

A propos du T-shirt

Note du Directeur

Au cas où la signification *mathématique* du solide figurant sur ce T-shirt ne serait pas évidente...

Explication :

Il existe 14 façons d'associer (deux à deux) les symboles d'un quintuplet (a, b, c, d, e) . Par exemple : $a(b((cd)e))$, $(ab)((cd)e)$, etc. A chaque fois, il faut utiliser trois paires de parenthèses.

Les 14 sommets du polyèdre apparaissant sur le T-shirt sont associés à ces différents choix.

Deux sommets sont reliés par une arête si les deux choix correspondants diffèrent par le déplacement d'une seule paire de parenthèses.

Les solides ainsi obtenus sont appelés "associahèdres de Stasheff" ou "polytopes de Stasheff". Il ont été introduit par James Stasheff, dans *Homotopy associativity of H-spaces I*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275-292. L'article de Jean-Louis Loday *Realization of the Stasheff polytope*, *Archiv. der Mathematik* 83 (2004), 155-172 fournit une paramétrisation utilisée pour ce T-shirt.

Dans le cas présent il s'agit de l'associahèdre K_5 qui possède 14 sommets, 21 arêtes et 9 faces (six pentagones et trois quadrilatères).

Exercices proposés :

Mathématique : montrer que le nombre de sommets de l'associahèdre K_{n+1} est donné par le nombre de Catalan $\binom{2n}{n}/(n+1)$ et qu'on peut le représenter comme un polyèdre dont les sommets appartiennent à la sphère S^{n-2} (incluse dans R^{n-1}). Plus difficile (pour les amateurs d'opéradés) : montrer que le solide dessiné sur le T-shirt fournit la relation de cohérence pour les 3-catégories faibles.

Informatique : écrire (à l'aide des fonctions CONS, CAR et CDR) un programme Lisp qui donne, pour chaque entier, la liste des faces de l'associahèdre K_{n+1} .

Physique (ou chimie) : Relier les polyèdres K_{n+2} aux identités satisfaites par les symboles $3nj$, c'est à dire les coefficients de recouplage pour $n+1$ moments angulaire (spin). Trouver une interprétation des polyèdres K_n en théorie de la gravité quantique.

Remarque : Ce même associahèdre a été peint (tags) sur le local poubelle du CIRM, à coté de l'un des sept meubles self-duaux à six étages.

Revenons au T-shirts :

Il en existe un modèle avec l'explication au dos – les 14 paires de parenthèses – mais il faut s'apercevoir du fait que les deux dessins sont les mêmes ! Il existe aussi un modèle plus ésotérique sans explication...

Le T-shirt est disponible en plusieurs tailles.

Merci d'aider le CIRM !

R.C.

About the T-shirt

Note of the Director

In case the *mathematical* meaning of the solid appearing on the T-shirt is not obvious...

Explanation :

There are 14 ways to associate, pairwise, the symbols of a 5-plet (a, b, c, d, e) . For instance : $a(b((cd)e))$, $(ab)((cd)e)$, etc. Every time, one has to use three pairs of parenthesis.

The 14 vertices of the polyhedron appearing on the T-shirt are associated with these different choices.

Two vertices are linked by an edge whenever the two corresponding choices differ by the shift of a single pair of parenthesis.

The solids obtained in this way are called "Stasheff associahedra" or "Stasheff polytopes". They were introduced by James Stasheff, in *Homotopy associativity of H-spaces I*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275-292. The article by Jean-Louis Loday *Realization of the Stasheff polytope*, *Archiv. der Mathematik* 83 (2004), 155-172 provides a parametrization used for this T-shirt.

In the present case, this is the K_5 associahedron. It has 14 vertices, 21 edges and 9 faces (six pentagons and three quadrilaterals).

Homework

Mathematical : show that the number of vertices of the K_{n+1} associahedron is given by the Catalan number $\binom{2n}{n}/(n+1)$ and that you can draw it as a polyhedron with vertices belonging to the sphere S^{n-2} (included in the R^{n-1}). Something more difficult -for operads aficionados : show that the solid drawn on the T-shirt gives the coherence relation for weak 3-categories.

Computer science : Using the CONS, CAR and CDR Lisp functions, write a little program that gives, for each integer, the list of the faces of the K_{n+1} associahedron.

Physics (or chemistry) : Relate the K_{n+2} polyhedra to the identity obeyed by the $3nj$ symbols, i.e. the recoupling coefficients for $n+1$ spins. Find an interpretation for K_n polyhedra in quantum gravity.

Remark : The same associahedron has been painted on the trash bins of CIRM, next to the drawing that displays one of the seven self dual buildings with six floors.

Back to the T-shirts :

We have one kind of T-shirts with explanation on the back – the 14 sets of parenthesis – but one should understand that the two drawings are the same ! We have also another kind, more esoteric, without any explanation...

The T-shirts are available in different sizes.

Thank you for helping the C.I.R.M. !

R.C.