entre eux : (i) des études empiriques de leur structure, ce qui mène éventuellement à la définition de nouveaux outils statistiques ; (ii) des travaux de modélisation pour comprendre les mécanismes à l'origine de ces structures ; (iii) l'étude des nombreux phénomènes dynamiques ayant lieu sur les réseaux, et la conséquence des propriétés des réseaux complexes pour ces dynamiques ; (iv) plus récemment, l'étude de l'interaction entre la dynamique des réseaux et les processus sur réseau. Dans les paragraphes suivants, je détaille ma contribution à ces différents aspects de la thématique des réseaux complexes.

Structure des réseaux complexes

Bien que de nombreux travaux aient permis, dans les dernières années, d'obtenir une bonne compréhension globale de la structure des réseaux complexes, un certain nombre de points peuvent encore être explorés ou précisés. Une collaboration avec R. Pastor-Satorras nous a par exemple permis de proposer une méthode analytique permettant de calculer les corrélations entre les degrés de sites voisins pour toute une classe de modèles de réseaux.

D'autre part, à la suite de nos travaux (avec M. Barthélemy et A. Vespignani) portant sur la caractérisation et la modélisation de réseaux complexes pondérés, nous avons étendu notre modèle au cas de réseaux pour lesquels les nœuds résident dans un espace Euclidien et les liens ont un coût dépendant de la distance géographique entre les sites. L'existence de contraintes liées à ces coûts permet de retrouver toute une série de propriétés de réseaux réels comme le réseau des lignes aériennes.

Avec L. Dall'Asta, M. Barthélemy et A. Vespignani, nous avons également examiné l'importance de tenir en compte les hétérogénéités des poids (ou du trafic) dans les études sur la vulnérabilité des réseaux pondérés. Nous avons ainsi montré que les réseaux complexes sont encore plus fragiles si l'on s'intéresse aux propriétés de transport et de trafic que ce que l'on peut déduire d'une analyse purement topologique : la suppression de quelques sites bien choisis peut par exemple donner un réseau topologiquement intact à 80% mais transportant seulement 20% du trafic initial.

De nombreux réseaux complexes sont "sans-échelle", dans le sens où aucun degré (nombre de voisins d'un site) caractéristique n'apparaît : ce nombre peut varier sur de nombreux ordres de grandeur, avec de grandes fluctuations d'un site à l'autre. La relation entre cette absence d'échelle, typiquement traduite par des distributions de degré en lois de puissance, et le concept d'auto-similarité, correspondant lui aussi à l'apparition de lois de puissance, n'est cependant pas immédiat. L'auto-similarité est liée à une invariance par renormalisation, et différents travaux se sont attachés à définir une transformation de renormalisation adaptée aux réseaux. Certaines études ont alors affirmé que certains réseaux étaient autosimilaires, comme la Toile ou les réseaux d'interaction entre protéines. L'auto-similarité pour les réseaux correspond à une invariance de

ses distributions statistiques lorsque après la renormalisation.

La plupart des études utilisaient cependant une seule itération de la transformation de renormalisation. Nous avons au contraire étudié l'effet de renormalisations successives, définissant ainsi un flot dans l'espace des graphes. Nous avons analysé ce flot et ses points fixes, mettant en évidence l'existence d'exposants universels. Nous avons aussi montré que les points fixes, qui correspondent à des structures strictement autosimilaires, sont instables, et que des réseaux réels, qui comportent forcément une part de désordre, ne sont donc pas strictement autosimilaires. Au contraire, l'analyse de l'évolution de leurs corrélations lors de la renormalisation montre que cette transformation affecte fortement même les réseaux réels qui jusqu'ici étaient considérés comme autosimilaires.

Sociophysique

De nombreux modèles de physique statistique ont été développés pour décrire des phénomènes sociaux, comme la dynamique d'opinions et la formation de consensus. Citons par exemple le modèle des électeurs, où chaque individu peut avoir deux opinions différentes (donc pouvant être modélisées par une variable de spin valant $+1$ ou -1). A chaque instant, un individu pris au hasard choisit un de ses voisins et adopte son opinion. La convergence vers un état uniforme d'opinion a été étudiée par les physiciens statisticiens en particulier pour des individus pouvant interagir sur un réseau régulier en dimension finie. Cependant, l'étude des réseaux complexes a mis en évidence la très forte hétérogénéité des interactions sociales : une majorité d'individus sont peu connectés tandis qu'une fraction non négligeable de personnes a de nombreuses connaissances. En conséquence, de nouvelles études se sont intéressées à la dynamique et à l'évolution de tels modèles définis sur des réseaux d'interactions plus réalistes, fortement hétérogènes. Nous avons étudié la dynamique de plusieurs modèles de formation de consensus lorsque les agents interagissent selon différents types de réseaux d'interaction, homogènes ou hétérogènes. Nous nous sommes particulièrement intéressés à un modèle de formation décentralisée de système de communication entre agents pouvant avoir une mémoire et échanger des informations avec leurs voisins, appelé "Naming Game". Dans ce modèle, qui décrit en particulier l'expérience des "Talking Heads" de L. Steels, des agents essaient de se mettre d'accord sur le nom à donner à un objet. Les agents interagissent deux par deux, et ont une mémoire qui leur permet de stocker plusieurs noms possibles pour l'objet. A chaque interaction, un agent propose un des noms qu'il a en mémoire à un de ses voisins. Si le voisin a déjà ce nom dans sa mémoire, l'interaction est un succès et les deux agents conservent seulement ce nom dans leur mémoire. Dans le cas contraire, l'interaction est un échec, et le deuxième agent ajoute simplement ce nom à sa mémoire. Comme les interactions se font deux par deux, il n'est pas évident que les règles de convergence locale permettent d'obtenir une convergence globale vers un unique nom partagé par tous les agents. Nous avons comparé la dynamique de ce modèle selon que les agents sont sur un réseau régulier en dimension finie, sur des réseaux petit-monde de Watts et Strogatz, des réseaux aléatoires homogènes ou hétérogènes. Nous avons en particulier montré qu'il est plus avantageux que les agents ne puissent pas communiquer tous les uns avec les autres, ni qu'ils forment une topologie régulière (dimension finie) : dans le premier cas, les interactions avec de nombreux agents différents oblige à stocker un grand nombre de noms possibles en mémoire avant d'obtenir une convergence ; dans le second cas, le processus peut être relié à une croissance de domaines, et la convergence est très lente. Les réseaux petit-monde permettent par contre d'obtenir une convergence rapide bien que peu de mémoire soit nécessaire. Nous avons aussi caractérisé l'effet des différentes propriétés des réseaux complexes. Par exemple, nous avons montré comment une structure de communautés permet une convergence locale dans chaque communauté mais freine la convergence globale.

Réseaux complexes et épidémiologie

Grâce à une série de rencontres avec des chercheurs de l'INSERM, nous avons pu utiliser de nouvelles connaissances en épidémiologie pour les combiner avec notre expertise dans la thématique des réseaux complexes, et en particulier des réseaux de transport. Nous avons ainsi développé un modèle de propagation d'épidémies au niveau mondial, qui utilise le réseau des lignes aériennes. Dans une première étude, nous avons utilisé un modèle simple et peu réaliste de maladie afin de nous focaliser sur des questions d'ordre théorique (nos projets comportent l'étude de modèles plus réalistes de maladies infectieuses). En pratique, chaque site du réseau de transport représente une ville, et donc un ensemble d'individus. On doit alors modéliser l'épidémie à deux niveaux : une dynamique d'infection à l'intérieur de chaque ville (où par exemple on utilise l'approximation de type champ moyen que chaque individu est potentiellement en contact avec tous les autres) et une dynamique de voyage entre les villes, données par la structure complexe et hétérogène du réseau de transport. Les modèles utilisés s'écrivent alors comme une série d'équations de Langevin, pour lesquelles les techniques d'intégration numérique pour les processus stochastiques s'appliquent. Nous avons alors proposé des moyens pour caractériser et quantifier certains aspects importants de la propagation d'une épidémie dans un tel réseau. Par exemple, l'hétérogénéité de la propagation peut être quantifiée par une « entropie », et sa prévisibilité mesurée par le recouvrement entre deux réalisations stochastiques. Ces approches permettent également de comprendre, parmi tous les éléments caractérisant le réseau de transport, lesquels sont les plus influents dans cette hétérogénéité et cette prévisibilité partielle. Par exemple, l'existence de « hubs » ayant un grand nombre de connexions diminue la prévisibilité d'une épidémie en offrant de nombreuses directions possibles de propagation, tandis que la forte disparité des trafics sur les liens tend à la création de chemins préférentiels qui renforcent la possibilité de prévoir la propagation. Avec A. Gautreau et M. Barthélemy, nous avons également étudié le temps d'arrivée d'une épidémie dans un site du réseau, en fonction de son point de départ, et montré comment le relier à une quantité pouvant facilement être calculée une fois le réseau donné. Ceci permet aussi de prédire avec une bonne précision l'ordre d'arrivée d'une propagation dans les différents sites du réseau.

D'autre part, nous avons utilisé notre modèle dans des contextes réalistes. En utilisant un modèle pris dans la littérature d'épidémiologie pour le SRAS, nous avons pu reproduire les données de l'OMS concernant cette épidémie, montrant ainsi que le trafic aérien suffit en très grande partie à la modéliser. Nous avons aussi utilisé notre modèle pour évaluer des scénarios concernant une possible pandémie de grippe. Ceci nous a permis de montrer qu'une restriction du trafic aérien n'aurait qu'un impact très limité sur la propagation de la pandémie, tandis que l'utilisation d'antiviraux serait efficace (dans l'hypothèse où aucune résistance aux antiviraux n'apparaîtrait). Dans l'hypothèse de stocks limités d'antiviraux, nous avons aussi montré que la propagation serait beaucoup mieux contenue si les pays les mieux préparés donnaient une fraction limitée de leurs stocks qui pourrait être gérée de façon globale, et que même les pays donateurs auraient alors intérêt à cette redistribution partielle. Ces travaux ont donné lieu à plusieurs communiqués de presse et articles dans la presse quotidienne.

Interaction entre dynamique des réseaux et dynamique sur réseau

De nombreuses études ont porté sur les conséquences de la structure des réseaux complexes sur la dynamique des processus y ayant lieu. Dans toutes ces études, les réseaux étaient considérés comme des objets statiques. Cependant, les réseaux complexes sont en général des objets évoluant dynamiquement, éventuellement sur les mêmes échelles de temps que les processus dynamiques

étudiés, et parfois en réponse à ces dynamiques. Le couplage entre l'évolution de la topologie du réseau et les processus dynamiques peut alors donner lieu à des effets complexes. Dans ce cadre, nous avons étudié avec B. Kozma et C. Nardini deux modèles de formation d'opinion, le modèle des électeurs pour lequel chaque agent a une opinion qui peut être soit $+1$ soit -1 , et le modèle de Deffuant, où l'opinion est une variable continue. Nous avons montré dans les deux cas que le caractère dynamique du réseau a des conséquences importantes. Pour le modèle des électeurs par exemple, il peut empêcher la formation du consensus pendant des temps croissant exponentiellement avec le nombre d'agents dans le réseau. Pour le modèle de Deffuant, il change quantitativement et qualitativement le diagramme de phase du modèle et le rend d'autre part plus robuste par rapport à la modification de certains ingrédients du modèle.