IUT-R&T 2ème Année
Université Aix-Marseille II

Traitement Numérique du Signal
TD

F. Briolle

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD n°1
Echantillonnage -Quantification

Exercice 1

On considère un signal s(t)= cos(2*pi*f_0*t). Illustrer les effets du sous échantillonnage lorsque Fe=3*f_0/2 .
Même exercice avec Fe = f_0/2

Exercice 2

Les signaux audio stéréo sont numérisés sur 16 bits à la fréquence d'échantillonnage Fe = 44.1 kHz
a) déterminer le rapport $(S/B)_{dB}$ pour une sinusoïde à plein échelle.
b) le nb de bits est multiplié par 1.05 (bit d'horloge, correcteur d'erreur, contrôle, affichage, …). Quel est le débit du système d'enregistrement ?
c) on peut enregistrer 1h de musique sur un CD. Evaluer le nombre de bits que l'on peut stocker.
d) a titre de comparaison : un dictionnaire peut posséder jusqu'à 1500 pages, 2 colonnes par page, 100 lignes par colonne, 8 mots par ligne, 6 lettres par mot. Il faut 7 bits pour coder une lettre. Combien de dictionnaires peut on stocker sur un CD ?

Exercice 3

On dispose d'un canal de transmission dont le débit est de 36 000 bits/s pour transmettre de la parole. Trouver les valeurs adéquates de la fréquence d'échantillonnage Fe et du nb de bits de quantification, sachant que Fmax = 3.2 kHz. Quel est le rapport $(S/B)_{dB}$ pour une sinusoïde à pleine échelle ? pour une sinusoïde à -30 dB ?

Exercice 4

On échantillonne un signal à la fréquence de Nyquist (2*Fmax) et on quantifie sur L niveaux.
Quelle est la durée τ des bits du signal codé ?
Application : Fe = 8 000 Hz

Exercice 5

On considère un signal audio dont le spectre s'étend de 300Hz à 3300Hz. Echantillonné à la fréquence d'échantillonnage Fe = 8000 Hz. On spécifie un rapport $(S/B)_{dB}$ en sortie de 40dB.
a) sur combien de bits doit on quantifier le signal ? Combien y a-t-il de niveaux de quantification ?
b) on veut maintenir le rapport $(S/B)_{dB}$ égal à 40 dB pour des signaux dont la dynamique varie de 0 à -30 dB. Sur combien de bits doit on transmettre le signal ?
c) même question dans le cas de la loi A.
Dans ce cas $(S/B)_{dB} = 10 \log_{10}(3*C^2*2^{2N}/A^2)$ C=16 A=87.6

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD n°2
Distribution, Transformation de Fourier

1- Distribution de Dirac et convolution

Démontrer que :

1- La distribution de Dirac est l'élément neutre de la convolution :

$(\partial * x)(t) = (x * \partial)(t) = x(t)$

2- $(\partial_{t_0} * x)(t) = (x * \partial_{t_0})(t) = x(t - t_0)$

3- Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

Soit le peigne de Dirac, de période T_E définit par :

$$P_{TE} = \sum \delta(t - kT_E) \qquad k \in [-\infty , +\infty]$$

a) Tracer cette le peigne de Dirac en fonction du temps.

b) P_{TE} est une fonction périodique qui peut être décomposée en série de Fourier. Calculer les coefficients c_n de la série. Ecrire P_{TE} sous la forme d'une série de Fourier.

c) En déduire que la décomposition spectrale d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, de période F_E et d'amplitude F_E.

4- Transformée de Fourier d'une porte

a) Tracer, en fonction du temps, la fonction suivante :

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau & \text{pour } |t| < \tau \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

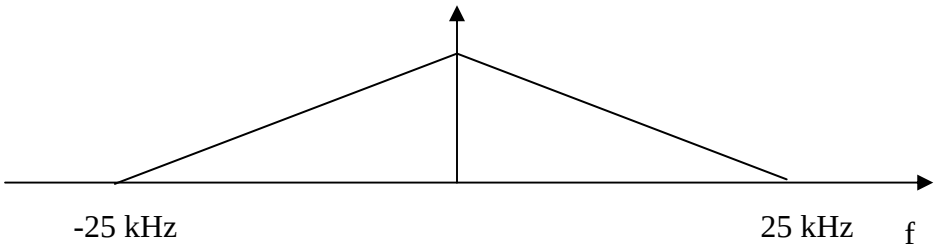
b) Calculer la transformée de Fourier de cette fonction et tracer, en fonction de la fréquence, le module de cette transformée.

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD n°3
Restitution analogique des signaux : suréchantillonnage

Objectif : étude d'une application développée à partir du théorème de Shannon : le sur-échantillonnage des signaux audionumériques.
Pour obtenir une restitution analogique de signaux audionumériques mémorisés sur un CD (Compact Disc), il est nécessaire de procéder à un sur-échantillonnage des signaux. La technique utilisée est exemple d'application du théorème de Shannon .
Son Hi-Fi : bande 5Hz-20kHz ; fréquence d'échantillonnage 44.1 kHz ; quantification 16 bit

1- Filtre anti-repliement

Le signal est tout d'abord filtré passe-bas par un filtre anti-repliement de fréquence de coupure de 20 kHz ; ce filtrage nous assure que le signal est à bande limitée et ne contient aucune fréquence au-delà de 20 kHz. Le signal musical est ensuite échantillonné à la fréquence Fe = 44.1 kHz et quantifié sur 16 bits.
Le spectre du signal musical est représenté par la figure ci-dessous :



a) Représenter le spectre du signal filtré passe-bas par le filtre anti-repliement.
b) Représenter le spectre du signal échantillonné $|Se(f)|$.
c) Représenter le spectre du signal échantillonné qui n'aurait pas été filtré passe-bas. Commentaires.

2- Restitution analogique du signal par filtrage passe-bas

A partir des échantillons contenus sur le CD on souhaite reconstituer le signal analogique s(t), pour pouvoir écouter le signal musical. Une technique est de filtrer passe-bas le spectre du signal échantillonné Se(f) afin de retrouver le spectre original, S(f), du signal analogique. Ce filtre passe-bas doit avoir les caractéristiques suivantes : laisser passer l'intégralité du signal entre [0, 20 kHz] et atténuer la première fréquence de repliement d'un facteur 100.

a) Calculer les caractéristiques de ce filtre (dB/octave ou dB/décade donc ordre du filtre)et en déduire qu'il est impossible à réaliser
b) Montrer que si le signal analogique est échantillonné à 4 x 44.1 kHz, alors il suffit d'utiliser un filtre du troisième ordre pour réaliser les performances demandées plus haut (bande passante [0, 20 kHz] ; atténuation de la première fréquence de repliement d'un facteur 100).

3- **Sur-échantillonnage**

Il n'est pas possible d'augmenter la fréquence d'échantillonnage d'un facteur 4, car on aurait enregistré sur le CD un signal musical d'une durée 4 fois plus courte, soit 18 mn environ. Quelles solutions proposez vous ?

La technique utilisée par les constructeurs de lecteur de disques CD est de sur-échantillonner le signal en calculant les 3 échantillons compris entre nTe et (n+1)Te. Pour cela ils utilisent le théorème de Shannon qui permet de restituer, pour tout instant t, le signal analogique à partir de ses échantillons :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[nT_e] \frac{\sin(\pi \, \mathrm{F_e}(t - nT_e))}{\pi \, \mathrm{F_e}(t - nT_e)}$$

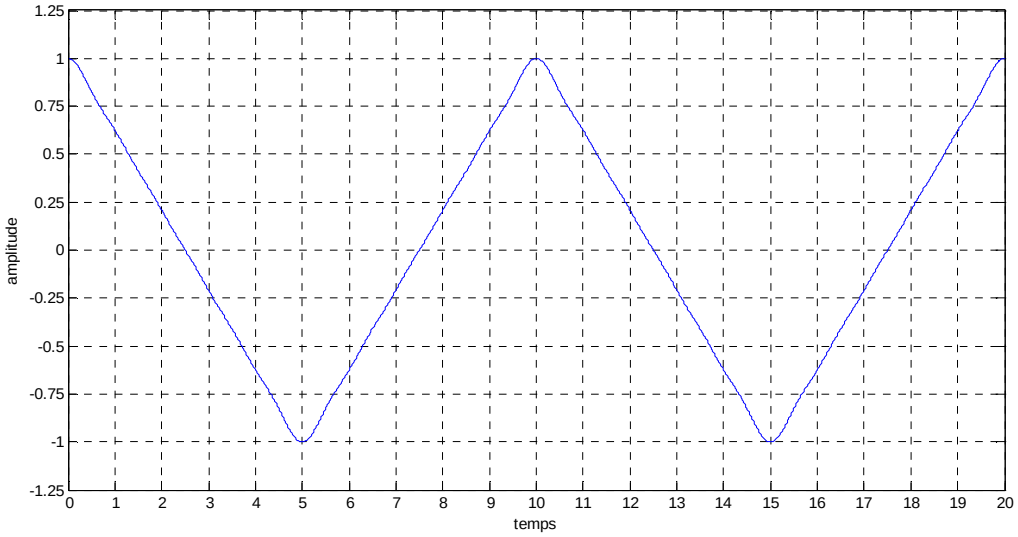
a) Calculer $s(t = \mathrm{T_e}/4)$ avec $-2 \le \mathrm{n} \le +2$ puis $-4 \le \mathrm{n} \le +4$
b) Calculer $s(t = \mathrm{mT_e} + \mathrm{T_e}/4)$ avec $-2 \le \mathrm{n} \le +2$ puis $-4 \le \mathrm{n} \le +4$

La technique utilisée par les constructeurs est celle que vous venez de réaliser, avec $-48 \le \mathrm{n} \le +48$

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD n°4
Echantillonnage, quantification, Transformée de Fourier Discrète

1. signal échantillonné

Soit le signal s(t), de durée 20 s, représenté ci-dessous. Représenter sur la figure (par des 'o') les valeurs du signal échantillonné toutes les 2s.

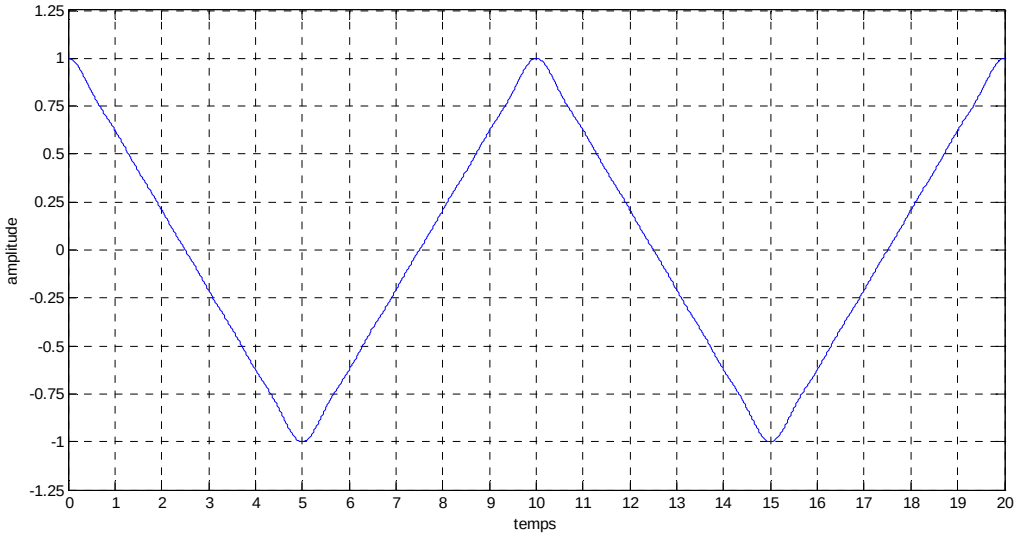


2. signal quantifié

On quantifie le signal sur 2 bits. Combien y a-t-il de niveaux de quantification ?
Représenter sur la figure (par des '*') les valeurs du signal quantifié sur 2 bits, sachant que l'on choisi la loi de quantification suivante (vue en TD) :

$$mq - q/2 \leq s(nTe) < mq + q/2 \quad \rightarrow \quad s[nTe] = mq$$

Donner, pour chaque échantillon, sa valeur quantifiée et sa valeur «codée».



3. Calcul de la Transformée de Fourier d'un signal

On peut calculer la Transformée de Fourier Discrète d'un signal, S[m Δf], pour toutes les fréquences f = m Δf, à partir du signal échantillonné s[nTe].

$\Delta f = \frac{1}{NTe}$ pour $-N/2 \leq m \leq N/2-1$ alors $-Fe/2 \leq f \leq Fe/2 - \Delta f$

$$S[m\Delta f] = \sum_{n=0}^{N-1} s[nTe] e^{-2i\pi \frac{nm}{N}}$$

Application :

a) Soit le signal « porte » définit par :

$s(t) = 0$ pour $-10s \leq t < -5s$
$s(t) = 1$ pour $-5s \leq t < 5s$
$s(t) = 0$ pour $5s \leq t < 10s$

Représenter ce signal en fonction du temps

b) Représenter, sur la figure précédente, le signal échantillonné toutes les secondes (Te=1s). Que valent les 20 échantillons de ce signal ?
c) Représenter la Transformée de Fourier de ce signal
d) Représenter la Transformée de Fourier échantillonnée tous les Δf
e) Calculer les échantillons de le Transformée de Fourier discrète a partir de la valeur des échantillons temporels s[nTe] du signal

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD n°5
Filtrage passe-bas

Objectif : A partir d'une description d'un filtre analogique, calculer les caractéristiques du filtre : équation différentielle, réponse impulsionnelle, réponse en fréquence, gain du filtre, fonction de transfert.

Filtrage passe-bas du 1er ordre

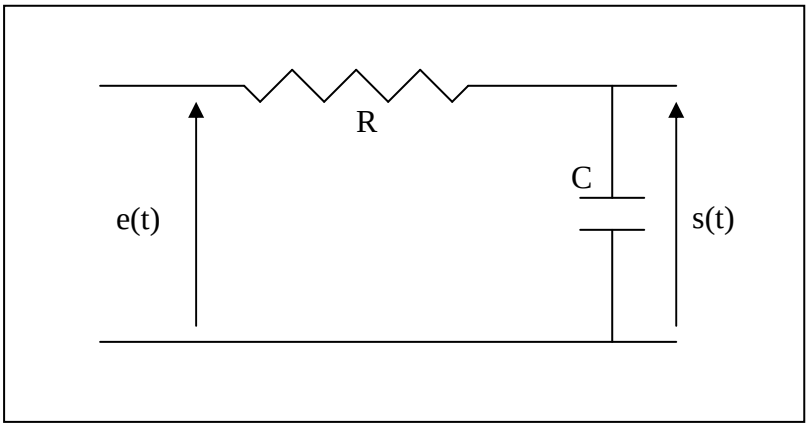
Considérons le filtre passe-bas du premier ordre réalisé à partir du montage électronique représenté sur la figure ci-dessous.

a) Etablir l'équation différentielle qui décrit ce filtre.

b) En déduire la fonction de transfert. Représenter, dans le plan complexe, les pôles et les zéros de cette fonction de transfert. Le filtre est-il stable ?

c) A partir de la fonction de transfert, donner l'expression de la réponse en fréquence du filtre. Tracer le gain ($10*\log_{10}(|H(f)|^2)$) en fonction de la fréquence (logarithme en base 10). Que vaut la fréquence de coupure, la pente du filtre (dB/octave).

d) En utilisant la transformée de Fourier inverse, calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre.



Filtre Passe-Bas

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD n°6
Filtres de Butterworth

Objectif : Etude des filtres de Butterworth, très utilisés dans les systèmes de transmission

Les filtres passe-bas de type RC (voir TD n°5) sont d'une faible efficacité : au-delà de la fréquence de coupure fc, l'atténuation n'est que de 20dB/décade. Ces filtres ont une réponse en fréquence dont le module au carré s'écrit sous la forme :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{fc}\right)^2} \qquad \text{avec } f_c = 1/RC$$

Pour améliorer la performance de tels filtres, il faut augmenter la décroissance de $|H(f)|$ en fonction de f. Les filtres de Butterworth sont des filtres performants : le module de la réponse en fréquence d'un filtre d'ordre N est de la forme :

$$|H_N(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{fc}\right)^{2N}} \qquad (1)$$

RMQ : Un filtre passe-bas RC est un Butterworth d'ordre 1.

a) Montrer que quelque soit l'ordre du filtre, le module $|H_N(f)|$ passe par la fréquence fc. Que vaut alors le gain du filtre pour cette fréquence ?

b) Soit f_s la fréquence de réjection de ce filtre, telle que :

$|f| \geq f_s$ alors $|H_N(f)| \leq 10^{-2}$

Représenter $|H_N(f)|$ en fonction de la fréquence.

c) La bande de transition est comprise entre $fc < |f| < f_s$. On appelle index de transition le rapport k = fc / f_s. Quel doit être l'ordre N du filtre pour que le rapport de transition soit égal à 4 ; 3.5 ; 2.

d) En remarquant que la réponse en fréquence d'un filtre peut s'obtenir à partir de la fonction de transfert $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ en posant $p = 2i\pi f$, montrer que :

$D^2(p) = 1 + (-1)^N p^{2N}$

e) Les N pôles du filtre sont solutions de l'équation $1 + (-1)^N p^{2N} = 0$ qui admet 2N solutions. En remarquant qu'un filtre analogique est stable si ses pôles sont à partie réelle négative, calculer, pour N = 2 ; 3 ; 4 les pôles du filtre de Butterworth d'ordre N. Représentez ces pôles dans le plan complexe.

f) Connaissant la valeur des pôles du filtre de Butterwoth d'ordre 2, calculer $H_2(p)$. En déduire $H_2(f)$ et montrer que $H_2(f)$ s'écrit sous la forme (1)

IUT-R&T 2ième Année
Traitement Numérique du Signal
TD 7
Systèmes linéaires

Objectif : calcul des principales fonctions et représentations décrivant un système linéaire

Systèmes linéaires, continus, invariant dans le temps

Deux systèmes linéaires H_1 et H_2 ont pour fonction de transfert :

$$H_1(p) = \frac{N_1(p)}{N_2(p)} = \frac{p^2 + 25}{(p+2)(p^2 + 6p + 25)}$$

et

$$H_2(p) = \frac{N_1(p)}{N_2(p)} = \frac{(p+2)(p^2 + 6p + 25)}{p^2 + 25}$$

On considère le système linéaire H_3 obtenu en mettant en série les deux systèmes linéaires H_1 et H_2 . Soit $H_3(p)$ sa fonction de transfert.

1- A l'aide d'un schéma montrant la mise en série des systèmes H_1 et H_2, calculer la fonction de transfert du système H_3.

2- Calculer les pôles et les zéros des fonctions de transfert $H_1(p)$. Représenter dans le plan complexe les pôles et zéros de la fonction de transfert. Que peut-on dire de la stabilité du filtre ?

3- Donner l'expression de la réponse en fréquence du filtre. Que vaut la réponse en fréquence du filtre pour f= $25/\pi$? Donner l'expression du module de la réponse en fréquence.

4- Quelle est l'expression de l'équation différentielle du filtre. De quel ordre est ce filtre ?

5- Mêmes questions pour la fonction de transfert $H_2(p)$

6- Mêmes questions pour la fonction de transfert $H_3(p)$