

**ESPACES FIBRÉS**  
et  
**CONNEXIONS**

Une introduction aux géométries  
classiques et quantiques  
de la physique théorique

Robert Coquereaux  
Centre de Physique Théorique  
Luminy - Marseille

A mes enfants Valérie, Eric et Raphaël

# Espaces fibrés et Connexions

Robert COQUEREAUX

Version 3.0<sup>1</sup>

1. Version 1.00 disponible sur le web le 1/5/97. Version 2.00 (mai 1998) : Ajout d'un dernier chapitre consacré à la géométrie non commutative. Version 3.00 (mai 2002) : améliorations mineures. Corrections et recompilation LaTeX en septembre 2016.



# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
Modèles mathématiques et réalité . . . . .	ix
Du classique au quantique . . . . .	xii
Guide de lecture, autocritique et perspectives . . . . .	xiv
	<b>1</b>
<b>1 Variétés différentiables</b>	<b>1</b>
1.1 Variétés topologiques . . . . .	1
1.1.1 Définition . . . . .	1
1.1.2 Variétés à bord . . . . .	1
1.1.3 Contre-exemples . . . . .	2
1.2 Variétés différentiables . . . . .	3
1.2.1 Variétés, cartes, atlas . . . . .	3
1.2.2 Atlas maximal . . . . .	4
1.2.3 Variétés et calcul différentiel “intrinsèque” . . . . .	5
1.3 Applications différentiables, difféomorphismes . . . . .	6
1.3.1 Définition . . . . .	6
1.3.2 Difféomorphismes et changements de coordonnées . . . . .	6
1.3.3 Fonctions différentiables . . . . .	7
1.4 Champs de vecteurs . . . . .	8
1.4.1 Notions élémentaires et intuitives . . . . .	8
1.4.2 Vecteurs, espace tangent et champs de vecteurs . . . . .	9
1.4.3 Règle de Leibniz . . . . .	11
1.4.4 Crochet de deux champs de vecteurs . . . . .	11
1.4.5 Repère naturel associé à une carte . . . . .	12
1.4.6 Changement de carte . . . . .	12
1.4.7 Repères mobiles (repères quelconques) . . . . .	13
1.5 Tenseurs et formes extérieures . . . . .	14

1.5.1	Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel . . . . .	14
1.5.2	Algèbre extérieure d'un espace vectoriel. Produit extérieur	17
1.5.3	Produit intérieur d'une forme par un vecteur . . . . .	19
1.5.4	Transformation du produit extérieur et du produit intérieur par endomorphismes . . . . .	20
1.6	Formes différentielles . . . . .	21
1.6.1	Définition . . . . .	21
1.6.2	La différentielle extérieure $d$ . . . . .	23
1.6.3	L'équation de Maurer-Cartan pour un repère mobile . . . . .	25
1.6.4	Produit intérieur d'une forme par un champ ou vecteurs	26
1.7	Application tangente et cotangente . . . . .	27
1.8	Dérivées de Lie . . . . .	29
1.9	Flots . . . . .	32
1.10	Orientation et intégration . . . . .	32
1.10.1	Orientation – Partition de l'unité . . . . .	33
1.11	Variétés riemanniennes (propriétés élémentaires) . . . . .	35
1.12	Divers . . . . .	40
1.12.1	Compléments sur les dérivations d'algèbre . . . . .	40
1.12.2	Cohomologie de De Rham . . . . .	42
1.12.3	Homologie de De Rham . . . . .	42
1.12.4	Espace des $p$ -vecteurs . . . . .	43
1.12.5	Espace des courants de De Rham . . . . .	44
1.12.6	Les algèbres de Frölicher – Nijenhuis et de Nijenhuis– Richardson . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Groupes de Lie et espaces homogènes</b>	<b>47</b>
2.1	Généralités sur les groupes de Lie . . . . .	47
2.1.1	Généralités et définitions élémentaires . . . . .	47
2.1.2	Exemples élémentaires de groupes classiques . . . . .	49
2.2	Généralités sur les algèbres de Lie . . . . .	49
2.2.1	Application exponentielle et algèbres de Lie . . . . .	49
2.2.2	Correspondance entre groupes et algèbres de Lie . . . . .	52
2.2.3	Classification des groupes et algèbres de Lie. Généralités.	58
2.2.4	Message . . . . .	62
2.3	Actions de groupes et représentations . . . . .	62
2.3.1	Généralités . . . . .	62
2.3.2	Groupe $G$ opérant à gauche sur un ensemble $E$ . . . . .	63
2.3.3	Action à droite (anti-action) . . . . .	63
2.3.4	Passage de la droite à la gauche (et inversement) . . . . .	63
2.3.5	Orbites, espace quotient . . . . .	64
2.3.6	Efficacité . . . . .	64

2.3.7	Liberté et stabilisateur . . . . .	65
2.3.8	Transitivité . . . . .	66
2.3.9	Action d'un sous-groupe $H$ sur un groupe $G$ , normalisateur, centralisateur . . . . .	66
2.3.10	Stratification . . . . .	67
2.3.11	Remarques . . . . .	67
2.4	Champs de vecteurs fondamentaux . . . . .	68
2.4.1	Cas d'un groupe de Lie agissant sur une variété . . . . .	68
2.4.2	Exemple : le groupe euclidien agissant sur le plan $\mathbb{R}^2$ . . . . .	70
2.4.3	Un cas particulier fondamental : le groupe $G$ agissant sur lui-même par translations à gauche et à droite . . . . .	71
2.4.4	L'action adjointe de $G$ . . . . .	73
2.4.5	Exemple : l'algèbre de Lie du groupe euclidien . . . . .	73
2.4.6	Exemple : champs invariants sur $SU(2)$ . . . . .	74
2.4.7	Une remarque sur les constantes de structure . . . . .	76
2.4.8	La forme de Maurer-Cartan . . . . .	76
2.5	Représentations . . . . .	78
2.6	Espaces homogènes . . . . .	78
2.7	Algèbres de Clifford et groupes Spin . . . . .	79
2.7.1	Définitions générales . . . . .	79
2.7.2	Le groupe $Spin$ . . . . .	80
2.7.3	Structure des algèbres de Clifford réelles . . . . .	83
2.7.4	La structure des algèbres de Clifford complexes . . . . .	88
2.7.5	Type des représentations . . . . .	89
2.7.6	Spineurs . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Espaces Fibrés</b> . . . . .	<b>93</b>
3.1	Généralités . . . . .	93
3.1.1	Le langage des fibrés . . . . .	93
3.1.2	Fibrations. Fibrés différentiables localement triviaux . . . . .	95
3.2	Espaces fibrés principaux . . . . .	98
3.2.1	La structure d'espace fibré principal . . . . .	98
3.2.2	Sections locales et trivialisations locales . . . . .	99
3.2.3	Exemple fondamental : le fibré des repères linéaires . . . . .	101
3.2.4	Sous-espace des vecteurs verticaux en un point $z$ d'un espace fibré . . . . .	102
3.2.5	Fibré principal trivial . . . . .	104
3.2.6	Formes basiques, invariantes et horizontales . . . . .	105
3.2.7	Exemples . . . . .	106
3.3	Fibrés associés . . . . .	115
3.3.1	Introduction . . . . .	115

3.3.2	Espaces fibrés associés généraux . . . . .	116
3.3.3	Espaces fibrés en espaces homogènes, associés à un fibré principal de groupe structural $G$ . . . . .	118
3.3.4	Fibration principale relative à un fibré quotient . . . . .	118
3.3.5	Espaces fibrés en . . . espaces fibrés . . . . .	119
3.3.6	Le fibré adjoint $E = Ad P$ . . . . .	120
3.3.7	Le rôle du normalisateur . . . . .	120
3.3.8	Les espaces fibrés vectoriels . . . . .	121
3.3.9	Trivialité des fibrés vectoriels, variétés parallélisables . . . . .	123
3.3.10	Sections de fibrés associés et champs . . . . .	124
3.4	Elargissement et réduction . . . . .	126
3.4.1	Définitions . . . . .	126
3.4.2	Elargissement (passage de $H$ à $G$ avec $H \subset G$ ) . . . . .	126
3.4.3	Réduction (passage de $G$ à $H$ avec $H \subset G$ ) . . . . .	127
3.5	Extension et quotient . . . . .	130
3.5.1	Extension (passage de $G$ à $\widehat{G}$ avec $G \sim \widehat{G} _H$ ) . . . . .	130
3.5.2	Quotient (passage de $G$ à $K$ avec $K \sim G _H$ , $H$ sous- groupe distingué de $G$ ) . . . . .	134
3.6	Groupe des automorphismes. Groupe de jauge . . . . .	135
3.6.1	Remarque terminologique . . . . .	135
3.6.2	Automorphismes verticaux d'un espace fibré principal (définition) . . . . .	135
3.6.3	Ecriture locale des transformations de jauge . . . . .	136
3.6.4	Deux autres définitions des transformations de jauge . . . . .	137
3.6.5	Automorphismes quelconques d'un espace fibré principal	137
3.6.6	Action des automorphismes sur les espaces fibrés associés	138
3.6.7	Le cas des espaces vectoriels (un cas trivial mais ins- tructif!) . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Connexions</b> . . . . .	<b>141</b>
4.1	Connexions dans un fibré principal . . . . .	141
4.1.1	Motivations . . . . .	141
4.1.2	Distributions horizontales équivariantes . . . . .	142
4.1.3	Relèvement horizontal . . . . .	143
4.1.4	Forme de connexion . . . . .	144
4.1.5	Ecriture locale de la forme de connexion : le potentiel de jauge . . . . .	145
4.2	Connexions dans les fibrés vectoriels associés . . . . .	147
4.2.1	Matrice de connexion $A_j^i$ , coefficients de connexion $A_{j\mu}^i$	147
4.2.2	Différentielle covariante des sections $\nabla$ , dérivée cova- riante $\nabla_\mu$ , parallélisme . . . . .	148

4.2.3	Remarques concernant les notations . . . . .	149
4.2.4	Loi de transformation des coefficients de connexion . .	151
4.2.5	Dérivation covariante des sections du fibré dual . . . .	151
4.2.6	Dérivation covariante dans les puissances tensorielles d'un fibré vectoriel . . . . .	152
4.2.7	L'opérateur $D$ . . . . .	153
4.2.8	Différentielle extérieure covariante $d^\nabla$ . . . . .	154
4.2.9	Différentielles et dérivées covariantes généralisées $\nabla$ . .	157
4.3	Courbure . . . . .	160
4.3.1	Linéarité de $(d^\nabla)^2$ . . . . .	160
4.3.2	Expression de l'opérateur de courbure dans les fibrés vectoriels associés . . . . .	160
4.3.3	Equation de structure pour la courbure . . . . .	162
4.3.4	Identité de Bianchi pour la courbure . . . . .	163
4.3.5	Transformation de jauge pour la courbure . . . . .	164
4.3.6	Forme de connexion, différentielle covariante et cour- bure dans les fibrés principaux (compléments) . . . . .	165
4.3.7	Écritures diverses de la courbure $F$ (récapitulatif) . . .	169
4.3.8	Connexions et opérations de Cartan . . . . .	170
4.3.9	Groupe d'holonomie d'une connexion, fibré d'holonomie	171
4.3.10	Réduction des connexions . . . . .	172
4.4	Cas particulier des connexions linéaires . . . . .	174
4.4.1	Définition et généralités . . . . .	174
4.4.2	Potentiel de jauge et courbure des connexions linéaires	175
4.4.3	Différentielle extérieure covariante (cas des connexions linéaires) . . . . .	177
4.4.4	Forme canonique (ou forme de soudure) . . . . .	180
4.4.5	Torsion . . . . .	181
4.4.6	Equation de structure pour la torsion . . . . .	183
4.4.7	Identités de Bianchi pour les connexions linéaires . . .	183
4.4.8	Dérivées covariantes secondes, hessien et identités de Ricci . . . . .	185
4.4.9	Tenseur de Ricci . . . . .	190
4.4.10	Courbes autoparallèles . . . . .	191
4.4.11	Connexions linéaires sur les groupes et espaces homogènes	191
4.5	Connexions métriques . . . . .	192
4.5.1	La métrique . . . . .	192
4.5.2	Compatibilité avec la métrique . . . . .	193
4.5.3	Calcul des coefficients de connexion . . . . .	195
4.5.4	Compléments sur le tenseur de Riemann. Propriétés de symétrie. . . . .	197

4.5.5	Equation des géodésiques . . . . .	198
4.5.6	Tenseur de Ricci, courbure scalaire et tenseur d'Einstein, courbures sectionnelles . . . . .	199
4.5.7	Dualité de Hodge et laplaciens . . . . .	201
4.5.8	Connexions spinorielles et opérateur de Dirac . . . . .	208
4.5.9	Métriques sur les groupes et espaces homogènes . . . . .	212
<b>5</b>	<b>Un saut dans l'infini</b>	<b>213</b>
5.0.1	Action du groupe de jauge sur l'espace des connexions	213
5.0.2	L'espace des orbites . . . . .	214
5.0.3	Conclusion . . . . .	215
<b>6</b>	<b>Calcul différentiel pour algèbres non commutatives</b>	<b>217</b>
6.1	Remarques philosophico-mathématiques sur les espaces non commutatifs . . . . .	217
6.2	Calculs différentiels . . . . .	219
6.2.1	Remarques . . . . .	219
6.2.2	L'algèbre différentielle des formes universelles $\Omega\mathcal{A}$ . . . . .	219
6.2.3	L'algèbre différentielle $\Omega_{Der}\mathcal{A}$ . . . . .	227
6.2.4	Algèbres différentielles pour espaces non connexes . . . . .	230
6.2.5	L'algèbre différentielle $\Omega_D\mathcal{A}$ . . . . .	231
6.3	Excursion au pays des mathématiques non commutatives . . . . .	234
6.3.1	Remarques et présentation générale . . . . .	234
6.3.2	Topologie non commutative et théorie de la mesure non commutative . . . . .	235
6.3.3	Calcul différentiel non commutatif . . . . .	236
6.3.4	Espaces fibrés non commutatifs et modules projectifs . . . . .	237
6.3.5	Connections généralisées en géométrie non commutative	238
6.3.6	Cohomologie des espaces non commutatifs . . . . .	240
6.3.7	Remarque finale . . . . .	245

# Préface

Il est quelquefois plus facile de présenter un livre en disant ce qu'il n'est pas et en dressant une liste des motivations de l'auteur qu'en essayant d'en expliciter le contenu.

Ce livre, bien qu'il contienne un exposé de géométrie différentielle (avec un accent particulier mis sur les groupes de Lie, la théorie des espaces fibrés, la théorie des connexions et la géométrie riemannienne) n'est certainement pas un cours de mathématiques traditionnel. En général les mathématiciens cultivent la précision du style et la concision du discours, alors que l'exposé qui suit essaye de présenter les idées importantes en faisant souvent appel à l'intuition, en effectuant de nombreux retours en arrière et en ne négligeant pas les clin d'oeil à la physique. On peut donc espérer que la lecture de l'ouvrage présent sera un peu moins aride que celle d'un traité traditionnel.

Ce livre n'est pas non plus un cours de physique théorique. Il y manque beaucoup trop d'informations ! Celui ou celle qui souhaite se lancer à la découverte de l'Espace-Temps et déchiffrer certains des mystères de notre univers devrait s'attaquer à de saines lectures (par exemple [5]). L'ouvrage présent ressemble plus à un cours de mathématiques qu'à un cours de physique ; la physique n'est cependant pas absente, au contraire : des idées physiques sont cachées derrière chaque paragraphe, et ce sont elles qui sont, la plupart du temps, à l'origine des notions "abstraites" que nous allons présenter.

Bien qu'il ne s'agisse pas là d'un ouvrage de vulgarisation sur la physique théorique ou les mathématiques, j'ai pourtant rédigé de nombreux paragraphes en pensant à certains de mes amis ayant une culture mathématique relativement modeste mais néanmoins dotés d'un esprit curieux et aimant vagabonder de temps à autres sur des terrains situés au confluent de l'infiniment petit, de l'infiniment grand, des mathématiques et de la métaphysique. Je dois dire, en relisant l'ouvrage après coup, que, de ce point de vue, j'ai peur d'avoir échoué : le contenu présenté ressemble plus à un cours de troisième cycle spécialisé qu'à un ouvrage de vulgarisation. . . Cela dit, je pense — et j'espère — qu'à la condition de commencer la lecture à la première page

sans essayer de démarrer en plein milieu, l'ouvrage reste accessible à tout lecteur disposant d'un bagage mathématique équivalent à celui qu'on est censé acquérir à l'issue d'un premier cycle universitaire, ou d'une classe de Mathématiques Spéciales. A propos de motivations, je dois aussi signaler que d'autres de mes amis, dotés d'une culture mathématique plus que respectable n'ont malheureusement jamais eu le temps ou la patience de traduire le jargon quelquefois flou des physiciens dans la langue bourbakiste qu'ils affectionnent. Le présent ouvrage, bien que résolument peu bourbakiste dans le style, est également écrit pour eux. Finalement, ce livre est également —et probablement surtout— écrit pour les étudiants en mathématiques ou en physique, mais qu'on ne vienne pas me demander “De quelle année?” ! En effet, certains des thèmes qui seront abordés peuvent être rencontrés dans un cours de maîtrise de mathématiques (ou de DEA) et on les trouvera souvent incorporés à un enseignement de troisième cycle de physique théorique ou de géométrie différentielle, mais d'autres thèmes, probablement aussi intéressants, et quelquefois même fondamentaux, risquent fort de ne figurer dans le programme d'aucun enseignement universitaire. L'étudiant, physicien ou mathématicien, trouvera peut-être, dans cet ouvrage, ce qu'il cherche (en utilisant l'index et la table des matières) et le non-spécialiste y trouvera peut-être ce qu'il ne cherchait pas. . .

Enfin, ce livre n'est pas un ouvrage de philosophie ou de métaphysique (Dieu m'en garde!) bien que certaines réflexions de nature éminemment philosophiques ne soient pas absentes des pages qui suivent, surtout dans la section Introduction.

La partie “géométrie différentielle” de ce travail est issue d'un cours de troisième cycle que j'ai eu l'occasion de donner pendant plusieurs années au sein du Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) de Physique Théorique, organisé au Centre de Physique Théorique, à Luminy (Marseille) ainsi qu'en 1997, dans le DEA de Physique Théorique organisé à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon. La partie “non commutative” (la dernière section) est un court extrait d'une série de cours que j'ai donnés dans les universités de Rio de Janeiro (URJ, UFRJ et CBPF), de Saragosse et de La Plata ainsi qu'à San Carlos de Bariloche, en 1996 et 1997. L'ouvrage a également servi de support à un cours semestriel de l'IMPA, Rio de Janeiro, en 2012 (Pós-Graduação em Matemática, curso de Doutorado).

# Introduction

## *Modèles mathématiques et réalité*

Qu'est ce que la "Réalité" ? Existe-t-elle seulement ? Que signifie le verbe "exister" de la proposition interrogative précédente ? Que le lecteur allergique aux discussions philosophiques se rassure, nous n'allons pas continuer longtemps dans cette direction. Cependant, pour ne pas nous enliser dans de faux problèmes sémantiques et pour bien apprécier en quel sens nous comprenons ou prétendons comprendre les phénomènes naturels (y en a-t-il qui ne le soient pas ?) il nous faut apporter une réponse pragmatique aux questions précédentes et tenter de définir les mots eux-mêmes que nous utilisons.

Le point de vue adopté par l'auteur est le suivant :

- Il est impossible de donner une signification quelconque à la phrase suivante : La Réalité est. L'auteur croit cependant en l'existence d'une réalité objective dont la nature est indépendante de l'analyse qui peut en être faite. Malheureusement, il s'avère également impossible de donner un sens raisonnable à l'assertion précédente. La croyance de l'auteur est donc un acte de foi au sens métaphysique du terme. On pourra donc utiliser le mot "phénomène" comme synonyme du mot "réalité", le vocable en question étant lui-même non défini.

- La description d'un phénomène, quel qu'il soit, fait toujours appel aux mathématiques, même si le spectateur n'en est pas conscient. Ainsi, déclarer que deux individus font partie de la même lignée (au sens héréditaire du terme) signifie qu'on assimile –peut être inconsciemment– les individus en question aux éléments d'un ensemble sur lequel on a défini une relation d'ordre partiel. De la même façon, la traversée d'un terrain par un ballon de foot-ball est un phénomène admettant une description (en fait plusieurs) dont la nature est essentiellement mathématique. Par exemple, on peut considérer la trajectoire d'un point traversant un rectangle en ligne droite. Il existe cependant une description du même phénomène où le ballon n'est plus un point mais une sphère et où le terrain n'est plus assimilé à un rectangle mais une figure géométrique plus complexe (coins plus ou moins arrondis,

côtés plus ou moins parallèles etc.) On peut d'ailleurs continuer dans ce sens et tenir en compte l'existence de creux et de bosses sur la surface du ballon, de la couleur etc. Les humains n'ont pas besoin de suivre des cours de mathématiques supérieures pour apprécier un match de foot-ball, mais il est important de constater l'aptitude de l'esprit à créer inconsciemment des modèles mathématiques relativement élaborés pour analyser l'expérience quotidienne. Notons enfin qu'un phénomène donné possède d'ordinaire plusieurs descriptions mathématiques (et même une infinité).

- La croyance en l'existence d'une réalité objective n'a aucune importance pratique ; seule compte l'ensemble de ses descriptions mathématiques. En effet, lors de l'analyse d'un phénomène (la traversée de la cour par un ballon de foot-ball), nous pouvons adopter les deux points de vue suivants. 1) La traversée de la dite cour par le ballon en question est un phénomène "réel" dont nous pouvons donner une quantité de descriptions mathématiques compatibles, et il est d'ailleurs possible de préciser la notion de compatibilité des descriptions. 2) La traversée de la dite cour par le ballon en question est en fait *définie* par un ensemble (infini) de descriptions mathématiques compatibles. Peu importe que nous adoptions l'un ou l'autre de ces deux points de vue, car si un aspect d'un phénomène n'est pas mathématiquement modélisable, cet aspect relève –presque par définition– de la métaphysique et il n'est pas clair qu'on puisse y attribuer un sens (même si on a envie de croire sans comprendre). On peut se convaincre du fait que l'exercice classique de méditation sur le thème de la chaise (Quelle est cette chaise ? Quelle est sa fonction ? Quelle est sa nature ? Quelle est son histoire ? etc.) est complètement modélisable en termes mathématiques...

Pour nous, un phénomène est donc défini par l'ensemble de ses descriptions mathématiques. Du point de vue linguistique, on devrait peut-être distinguer en général le phénomène lui-même (concept assez flou) de sa description mathématique – ou plutôt, de ses descriptions mathématiques. On peut alors parler de modélisation du phénomène, mais il faut bien voir que c'est la modélisation elle-même qui rend le phénomène accessible à l'analyse. Le modèle mathématique, qu'il soit choisi consciemment (par un physicien, par exemple) ou inconsciemment (par exemple, par un spectateur du match) apporte avec lui son propre langage, c'est à dire les mots qui permettent à l'observateur de se poser des questions à propos du phénomène qu'il contemple. Chacun de ces mots est censé être susceptible d'une traduction mathématique précise dans un cadre formel — que l'observateur ne défini pas nécessairement — faute de quoi, les mots en question sont simplement vides de sens. Il faut bien être conscient du fait que la phrase "mais que se passe-t-il vraiment ?" posée par le profane repose sur la croyance en une réalité objective, réalité qui, de notre point de vue, échappe à toute analyse scientifique.

Qu'en est-il donc de la distinction entre physique et mathématiques ? Pour nous, dire qu'une figure dessinée sur une feuille de papier est un triangle, c'est "faire de la physique" : le triangle est une notion abstraite appartenant au monde des mathématiques, associer cette notion au dessin qu'on a sous les yeux est un travail de physicien. Dans un genre différent, supposons qu'on fabrique des "choses" avec un canon à électrons... qu'est ce donc qu'un électron ? On peut dire que c'est une petite boule, on peut dire que c'est une fonction (complexe) –une onde!–, on peut dire que c'est une section d'un certain espace fibré vectoriel (un "champ de Dirac") ou que c'est un élément d'un module projectif de type fini sur une algèbre non nécessairement commutative... Toutes ces descriptions sont mathématiques et la première (la boule) est la plus simple du point de vue du bagage mathématique utilisé mais toutes ces descriptions sont également "vraies" et apportent avec elles leur propre langage. Il y a des questions qu'on ne peut poser qu'après avoir *choisi* une certaine description. C'est ainsi que les mathématiques sont nécessaires à la description de ce que nous appelons les phénomènes naturels (conséquence immédiate : si vous avez des difficultés en physique, c'est que vous n'avez pas proprement assimilé les mathématiques nécessaires!). La physique consiste essentiellement à habiller le phénomène de notre choix avec des mathématiques appropriées et c'est cet habillage qui rend les choses accessibles au discours. C'est là quelque chose qu'il ne faut pas oublier mais il faut avouer qu'il est néanmoins commode de vivre en faisant "comme si" on croyait à l'existence d'une réalité objective ! On pourrait aussi passer au cran supérieur et se demander si les mathématiques elles-mêmes "existent". Il n'est pas clair que la phrase ait un sens mais il est certain que, de la même façon qu'il est commode de croire en l'existence d'une réalité physique objective, il est également commode de croire en l'existence d'une réalité mathématique qu'il s'agit pour nous de découvrir (comme un explorateur dans la jungle ou comme un physicien expérimentateur). Les chapitres qui suivent présentent des concepts mathématiques. Indépendamment de la beauté ou de l'élégance intrinsèque des concepts en question, nous voulons attirer l'attention du lecteur (même s'il n'est pas physicien) sur le fait que ces concepts jouent un rôle majeur dans l'"habillage" contemporain des théories physiques, et que, dans de nombreux cas, ces concepts sont eux-mêmes issus de considérations relevant de la physique théorique.

## Du classique au quantique : mathématiques commutatives et non commutatives

Avant d'arrêter là ces considérations épistémologiques pour passer à notre premier chapitre consacré à l'étude des variétés différentiables, nous voulons dire un mot sur la distinction entre physique classique et physique quantique, en parallèle avec la distinction entre "mathématiques commutatives" et "mathématiques non commutatives". Cette remarque risque de n'être comprise que par les lecteurs ayant déjà une certaine familiarité avec les sujets mentionnés mais le lecteur intéressé pourra peut-être relire ce commentaire en y revenant un peu plus tard. Les mathématiques commutatives (la géométrie commutative en particulier) s'occupe des propriétés mathématiques des "espaces" (théorie de la mesure, espaces topologiques, différentiables, riemanniens, homogènes, possédant une structure de groupe. . .) Pour le physicien, ces espaces fournissent un modèle mathématique concernant le système qu'il a choisi d'étudier et toutes les quantités qui l'intéressent peuvent être décrites à l'aide d'une classe appropriée de fonctions définies sur de tels espaces. Il se trouve que les propriétés des espaces en question peuvent elles-mêmes être codées en termes des propriétés de ces algèbres de fonctions ; il s'agit là d'un résultat profond dont l'expression précise est due à Gelfand (voir chapitre 6). Le vocable "mathématiques commutative" vient du fait que toutes ces algèbres sont des algèbres commutatives pour les lois d'addition et de multiplication des fonctions. Attention, de ce point de vue, la théorie des groupes de Lie (voir plus loin) –groupes qui ne sont pas, en général, commutatifs– fait partie des "mathématiques commutatives" car l'algèbre des fonctions (à valeurs réelles ou complexes) définie sur un groupe est une algèbre commutative ! Les "mathématiques non commutatives", au contraire, s'occupent des propriétés d'algèbres qui ne sont pas commutatives et des objets qui généralisent les constructions usuelles lorsqu'on remplace les algèbres de fonctions (et les "espaces" eux-mêmes) par des algèbres d'opérateurs. Les quantités qui intéressent le physicien ne sont plus alors codées par des fonctions numériques mais, typiquement, par des opérateurs agissant dans des espaces hilbertiens. Il est inutile d'en dire plus à ce niveau mais nous effectuerons deux remarques. La première est terminologique : un physicien dit qu'il fait de la physique classique lorsqu'il utilise des mathématiques commutatives pour décrire un phénomène (ce qui, philosophiquement, revient à le définir ! Voir la discussion précédente) et de la physique quantique lorsqu'il utilise des mathématiques non commutatives (idem). La seconde remarque a trait au contenu de cet ouvrage : il traite de géométrie, et la plupart du temps de géométrie utilisée en physique fondamentale, cependant il s'agira presque

toujours de géométrie commutative, vocable englobant d'ailleurs toute la géométrie, au sens usuel du terme, qu'elle soit euclidienne ou non. Du point de vue de la physique, nos constructions correspondront donc à des constructions de théorie classique des champs (même s'il nous arrive de parler de quarks ou d'électrons de Dirac) et non de théorie quantique des champs.

Le dernier chapitre est une introduction aux "mathématiques non commutatives" (un point de vue assez particulier sur la théorie des algèbres associatives) et présente quelques notions fondamentales relevant de la géométrie différentielle non commutative. Ce dernier chapitre pourrait donc aussi s'intituler : Introduction à la *géométrie quantique*.

## Guide de lecture, autocritique et perspectives

Le lecteur ne connaissant rien au sujet et désirant “se faire une idée”, peut dans un premier temps, parcourir les sections 1.1, 1.2, 2.1, 2.2.1, ainsi que 3.1, (3.2.1 → 3.2.5), 3.3.1, 3.3.2, (4.1.1 → 4.1.4) et (4.4.1, 5.6.1, 6.1, 6.2.1, 6.3.1) dont le contenu, à peu près exempt de formules, fait appel à l’intuition et ne suppose que très peu de connaissances préalables.

Les autres sections sont assez inégales ; certaines présentent un matériel qui fait ou devrait faire partie du bagage mathématique standard de tout mathématicien ou physicien théoricien, certaines autres sont d’un niveau plus avancé et peuvent contenir des informations qui ne sont pas nécessairement disponibles ailleurs (sauf peut-être dans quelques articles spécialisés). En fait, comme le titre l’indique, le but initial de ce travail était de fournir une présentation — si possible pédagogique — des espaces fibrés et de la théorie des connexions. Il se trouve que certains lecteurs potentiellement intéressés, en particulier les étudiants de troisième cycle de physique théorique, n’ont souvent pas, au départ, les bases mathématiques nécessaires pour attaquer, de front, un cours relativement complet sur les espaces fibrés : il leur manque souvent un cours préalable de calcul différentiel sur les variétés et un cours sur les groupes de Lie. C’est la raison d’être des parties 1 et 2 de cet ouvrage. On a essayé d’y présenter les notions indispensables à la lecture des chapitres 3 et 4 consacrés aux espaces fibrés et à la théorie des connexions. Nous suggérons donc à ceux qui ont déjà acquis une formation raisonnable en ce qui concerne les variétés différentiables (par exemple en lisant le premier volume de [13] et les groupes de Lie, de jeter d’abord un coup d’œil au sommaire, puis de sauter les deux premiers chapitres — qui ne leur apprendront sans doute pas grand chose — et d’entamer directement la lecture de cet ouvrage au chapitre 3. Pour les autres... il vaudrait peut-être mieux s’astreindre à lire les différentes parties dans l’ordre. Comme nous l’avons mentionné dans la préface, l’ensemble de l’ouvrage devrait être lisible par quelqu’un ne disposant pas d’un bagage mathématique supérieur à celui qu’on acquiert d’ordinaire, ou qu’on est sensé acquérir, en premier cycle. Son contenu, néanmoins, serait plutôt d’un niveau *3<sup>ème</sup> cycle*.

Le plan et la structure de ce livre répond à la préoccupation suivante : faire du lecteur un “honnête homme” en géométrie différentielle classique en présentant un certain nombre de notions qui sont fréquemment utilisées en physique théorique ou en mathématiques. Savoir si le but sera atteint est une autre histoire... Enfin, et au risque de faire hurler certains mathématiciens, il nous semble plus important, tout au moins dans un premier temps, de se familiariser avec les idées fondamentales ainsi qu’avec de nombreux exemples,

que de connaître le détail de toutes les démonstrations relatives aux propositions et théorèmes cités.

Le style adopté dans ce livre étant volontairement informel, il peut être parfois difficile au lecteur de retrouver la définition précise de tel ou tel concept. Pour cette raison, il peut être utile de consulter l'index situé en fin d'ouvrage, et, bien entendu, la table des matières.

Notre présentation est bien, sur, incomplète. Certains aspects ne sont qu'effleurés, d'autres sont totalement absents et bien qu'il ne s'agisse pas ici, loin s'en faut, d'une tentative encyclopédique, voici quelques têtes de chapitres dont on pourra déplorer l'absence... : compléments de géométrie différentielle élémentaire en basse dimension (la liste serait longue), géométrie symplectique et mécanique, opérateurs différentiels, pseudo-différentiels, symboles etc., étude des équations de Yang-Mills, instantons etc., classification des espaces fibrés, fibrés universels et espaces classifiants, K-théorie, classes caractéristiques (et classes caractéristiques secondaires), géométries sur les groupes de Lie et les espaces homogènes, applications harmoniques, aspects conformes, métriques et connexions invariantes (symétries, isométries), variétés complexes, hypercomplexes etc., géométrie de l'espace des orbites des connexions, géométrie de l'espace des métriques, etc.

Par ailleurs, l'auteur aurait aimé insérer, à la fin de chaque chapitre, une section consacrée aux généralisations des idées rencontrées, lorsqu'on passe de la géométrie commutative à la géométrie non commutative, c'est à dire lorsqu'on passe du classique au quantique<sup>1</sup>. Il est sans doute dommage de devoir parler au conditionnel passé... mais il fallait bien mettre fin à la rédaction ! De fait, faisant suite à une première version de cet ouvrage, rendue disponible sur Internet, en format html, en mai 1997, la dernière section (section 6), consacrée à une présentation générale des mathématiques non commutatives et au calcul différentiel sur les algèbres non commutatives, a été rajoutée en mars 1998. Ce rajout répond donc, en partie, à la préoccupation mentionnée plus haut.

Bien entendu, toutes les remarques permettant d'améliorer ce document, voire de corriger certaines sections si besoin est, sont les bienvenues : envoyer un courrier à l'auteur ou un courriel à coque at cpt.univ-mrs.fr.

On aura compris que ce livre a été rédigé en français. Certes, il eut été préférable, pour rassembler un plus large lectorat, de rédiger directement l'ouvrage en anglais. L'usage de la langue anglaise, et en particulier la lecture de l'anglais, sont devenus obligatoires dans notre société, et il est certain que l'enseignement de cette langue a fait des progrès considérables en France ; il

---

1. Mentionnons à ce propos le traité [3] qui restera sans doute pour longtemps l'ouvrage de référence en géométrie non commutative.

n'en demeure pas moins que la lecture de textes en anglais, même de textes scientifiques, pose toujours à nos étudiants ainsi qu'à certains de leurs aînés, des difficultés. Il en va d'ailleurs de même pour une vaste partie du monde francophone, où le français n'est parfois qu'une deuxième langue (l'anglais venant en troisième position). Il n'est pas certain que le présent ouvrage devienne un livre de chevet (!) mais pour faciliter sa lecture sans rajouter une difficulté linguistique, l'auteur a décidé de rédiger ce livre directement en français. Ces notes sont donc dédiées aux étudiants et aux chercheurs de la francophonie, et à tous les esprits curieux qui souhaitent acquérir un certain nombre de notions géométriques des mathématiques contemporaines avant de s'embarquer eux-mêmes dans l'aventure de la recherche, que ce soit en Physique ou en Mathématique, ou qui souhaitent tout simplement satisfaire leur curiosité intellectuelle. Une version anglaise serait la bienvenue mais l'auteur n'a pas eu, jusqu'à présent, le courage de s'atteler à cette tâche.

### *Disponibilité*

L'ensemble du document (sa dernière version) est accessible, via internet, en version html ou pdf sur <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~coque/>.

## *Bibliographie*

On trouvera assez peu de références mentionnées dans cet ouvrage. Il existait évidemment la tentation de citer tous les livres traitant, de près ou de loin, de géométrie différentielle, d'espaces fibrés, de connexions, de géométrie riemannienne etc . Un tel effort bibliographique semble évidemment, dès le départ, voué à l'échec. Une autre solution eût été de ne citer que les ouvrages élémentaires. Malheureusement, les ouvrages en question ne recouvrent pas nécessairement tous les sujets qui sont abordés ici. Enfin, on rappelle que la première rédaction de ces notes, avant leur mise à disposition sur internet, date de 1996 ; plusieurs ouvrages d'enseignement sur des sujets voisins sont apparus depuis. L'attitude que nous avons choisi d'adopter est de ne citer que les livres et autres travaux pour lesquels l'auteur a conscience d'avoir subi une influence possible ou certaine. Les documents en question sont assez variés : certains sont des ouvrages de référence, d'autres sont des monographies spécialisées, d'autres encore, des articles de recherche. L'auteur n'a pas cherché à suivre tel ou tel traité et a essayé de rédiger ces notes de façon originale. . . certains pourront peut-être s'en plaindre ! Tout ceci explique la raison du petit nombre de références, que voici.



# Bibliographie

- [1] A. Besse. *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, 1966.
- [2] A. Connes. Noncommutative differential geometry. *Publ. Math. IHES* 62, 1985.
- [3] A. Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [4] R. Coquereaux and A. Jadczyk. *Fiber bundles, Kaluza-Klein theories and all that*. World Scientific, 1988.
- [5] C.W.Misner, K.S.Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- [6] M. Dubois-Violette. Dérivations et calcul différentiel non commutatif. *C.R. Acad. Sci. Paris 307, Ser. I, 403-408*, 1988.
- [7] M. Dubois-Violette and P. Michor. A common generalization of the Frolicher-Nijenhuis bracket and the Schouten bracket. *Preprint LPTHE-Orsay 94/05, ESI 70*, 1994.
- [8] D. Husemoller. *Fiber bundles*. Springer-Verlag, 1966.
- [9] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry, Voll/III*. Interscience, 1963.
- [10] R. Kerner, M. Dubois-Violette and J. Madore. Classical bosons in a non-commutative geometry. *Class. Quant. Grav.* 6, 1709, 1989.
- [11] G. Esposito Farese, R. Coquereaux and G. Vaillant. Higgs fields as Yang mills fields and discrete symmetries. *Nucl. Phys. B* 353, 689-706, 1991.
- [12] R. Haussling, R. Coquereaux and F. Scheck. Algebraic connections on parallel universes. *Int J. Mod. Phys. A, vol. 10, PP 89-98*, 1995.
- [13] Spivak. *Differential Geometry*. Publish or Perish, 1979.



# Chapitre 1

## Variétés différentiables

### 1.1 Variétés topologiques

#### 1.1.1 Définition

Une *variété topologique* est tout d'abord un espace topologique, mais on suppose, de surcroît, que chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On dit alors que cet espace est une variété topologique de dimension  $n$ .

Intuitivement, une variété topologique de dimension 2 est un espace qui, localement, c'est à dire si on ne regarde pas trop loin, ressemble à un petit morceau de feuille de papier qu'on aurait pu découper avec des ciseaux après en avoir tracé le pourtour au crayon (on peut d'ailleurs froisser le bout de papier en question). La structure globale de cet espace peut être évidemment assez différente puisque la variété elle-même est obtenue par recollement de tous ces petits morceaux de papier. Ainsi, un pneu de bicyclette, éventuellement dégonflé, plié et "froissé" fournit un exemple d'objet physique qu'on peut modéliser à l'aide d'une variété topologique de dimension 2 : un tore.

#### 1.1.2 Variétés à bord

Les variétés dont il vient d'être question n'ont pas de bord (au sens intuitif du terme). En effet, si nous nous transformons en êtres plats, rampant sur la surface d'un ballon – ou d'un pneu – nous ne sommes jamais arrêtés par une quelconque barrière. Cela ne serait pas le cas si nous nous déplaçons sur la surface d'un quartier d'orange ou d'un pneu crevé (nous nous arrêterions au bord du trou!). Sans se transformer en êtres plats, cela ne serait pas le cas non plus si nous nous déplaçons à l'intérieur d'une boule fermée. De façon

générale, il est possible de fabriquer des “variétés à bord” en effectuant un ou plusieurs trous dans une variété sans bord (à l’aide d’une petite cuillère multi-dimensionnelle !); la partie enlevée, comme la partie qui reste, devient une *variété topologique à bord*.

Pour préciser cette notion, il nous faut élargir la définition de variété que nous avons donné plus haut puisque certains des points (ceux du bord) ont un voisinage non pas homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  mais à un voisinage de  $\mathbb{R}_+^n$  (le fermé de  $\mathbb{R}^n$  formé des points dont la dernière composante est positive ou nulle).

Attention : si nous nous promenons dans une boule ouverte, nous ne pourrions jamais atteindre aucun bord... par définition d’une boule ouverte ! Une boule ouverte est une variété sans bord de dimension 3 qui est d’ailleurs homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Par contre, une boule fermée est une variété à bord de dimension 3, les points du bords sont ceux de la sphère (une variété de dimension 2) et ils possèdent – dans la boule fermée – des voisinages particuliers. Le disque ouvert (la boule de dimension 2) est aussi une variété sans bord et le disque fermé est une variété à bord (son bord est constitué d’un cercle qu’on peut appeler également “sphère de dimension 1”. Dans le même genre, un intervalle ouvert est une variété sans bord (la boule de dimension 1) et un intervalle fermé est une variété à bord (son bord est constitué de deux points dont la réunion constitue ce qu’on peut appeler la sphère de dimension 0. Les exemples qui précèdent sont généralisables en toutes dimensions.

Terminologie : Si on ne précise pas davantage, une variété topologique est censée être une variété sans bord.

### 1.1.3 Contre-exemples

La plupart des objets mathématiques auxquels nous avons tendance à penser de prime abord sont des exemples de variétés topologiques (avec ou sans bord), et, pour cette raison, il est bon de donner quelques exemples d’espaces topologiques qui ne sont pas des variétés. Considérez par exemple une croix (réunion de deux segments d’intersection réduite à un point); ce n’est pas une variété car le point situé à l’intersection des deux segments possède des voisinages en forme de croix, et une croix n’est jamais homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ . Le globe impérial est un objet qu’on pourrait penser à modéliser mathématiquement par une sphère (variété de dimension 2) sur laquelle on aurait collé une croix (réunion de deux segments) Cet espace n’est pas une variété pour deux raisons. La première vient du point d’intersection des deux branches de la croix (déjà vu) et la deuxième est analogue puisque

le point où on a collé la croix sur la sphère possède des voisinages qui ne sont homéomorphes ni à des ouverts de  $\mathbb{R}^1$  ni à des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .

Ces derniers exemples ne sont pas des variétés mais sont néanmoins obtenus par recollement de variétés... (CW complexes) Ils ne possèdent pas une dimension déterminée mais ont néanmoins une structure assez simple. On peut cependant faire bien pire... Les exemples d'espaces topologiques qui ne sont pas des variétés abondent (prenez par exemple des espaces topologiques qui ne sont pas de Hausdorff, c'est à dire qui possèdent des points qu'on ne peut pas séparer à l'aide d'ouverts disjoints). Il ne faudrait pas croire que les espaces qui ne sont pas des variétés n'ont pas d'intérêt mathématique ou physique, bien au contraire. En fait, la géométrie non commutative (dont nous ne parlerons pratiquement pas dans cet ouvrage) s'est développée en grande partie pour forger des outils permettant de "calculer" dans de tels espaces, espaces qui sont en fait complètement décrits par des algèbres associatives mais généralement non commutatives... Par ailleurs, on sait que la description mathématique de la mécanique quantique repose sur l'utilisation des algèbres d'opérateurs, ce qui explique la raison pour laquelle les phénomènes physiques relevant de cette mécanique soient si peu intuitifs puisqu'il nous faut, dans ce cas, abandonner nos notions familières de géométrie "commutative". C'est à l'étude de cette géométrie commutative qu'est consacrée le présent ouvrage. Attention à la terminologie (mise en garde destinée au lecteur trop savant) : l'expression classique des théories de jauge non abéliennes ainsi que l'étude des groupes de Lie (en général non commutatifs), relèvent de la géométrie commutative ! Le calcul différentiel – et la physique classique – se sont développés dans le cadre des variétés et c'est pourquoi nous commençons par là. La structure de variété topologique est d'ailleurs elle-même insuffisante pour pouvoir travailler dans de bonnes conditions : Il nous faudra pouvoir différentier les fonctions un nombre de fois suffisant. Pour ce faire il nous faudra supposer que les variétés (en anglais *manifolds*) considérées ne sont pas "froissées" : elles doivent être "lisses" (bien repassées !). Ce sont les variétés différentiables (en anglais *smooth manifolds*).

## 1.2 Variétés différentiables

### 1.2.1 Variétés, cartes, atlas

Intuitivement, on peut considérer une variété différentiable comme une variété topologique (voir exemples *supra*) qui soit "lisse", c'est à dire sans plis, sans coins etc. Une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  est donc

avant tout une variété topologique. Nous définissons tout s'abord la notion de carte qui généralise la notion usuelle de carte géographique. Une *carte* consiste en la donnée d'un ouvert  $U_i$  de  $M$  ainsi que d'une application  $x : \mathcal{P} \in U_i \subset M \xrightarrow{x} (x^\mu(\mathcal{P})) \in \mathbb{R}^n$  avec  $\mu \in \{1 \dots n\}$ . Il importe de bien établir une distinction entre le point  $\mathcal{P}$  lui-même et ce qu'on appelle ses coordonnées  $x^\mu(\mathcal{P})$  dans la carte choisie. On suppose, de plus, que l'application  $x$  est bijective et bi-continue de  $U_i$  sur son image.

Mis à part le cas relativement trivial où  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , il nous faut plusieurs cartes pour recouvrir la variété  $M$ . On appellera *atlas* (sous-entendu différentiable) la donnée d'un ensemble de cartes  $(U_i, x)$  qui recouvrent  $M$  c'est à dire telles que  $\cup_i U_i = M$  et telles que les changements de cartes  $\phi_{ij}$  soient des bijections différentiables, ainsi que leurs inverses. Précisons ce dernier point. Supposons que  $\mathcal{P} \in U_i \cap U_j \subset M$ , on peut donc représenter  $\mathcal{P}$  par un point  $x^\mu(\mathcal{P})$  de  $\mathbb{R}^n$  dans la carte  $(U_i, x)$  ou par un autre point  $y^\mu(\mathcal{P})$  de  $\mathbb{R}^n$  dans la carte  $(U_j, y)$ . On note  $\phi_{ij}$  le changement de cartes (encore appelé transformation de coordonnées); c'est une application de l'ouvert  $x(U_i)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans l'ouvert  $y(U_j)$  de  $\mathbb{R}^n$ . On sait ce que signifie "différentiable" pour une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  : les dérivées partielles, par rapport à chacune des variables, doivent exister. On impose donc à  $\phi_{ij}$  d'être une application différentiable. On lui impose également d'être bijective (donc inversible) et on impose à son inverse  $\phi_{ji} = \phi_{ij}^{-1}$  d'être également différentiable. Bien entendu, il faut préciser un peu plus ce qu'on entend par différentiable : suivant qu'on impose aux applications  $\phi_{ij}$  d'être une seule fois différentiable,  $r$  fois différentiables ou infiniment différentiables, on parle d'atlas de classe  $C^1$ ,  $C^r$  ou  $C^\infty$ . Dans la suite de l'ouvrage et sauf mention explicite du contraire, c'est de classe  $C^\infty$  qu'il s'agira. La première façon de définir une *variété différentiable* est de se donner une variété topologique ainsi qu'un atlas différentiable. Du point de vue des notations, il n'est pas très commode de faire figurer l'indice  $i$  qui se rapporte à la carte, sur le système de coordonnées  $x$ ; dans le cas où on en considère deux (par exemple  $x$  et  $y$ ) on écrira les formules de changement de carte (l'application  $\phi_{ij}$ ) sans introduire de nouvelle notation en écrivant simplement  $y^\mu$  comme une fonction de  $x^\nu$ , c'est à dire  $y^\mu = y^\mu(x^\nu)$ .

### 1.2.2 Atlas maximal

En géographie ordinaire (celle du globe terrestre) il est bien connu qu'il nous faut au moins deux cartes pour décrire la Terre. Par contre, rien ne nous interdit d'en utiliser trois ou plus ... Si on réunit les cartes d'un atlas avec celles d'un atlas différent (concernant la même variété topologique),

on peut s'attendre à fabriquer ainsi un atlas plus grand, un peu redondant, certes, mais néanmoins utile. Il faut cependant prendre la précaution d'imposer aux cartes d'être compatibles, c'est à dire telles que les formules de changements de cartes, d'un atlas à l'autre, puissent s'exprimer en terme de transformations différentiables de  $\mathbb{R}^n$ . Cette précaution n'est pas inutile et peut conduire à des surprises. Rien ne nous empêche alors de considérer l'ensemble (assez gros il est vrai!) de tous les atlas compatibles possibles d'une variété donnée et de les réunir en un unique *atlas maximal*. Bien qu'un seul atlas suffise à caractériser complètement la variété, il peut être très utile de considérer la variété  $M$  équipée d'un tel atlas maximal contenant toutes les cartes compatibles possibles. En d'autres termes, on peut complètement caractériser une variété différentiable par la donnée d'une variété topologique et d'un atlas maximal. Il se trouve que, dans certains cas, une variété topologique donnée possède plusieurs structures différentiables (plusieurs atlas maximaux distincts). C'est le cas pour  $\mathbb{R}^4$  (le seul, parmi les espaces numériques  $\mathbb{R}^n$  à posséder des structures différentiables "exotiques") et c'est aussi le cas pour les sphères  $S^n$  lorsque  $n \geq 7$ . Nous ne nous intéresserons pas à ces phénomènes dans le cadre de cet ouvrage.

### 1.2.3 Variétés et calcul différentiel "intrinsèque"

En mathématiques élémentaires, on définit souvent les espaces géométriques intéressants (par exemple une sphère) comme sous espace d'un espace affine  $\mathbb{R}^n$ . L'idée fondamentale du calcul sur les variétés (calcul différentiel intrinsèque comme on l'appelait autrefois) est de faire abstraction du fait que la variété qui nous intéresse est, ou non, plongée dans un espace  $\mathbb{R}^n$  "plus grand" et de développer un calcul qui soit totalement indépendant du plongement en question. Les motivations physiques sont analogues. Par exemple, l'expérience quotidienne nous montre que tout événement de l'univers sensible (whatever it means) peut se décrire à l'aide de quatre nombres spécifiant sa position (trois nombres) et sa date (un nombre). Mais pourquoi supposer, *a priori* que l'ensemble de ces événements doit être décrit à l'aide d'un espace  $\mathbb{R}^4$ ? Pourquoi pas une hyper-sphère (ou n'importe quoi d'autre?) Mais alors, si on décide d'utiliser une hyper-sphère de dimension 4 pour décrire notre espace-temps, ou, comme dans certains modèles cosmologiques, comme le produit d'une hyper-sphère (gonflable) de dimension 3 par une droite ou une demi-droite, pourquoi supposer que notre variété est plongée dans un espace de dimension 5 ou plus dont les points sont sans signification physique? Puisque c'est possible, autant travailler dans la variété qui nous intéresse sans chercher à en "sortir".

L'idée la plus fondamentale et la plus simple du calcul différentiel sur les variétés est la suivante. Grâce à l'existence locale des cartes, on peut toujours faire "comme si" on était sur  $\mathbb{R}^n$  et développer des outils et des méthodes de calcul sans se soucier – dans un premier temps – de leur globalisation, quitte à vérifier, par la suite, que tout se recolle comme il faut lorsqu'on passe d'une carte à l'autre. C'est ainsi que l'essentiel des notions qui suivent sont en fait des notions qui peuvent être définies dans un espace  $\mathbb{R}^n$  et dont la généralisation, au cas des variétés, est quasi-immédiate. Nous ne supposons pas que le lecteur est déjà familier des notions en question ; c'est la raison d'être des paragraphes qui suivent.

## 1.3 Applications différentiables, difféomorphismes

### 1.3.1 Définition

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables de dimensions respectives  $m$  et  $n$ . Une *application différentiable*  $\phi$  de  $M$  dans  $N$  est une application qui peut s'écrire localement à l'aide d'une application différentiable (encore notée  $\phi$ ) de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . En d'autres termes, si on a  $Q \in N = \phi(P)$  avec  $P \in M$ , alors, grâce au choix de cartes  $P \in U_i \subset M \rightarrow x^\mu(P) \in \mathbb{R}^m$  et  $Q \in V_j \subset N \rightarrow y^\nu(Q) \in \mathbb{R}^n$ , on pourra écrire (et on écrira !)  $y = \phi(x)$  ce qui signifie, en fait  $y^\nu(Q) = \phi(x^\mu(P))$ . L'ensemble des applications différentiables de  $M$  dans  $N$  se note  $C^\infty(M, N)$ .

Petite parenthèse sur le problème des notations en mathématiques : Il est important de comprendre la signification de ce qu'on écrit, mais il est (de l'avis de l'auteur) absurde de vouloir que la notation utilisée nous rappelle à tout moment les différents abus d'écriture commis depuis le chapitre 1 du tome 1 de Bourbaki et sans lesquels il n'est pas de calcul possible !

L'application  $\phi$  (celle qui va de  $M$  dans  $N$ ) est donc caractérisée – les cartes étant choisies – par  $n$  fonctions différentiables  $y^\nu$  de  $m$  variables  $x^\mu$ . Il est alors naturel de considérer la matrice jacobienne de cette application, c'est à dire la matrice rectangulaire  $m \times n$  des dérivées partielles  $\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}$ . Nous en reparlerons un peu plus tard.

### 1.3.2 Difféomorphismes et changements de coordonnées

Il existe deux cas particuliers particulièrement intéressants.

Le premier est celui où  $M$  et  $N$  coïncident. Dans ce cas, il peut se faire que l'application différentiable  $\phi$  soit non seulement différentiable mais encore bijective et que son inverse soit également différentiable. On dit alors

que  $\phi$  est un *difféomorphisme*. Notons qu’une application différentiable est automatiquement continue et que, par conséquent, un difféomorphisme est automatiquement un homéomorphisme. Il est facile de vérifier que l’ensemble des difféomorphismes d’une variété différentiable  $M$  constitue un groupe pour la composition des applications. On note ce groupe  $\text{Diff}(M) \subset C^\infty(M, M)$ ; c’est un sous groupe de l’ensemble  $\text{Hom}(M) \subset C^0(M, M)$  des homéomorphismes de  $M$ . Notons qu’il existe une correspondance assez subtile entre difféomorphismes d’une part – qui sont des transformations que l’on appelait autrefois “actives” car elles transforment les points de  $M$  en d’autres points de  $M$  – et changements de coordonnées – qui sont des transformations que l’on appelait autrefois “passives” car elles ne transforment pas les points de  $M$  mais résultent seulement d’un changement de carte.

Il est à peu près évident que ces deux notions coïncident dans le cas où  $M$  est l’espace  $\mathbb{R}^n$  lui-même (muni de la structure différentiable définie par une unique carte canonique, l’application identique). Examinons de plus près le cas général. Les cartes étant elles-mêmes des difféomorphismes locaux entre ouverts de  $M$  et ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , effectuer un changement de carte (changement de système de coordonnées) se traduit par un difféomorphisme local  $y(x)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Par contre, un difféomorphisme de  $M$  est, par définition, une notion globale qui se traduit elle-aussi, après choix de cartes, par un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^n$ . L’équivalence des points de vue “actifs” et “passifs” n’existe donc que pour  $\mathbb{R}^n$  et il semble préférable d’éviter cette terminologie. Une idée physique fondamentale, à la base de la théorie de la relativité générale est que les équations de la physique doivent pouvoir s’écrire de façon tout à fait indépendante de l’observateur, quelle que soit l’état de mouvement de ce dernier. Traduite en termes de coordonnées, ce “Principe de Relativité Générale” a souvent été exprimé de par le passé comme affirmant l’indépendance des lois de la physique par rapport aux changements de systèmes de coordonnées. Une telle affirmation manque de précision, dès lors qu’on travaille sur une variété quelconque et non sur un espace numérique. Il semble d’ailleurs qu’A. Einstein lui-même n’ait jamais pu exprimer correctement ce principe de façon vraiment précise et moderne (cela n’enlève rien à son génie!). Le principe en question peut s’énoncer ainsi : l’espace-temps étant décrit par une variété différentiable, les lois de la physique doivent être invariantes sous l’action du groupe des difféomorphismes de cette variété.

### 1.3.3 Fonctions différentiables

La deuxième classe de cas particuliers intéressants est celle où l’application différentiable considérée  $\phi$ , de  $M$  dans  $N$  est définie sur une variété

quelconque  $M$ , mais où  $N$  coïncide avec l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Les applications différentiables en question sont désignées sous le nom de *fonctions différentiables sur  $M$*  ; l'utilisation du mot "fonction" est en accord avec les habitudes terminologiques anglaises, où les applications quelconques sont des "*maps*", mais où les applications à valeurs réelles (ou complexes) sont des "*functions*". L'ensemble des fonctions différentiables sur  $M$  se note  $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Remarque : l'ensemble des fonctions différentiables  $C^\infty(M)$  est une algèbre pour l'addition des fonctions  $[f + g](x) = f(x) + g(x)$ , la multiplication des fonctions définie (ponctuellement) par  $[fg](x) = f(x)g(x)$  et l'opération externe de multiplication par un nombre réel. C'est une sous-algèbre de l'algèbre commutative  $C^0(M)$ .

Le lecteur peut s'étonner de la présence et de la signification de l'indice supérieur 0 ou  $\infty$  dans les notations  $C^0(M)$  ou  $C^\infty(M)$ . Cet indice se réfère à l'ordre de différentiabilité supposé des fonctions appartenant à l'ensemble considéré. On pourrait bien entendu considérer des ensembles tels que  $C^p(M)$  constitués de fonctions qui sont, au moins,  $p$  fois différentiables. Dans la suite de cet ouvrage, cependant, nous nous limiterons aux cas  $p = 0$ , c'est à dire les fonctions continues (qui peuvent évidemment être différentiables ou non) et  $p = \infty$ , c'est à dire les fonctions infiniment différentiables.

## 1.4 Champs de vecteurs

### 1.4.1 Notions élémentaires et intuitives

Avant de donner une définition générale des vecteurs et champs de vecteurs, définition qui pourrait sembler assez abstraite de prime abord, nous souhaitons motiver quelque peu cette définition. Le lecteur est déjà supposé être familier de la notion élémentaire de vecteur, à savoir une classe d'équivalence de bi-points parallèles et de même sens, dans l'espace affine  $\mathbb{R}^n$ . Un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , au sens élémentaire du terme, est donc une application qui, à tout point de  $\mathbb{R}^n$  – considéré comme espace affine – associe un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  – considéré comme espace vectoriel. Intuitivement, on a une "flèche" en tout point ; on peut penser à l'exemple du champ des vitesses d'un solide en mouvement, mais on peut aussi penser au champ magnétique en tout point de l'espace, etc. En physique – mais aussi, comme nous allons le voir, en mathématiques – un vecteur peut être considéré comme un "petit déplacement". Soit  $M$  une variété différentiable,  $f$  une fonction différentiable ainsi que  $P$  et  $Q$  deux points de  $M$ . Si  $M$  était un espace affine (comme  $\mathbb{R}^n$ ),

cela aurait un sens de considérer la différence de  $Q$  et de  $P$ , puisque cette différence définirait simplement le vecteur  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . On pourrait aussi (mais on peut de toutes façons) considérer la différence  $f(Q) - f(P)$  des valeurs prises par  $f$  en  $Q$  et  $P$ . Dans le cas de  $M = \mathbb{R}^n$  et lorsque  $Q$  (coordonnées  $x'$ ) tend vers  $P$  (coordonnées  $x$ ), le théorème des accroissements finis (ou celui de Taylor) nous dit que<sup>1</sup>  $f(x') - f(x) = (x' - x)^i \partial / \partial x^i f(x) + \dots = v^i \partial / \partial x^i f(x) + \dots$  où les nombres  $v^i = (x' - x)^i$  ne sont autres que les composantes du vecteur  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$  dans le repère où  $P$  et  $Q$  ont des composantes  $x^i$  et  $x'^i$ . Dans le cas des variétés, l'expression  $(x' - x)^i \partial / \partial x^i f(x)$  a encore un sens. En effet, choisissons tout d'abord une carte, et notons  $v$  la quantité  $v = v^i \partial / \partial x^i$ . Si  $x(P)$  sont les coordonnées de  $P$  dans le domaine de la carte  $x$ , on pourra considérer la quantité

$$v[f] = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x)$$

qui nous décrit la variation - au premier ordre - de  $f$  dans ce que nous avons envie d'appeler la direction  $v$ . La quantité précédente  $v[f]$  est elle-même une fonction, qui, lorsqu'elle est évaluée au point  $P$  nous fournit un nombre  $v[f](P)$ .

### 1.4.2 Vecteurs, espace tangent et champs de vecteurs

Dans le cas des variétés, il est clair que les vecteurs ne peuvent pas être définis comme des bi-points (ou des classes d'équivalences de bi-points), par contre, rien ne nous empêche d'utiliser leur propriété de machine-à-fabriquer-des-dérivées-partielles pour les définir de façon générale. Dans le domaine d'une carte  $x$ , un champ de vecteurs sera donc défini comme un opérateur de différentiation d'ordre 1 à savoir

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Cet opérateur agit sur les fonctions  $f \in C^\infty(M)$  pour donner d'autres fonctions (puisque  $v[f] \in C^\infty(M)$ ). Le champ de vecteurs  $v$  ainsi défini est indépendant de la carte choisie.

L'opérateur différentiel d'ordre 1 noté  $v = v^i \partial / \partial x^i$  est un champ de vecteurs car les  $v^i$  sont des fonctions sur  $M$  alors que  $v(P) = v^i(P) \partial / \partial x^i$  est un vecteur au point  $P$ , de composantes  $v^i(P)$ .

---

1. Nous utilisons la convention d'Einstein : il existe toujours une somme sous-entendue sur les indices répétés, par exemple  $v^\mu w_\mu \equiv \sum_\mu v^\mu w_\mu$ . En règle générale, les indices répétés ne sont jamais en même position : l'un est en position haute et l'autre en position basse, à moins qu'une métrique ne soit utilisée.

En géométrie élémentaire des courbes, la tangente en  $P$  à une courbe (différentiable) est définie comme limite des sécantes  $PQ$  lorsque  $Q$  tends vers  $P$ ; cela signifie que les vecteurs  $\overrightarrow{PQ}$  tendent vers un vecteur tangent à la courbe. En géométrie des variétés différentiables, on pourrait faire de même, à condition de plonger notre variété (par exemple la sphère usuelle  $S^2$ ) dans un espace plus grand (par exemple  $\mathbb{R}^3$ ) et voir ainsi, un vecteur de  $S^2$  comme un vecteur tangent à la sphère (et donc “sortant” de celle-ci); mais une telle contrainte serait précisément contraire à l’idée même du calcul intrinsèque sur les variétés, calcul qui se veut, justement, indépendant de l’existence de plongements possibles. La définition adoptée précédemment est bien indépendante de la présence d’un espace affine ambiant, mais il est néanmoins commode, pour l’intuition, de visualiser nos vecteurs de façon élémentaire et d’adopter une terminologie qui nous rappelle des situations bien connues. Pour ces raisons, un vecteur de la variété  $M$  en un point  $P$  est souvent appelé *vecteur tangent* en  $P$ , l’ensemble de ces vecteurs se note  $T(M, P)$  ou encore  $T_P M$  et est désigné sous le nom de *espace tangent* à  $M$  en  $P$ ; on a donc un espace tangent en chaque point de la variété. L’ensemble des vecteurs eux-mêmes (tous les vecteurs), se note  $T(M)$  ou simplement  $TM$  et est appelé l’*espace tangent* à  $M$  ou encore, pour une raison qu’on expliquera ultérieurement le *fibré tangent* à  $M$  (“*tangent bundle*”). Un élément de  $TM$  est donc la donnée  $(P, u)$  d’un point de  $M$  et d’un vecteur en ce point. Attention, il faut bien distinguer les notions de vecteur en un point et de champs de vecteurs (mais nous allons très souvent oublier cette distinction). L’ensemble des champs de vecteurs se note  $\Gamma TM$ . Notons que cet espace est un espace vectoriel (de dimension infinie), et  $T(M, P)$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  (supposant que  $M$  est elle-même de dimension  $n$ ), alors que  $TM$  n’est pas un espace vectoriel du tout (on ne peut pas additionner un vecteur en  $P$  avec un vecteur en  $Q$ !). On verra que  $TM$ , que l’on peut considérer comme une collection d’espaces vectoriels paramétrisés par les points de  $M$ , possède la structure d’espace fibré vectoriel (cette structure sera définie et étudiée plus loin). Notons que l’espace  $TM$  est lui-même une variété différentiable. Supposons que  $M$  soit une variété de dimension  $n$ , un point  $P$  de  $M$  est en effet caractérisé (dans une certaine carte) par  $n$  composantes  $x^\mu$  et un “point” (c’est à dire un élément) de  $TM$  consistera en la donnée d’un couple  $(P, u) \in M \times T(M, P)$  c’est à dire  $2n$  nombres ( $n$  nombres  $x^\mu$  et  $n$  composantes du vecteur  $u$  dans une base choisie de l’espace vectoriel  $T(M, P)$ ). Ainsi  $TM$  est une variété de dimension  $2n$ . Intuitivement, on peut se représenter par exemple  $TS^2$  comme la donnée d’une infinité de plans tangents collés à la sphère; il s’agit, dans ce cas d’une variété de dimension 4.

### 1.4.3 Règle de Leibniz

Soit  $v$  un champ de vecteurs. Il pourra donc s'écrire localement (c'est à dire dans une certaine carte)  $v = v^\mu \partial / \partial x^\mu$ . Si  $f$  et  $g$  désignent deux fonctions sur  $M$ , il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} [fg] = \frac{\partial}{\partial x^\mu} [f]g + f \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g]$$

Par conséquent on aura plus généralement :

$$\boxed{v[fg] = v[f]g + fv[g]}$$

On retrouve la règle usuelle de dérivation d'un produit. De façon générale, si  $\mathcal{A}$  est une algèbre associative, on dit que  $v$  est une dérivation, lorsque  $v$  est une application linéaire (un "opérateur") de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  telle que  $v[fg] = v[f]g + fv[g]$  avec  $f, g \in \mathcal{A}$ . Les champs de vecteurs sont des dérivations de l'algèbre associative (et commutative)  $C^\infty(M)$ . On pourrait d'ailleurs les définir directement par cette propriété. En d'autres termes,  $\Gamma TM = Der C^\infty(M)$ .

### 1.4.4 Crochet de deux champs de vecteurs

Notons que le produit de deux vecteurs n'est pas un vecteur (produit défini par composition de l'action des vecteurs sur les fonctions) mais un opérateur différentiel d'ordre 2. En effet, soient  $v = v^\mu \partial / \partial x^\mu$  et  $w = w^\nu \partial / \partial x^\nu$  deux champs de vecteurs (attention les  $v^\mu$  et les  $w^\nu$  n'ont aucune raison d'être constants dans la carte choisie). Alors,  $(vw)[f] = v[w[f]] = v[w^\nu \partial / \partial x^\nu [f]] = v^\mu \partial / \partial x^\mu [w^\nu \partial / \partial x^\nu [f]] = v^\mu \partial / \partial x^\mu [w^\nu] \partial / \partial x^\nu [f] + v^\mu w^\nu \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu [f]$  Par contre, le commutateur (notation crochet) de deux champs de vecteurs, défini par

$$\boxed{[v, w] = vw - wv}$$

est un champ de vecteurs. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que c'est bien un opérateur différentiel d'ordre un. Le petit calcul précédent montre immédiatement que les dérivées secondes disparaissent lorsqu'on calcule la différence et qu'il reste

$$[v, w][f] = (vw)[f] - (wv)[f] = (v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [w^\nu] \frac{\partial}{\partial x^\nu} - w^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [v^\nu] \frac{\partial}{\partial x^\nu}) [f]$$

La définition précédente du crochet  $[v, w] = vw - wv$  de deux champs de vecteurs implique de façon immédiate les deux propriétés suivantes :

Antisymétrie

$$\boxed{[u, v] = -[v, u]}$$

Identité de Jacobi

$$\boxed{[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0}$$

Une algèbre (évidemment non associative) où les éléments vérifient ces deux identités est appelée une algèbre de Lie. Notons qu'une algèbre de Lie est, en particulier, un espace vectoriel. Nous pouvons donc conclure ce paragraphe en disant "l'ensemble des champs de vecteurs est une algèbre de Lie (de dimension infinie)".

### 1.4.5 Repère naturel associé à une carte

On appelle repère sur  $U \subset M$ , la donnée, en chaque point  $P \in U$ , d'une base de l'espace vectoriel tangent en  $P$ . Un repère est en général "local", c'est à dire qu'on n'essaye pas, ou qu'on ne peut pas choisir  $U = M$ . Si  $x^\mu(P)$  désignent les composantes de  $P$  dans une carte locale  $(U, x)$ , on a déjà vu que des vecteurs quelconques en  $P$  ou dans un voisinage de  $P$  peuvent se décomposer sur les vecteurs  $\partial/\partial x^\mu$ . En d'autres termes, l'ensemble des

$$\boxed{e_\mu = \{\partial/\partial x^\mu\}}$$

fournit un repère. Ce repère est appelé *repère naturel associé à la carte  $x$*  ou aux coordonnées  $x^\mu$  ("*coordinate frame*"). Par suite de la propriété de commutativité des dérivées partielles, il est évident que  $\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu - \partial^2/\partial x^\nu \partial x^\mu = 0$ . En d'autres termes, si  $\{e_\mu\}$  désigne le repère naturel associé à la carte  $x^\mu$ , on a

$$[e_\mu, e_\nu] = 0$$

Une telle propriété caractérise, en fait, les repères naturels.

### 1.4.6 Changement de carte

Soit  $P \in M \rightarrow y(P) \in \mathbb{R}^n$  un nouveau système de coordonnées. Si  $x$  désigne l'ancien système, on notera également  $y : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  les fonctions de changement de carte, on écrira donc  $y(P) = y(x(P))$ . Le repère naturel associé aux coordonnées  $x$  est  $e_\mu = \{\partial/\partial x^\mu\}$ , celui associé aux coordonnées  $y$  est  $e'_\mu = \{\partial/\partial y^\mu\}$ . Nous savons (depuis le secondaire) comment calculer la dérivée d'une fonction composée, et donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}}$$

ce qui, avec d'autres notations, s'écrit

$$e_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} e'_\nu$$

*Notation*

Il est souvent commode de noter tout simplement  $\partial_\mu$  les vecteurs du repère naturel  $\{e_\mu = \partial/\partial x^\mu\}$  associés à la carte  $x^\mu$ . La décomposition d'un vecteur quelconque  $v$  suivant ce repère s'écrit  $v = v^\mu \partial_\mu$ , où les  $v^\mu$  sont des nombres réels.

### 1.4.7 Repères mobiles (repères quelconques)

Dans un espace vectoriel, nous savons que les changements de base sont décrits par des matrices "de passage" qui ne sont autres que des matrices inversibles  $\Lambda_\alpha^\mu$  quelconques. En géométrie différentielle, nous pouvons bien entendu faire de même, à ceci près que la matrice  $\Lambda_\alpha^\mu$  peut maintenant dépendre du point de la variété. En d'autres termes, on a des matrices de passage dont les éléments sont des fonctions sur la variété. Supposons que nous nous trouvons dans le domaine d'une carte et que  $\{\partial_\mu\}$  désigne le repère naturel associé. Ce repère, au point  $P$ , constitue une base de l'espace tangent en  $P$ . Mais rien ne nous empêche de choisir une autre base au même point. Si  $\Lambda_\alpha^\mu$  désigne une matrice inversible en  $P$ , alors la famille de vecteurs  $\{e_\alpha = \Lambda_\alpha^\mu \partial_\mu\}$  est une autre base de l'espace tangent  $T_P M$ , c'est à dire un repère au point  $P$ . Un tel repère est couramment désigné sous le nom de *repère mobile*. Notons qu'il n'y a aucune raison, *a priori*, pour que ce repère coïncide avec le repère naturellement associé à une autre carte que celle des  $x^\mu$ ; pour que cela soit le cas, il faudrait qu'on puisse trouver une solution locale  $y^\alpha$  au système d'équations  $\partial y^\alpha / \partial x^\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\alpha$  où  $\Lambda^{-1}$  désigne la matrice inverse de la matrice  $\Lambda$ . Le théorème garantissant l'existence de solutions pour une équation différentielle aux dérivées partielles nous assure seulement l'existence d'une telle solution  $y^\mu(x^\nu)$  le long d'une ligne, mais pas dans un voisinage ouvert de la variété.

Soit  $\{e_\alpha\}$  un repère mobile. Nous avons déjà vu que le crochet (commutateur) de deux champs de vecteurs est un champ de vecteurs. En particulier  $[e_\alpha, e_\beta]$  est un champ de vecteurs qui, évalué au point  $P$ , appartient à l'espace tangent en ce point et peut donc se décomposer sur une base de l'espace tangent en  $P$ . On écrira donc

$$[e_\alpha, e_\beta](P) = f_{\alpha\beta}^\gamma(P) e_\gamma(P)$$

ou, plus simplement

$$\boxed{[e_\alpha, e_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma}$$

où les  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  sont des fonctions sur la variété qu'on appelle *fonctions de structure du repère mobile* (on ne doit pas les appeler *constantes de structure* car, précisément, elles ne sont pas constantes en général!).

Par ailleurs, on posera souvent  $\partial_\alpha = e_\alpha$  même s'il n'existe pas de système de coordonnées  $\{y^\alpha\}$  tel que  $\partial_\alpha$  soit le repère naturel associé. Le lecteur doit donc se méfier de cet abus d'écriture pourtant commode : il est des cas où  $\partial_\alpha$  et  $\partial_\beta$  ne commutent pas !

## 1.5 Tenseurs et formes extérieures sur les espaces vectoriels

Avant de passer au cas des variétés, il convient d'effectuer quelques rappels d'algèbre linéaire puisque le passage du cas vectoriel au cas des variétés s'effectue essentiellement en remplaçant un espace vectoriel unique par une famille d'espaces vectoriels “de même nature”, paramétrisée par les points de la variété.

### 1.5.1 Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $K$ . On note  $E^*$  son dual, c'est à dire l'ensemble des formes  $K$ -linéaires sur  $E$  (applications linéaires sur  $E$  à valeurs dans le corps de base, qu'on suppose commutatif). En terme de composantes, soit  $\{e_\mu\}$  une base de  $E$ , et  $\{e^\mu\}$  la base duale correspondante de  $E^*$ , on a

$$e^\mu[e_\nu] = \delta_\nu^\mu$$

où  $\delta_\nu^\mu$  désigne le symbole de Kronecker (1 si  $\mu = \nu$  et 0 si  $\mu \neq \nu$ ).

L'espace vectoriel  $E$  de référence étant choisi, on écrira (comme le font toujours les physiciens) les vecteurs de base avec des “indices en bas” et les composantes avec des “indices en haut”. Bien entendu, la convention est opposée pour ce qui concerne l'espace vectoriel dual. Par ailleurs nous adoptons également la “convention d'Einstein”, c'est à dire que nous effectuons toujours une sommation (le signe somme étant sous-entendu) sur les indices répétés, lorsque l'un des indices est en position haute et l'autre en position basse. Nous avons déjà utilisé cette convention dans les sous-sections précédentes. Cette convention allège considérablement l'écriture des formules.

Nous n'adopterons pas, dans cet ouvrage, la notation dyadique chère à Dirac utilisant des *bra* et des *ket* car elle est peu usuelle en géométrie mais il est peut-être utile d'y consacrer quelques lignes. Avec cette notation, les

éléments d'un certain espace vectoriel  $E$  choisis une fois pour toutes sont notés avec des “kets”, par exemple  $|v\rangle$  et les éléments du dual avec des “bras”, par exemple  $\langle\sigma|$ . L'évaluation d'une forme sur un vecteur se note ainsi naturellement sous forme de “bracket”  $\langle\sigma|v\rangle$ . La relation précédente caractérisant la dualité entre une base de  $E$  et une base de  $E^*$  s'écrira donc

$$\langle e^\mu | e_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$$

On évalue ici une forme sur un vecteur et on obtient donc un nombre.

Par contre, la quantité  $|e_\nu\rangle\langle e^\mu|$  désigne une application linéaire de  $E$  dans  $E$  puisque  $|e_\nu\rangle\langle e^\mu|e_\rho\rangle = |e_\nu\rangle\delta_\rho^\mu = |e_\rho\rangle$ . Ainsi, en prenant  $|v\rangle = v^\rho|e_\rho\rangle$ , on obtient  $|e_\nu\rangle\langle e^\mu|v\rangle = v^\mu|e_\nu\rangle$ . Pour les mêmes raisons, l'écriture  $|v\rangle\langle\sigma|$  désigne un opérateur (alors que  $\langle\sigma|v\rangle$  désigne un nombre).

L'identification des vecteurs de  $E$  avec des applications de  $K$  dans  $E$  (à  $v \in E$  on associe l'application  $\lambda \in K \rightarrow \lambda v \in E$ ) permet de bien comprendre cette dualité et l'intérêt de la notation dyadique.

Si on se souvient “qui est qui”, et si on fait attention à l'ordre des termes, on peut simplifier les notations à l'extrême et ne noter ni les produits tensoriels, ni les symboles  $\langle|$  ou  $| \rangle$ . On écrira ainsi parfois de façon un peu provocante les éléments de  $E$  sous la forme

$$v = e_\mu v^\mu$$

(avec  $v^\mu \in \mathbb{R}$ ) et les composantes à droite des vecteurs. On écrira parfois de même les éléments du dual  $E^*$  sous la forme

$$\sigma = \sigma_\mu e^\mu$$

(avec  $\sigma_\mu \in \mathbb{R}$ ) et les composantes à gauche des formes linéaires. Si on ne note explicitement ni les produits tensoriels ni les évaluations des formes sur les vecteurs, on voit que  $\sigma v = \sigma_\mu(e^\mu e_\nu)v^\nu = \sigma_\mu\delta_\nu^\mu v^\nu = \sigma_\mu v^\mu$  est un nombre. Par contre  $v\sigma$  est un opérateur (on pourrait l'écrire  $v \otimes \sigma \in E \otimes E^*$ ), plus précisément  $v\sigma = e_\mu(v^\mu\sigma_\nu)e^\nu$ .

L'ordre adopté ci-dessus (le fait d'écrire les composantes —qui sont pourtant des nombres!— à droite des vecteurs, etc) est particulièrement adapté aux généralisations non commutatives de la géométrie différentielle — cela vient du fait qu'en Occident, nous écrivons de gauche à droite! — mais rappelons nous que, bien entendu, en géométrie ordinaire “commutative” (celle qui nous intéresse ici), on peut toujours écrire  $v = e_\mu v^\mu = v^\mu e_\mu$ . Un dernier mot de mise en garde : lorsqu'on veut insister sur le fait que le vecteur  $e_\mu$  désigne une dérivation  $\partial_\mu$ , il est préférable — pour ne pas se tromper! — d'écrire les composantes du côté gauche. Il en va de même en géométrie non commutative où champs de vecteurs et dérivations d'algèbre sont de toute façon des

concepts différents puisque les premiers forment un module sur l'algèbre associative des "fonctions" alors que les dérivations ne forment un module que sur le centre de cette algèbre. Aucune ambiguïté n'est donc possible dans ce cadre plus général.

On note  $\otimes E$  l'algèbre tensorielle sur  $E$  c'est à dire la somme directe  $\bigoplus_{p=0}^{\infty} E^{\otimes p}$  où  $E^{\otimes p}$  désigne la puissance tensorielle d'ordre  $p$  de  $E$ , c'est à dire encore l'ensemble des applications multilinéaires d'ordre  $p$  sur  $E^*$ . Soit  $T \in E^{\otimes p}$  alors on peut écrire

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p}$$

Les éléments de  $\otimes E$  sont encore appelés tenseurs contravariants (d'ordre  $p$  s'ils appartiennent à  $E^{\otimes p}$ ). Bien entendu, cet ensemble est non seulement un espace vectoriel (de dimension infinie, les  $E^{\otimes p}$  étant de dimension  $(\dim E)^p$  mais encore une algèbre pour le produit tensoriel. On peut ne pas écrire le symbole  $\otimes$  explicitement dans l'expression précédente du tenseur  $T$ , car... "what else could it be?", auquel cas,

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} e_{\mu_1} e_{\mu_2} \dots e_{\mu_p}$$

De la même façon, on note  $\otimes E^*$  l'algèbre tensorielle sur  $E^*$  c'est à dire la somme directe  $\bigoplus_{p=0}^{\infty} E^{*\otimes p}$  où  $E^{*\otimes p}$  désigne la puissance tensorielle d'ordre  $p$  de  $E^*$ , c'est à dire encore l'ensemble des applications multilinéaires d'ordre  $p$  sur  $E$ . Soit  $T \in E^{*\otimes p}$  alors on peut écrire

$$T = T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} e^{\mu_1} e^{\mu_2} \dots e^{\mu_p}$$

Les éléments de  $\otimes E^*$  sont encore appelés tenseurs covariants (d'ordre  $p$  s'ils appartiennent à  $E^{*\otimes p}$ ).

Bien entendu, nous pourrions considérer des tenseurs  $p$ -fois contravariants et  $q$ -fois covariants (éléments  $T$  de  $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$ ) et pour rester cohérents avec nos notations, nous écrirons les produits tensoriels des vecteurs de  $E$  à gauche de ceux de  $E^*$ , c'est à dire

$$T = T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} e_{\mu_1} e_{\mu_2} \dots e_{\mu_p} e^{\nu_1} e^{\nu_2} \dots e^{\nu_q}$$

ou même encore

$$T = e_{\mu_1} e_{\mu_2} \dots e_{\mu_p} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} e^{\nu_1} e^{\nu_2} \dots e^{\nu_q}$$

On pose  $E^{*\otimes 0} = E^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ .

### 1.5.2 Algèbre extérieure d'un espace vectoriel. Produit extérieur

On notera  $\Lambda^k(E^*)$  l'espace vectoriel des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $E$ . Rappelons que  $T \in E^{*\otimes k}$  est alternée lorsque  $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0$  dès que  $v_i = v_j, i \neq j$ . Il est équivalent de dire (si le corps de base n'est pas de caractéristique 2) que  $T$  est antisymétrique, c'est à dire que  $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$ . On dit aussi que  $T$  est une *forme extérieure* d'ordre  $k$  et que  $\Lambda(E^*)$  est l'algèbre extérieure construite sur  $E^*$ .

**L'antisymétriseur Alt** Le groupe symétrique  $\mathcal{S}_k$  des substitutions sur  $k$  éléments opère de façon évidente sur les  $k$ -uplets de vecteurs. Soit  $s \in \mathcal{S}_k$

$$s.(v_1, v_2, \dots, v_k) = (v_{s(1)}, v_{s(2)}, \dots, v_{s(k)})$$

Grâce à cette action, on peut définir un opérateur *Alt* qui projette les tenseurs covariants d'ordre  $k$  sur les formes  $k$ -linéaires antisymétriques

$$\boxed{Alt T = \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \epsilon_s T \circ s}$$

où  $\epsilon$  désigne la parité de la substitution  $s$ . On peut vérifier les propriétés suivantes du projecteur *Alt*. Tout d'abord, c'est effectivement un projecteur de  $E^{*\otimes p}$  sur  $\Lambda^p(E^*)$ , par ailleurs, si  $\omega, \eta$  et  $\theta$  désignent trois tenseurs de  $\otimes E$ , alors  $Alt(Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = Alt(\omega \otimes Alt(\eta \otimes \theta))$  et on peut donc écrire cette quantité sous la forme  $Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$ . La présence du  $k!$  dans la définition de *Alt* est indispensable pour que la propriété précédente d'associativité soit vérifiée.

**Le produit extérieur  $\wedge$**  Soient  $\omega \in \Lambda^k(E^*)$  et  $\eta \in \Lambda^p(E^*)$ . On définit *Le produit extérieur  $\wedge$* ,

$$\boxed{\omega \wedge \eta = \frac{(k+p)!}{k!p!} Alt(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{k+p}(E^*)}$$

Propriétés :

$\wedge$  est associatif et distributif à droite et à gauche sur  $+$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{(pk)} \eta \wedge \omega \text{ En particulier, si } \omega \text{ est impaire, } \omega \wedge \omega = 0$$

Ces propriétés font de  $\Lambda(E^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(E^*)$  une algèbre super-commutative (une algèbre commutative  $\mathbb{Z}_2$ -graduée).

De plus, si  $\omega \in \Lambda^k(E^*)$ ,  $\eta \in \Lambda^p(E^*)$  et  $\theta \in \Lambda^q(E^*)$ , alors

$$\omega \wedge \eta \wedge \theta = \frac{(k+p+q)!}{k!p!q!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

La présence des diverses factorielles dans les expressions ci-dessus, aussi bien dans la définition de *Alt* que dans celle du produit extérieur, disparaît dans bien des cas ; par exemple, le lecteur pourra se convaincre que si  $\{\theta^\mu\}$  désigne une base de 1-formes, les définitions précédentes conduisent aux expressions suivantes :

$$\theta^1 \wedge \theta^2 = \theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1$$

et

$$\begin{aligned} \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 &= \theta^1 \otimes \theta^2 \otimes \theta^3 + \theta^2 \otimes \theta^3 \otimes \theta^1 + \theta^3 \otimes \theta^1 \otimes \theta^2 \\ &\quad - \theta^2 \otimes \theta^1 \otimes \theta^3 - \theta^1 \otimes \theta^3 \otimes \theta^2 - \theta^3 \otimes \theta^2 \otimes \theta^1 \end{aligned}$$

Il faut signaler ici qu'il existe une autre définition du produit extérieur où les membres de droite des expressions précédentes sont respectivement multipliés par  $1/2!$  et  $1/3!$ . La définition adoptée ici est telle que si  $\{e_\mu\}$  désigne une base de l'espace vectoriel considéré et  $\{\theta^\mu\}$  la base duale correspondante, nous avons

$$\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

### Dépendance et indépendance linéaire des formes extérieures

Désignons par  $\{\theta^\mu\}_{\mu \in \{1,2,\dots,n\}}$  une base de  $E^*$ . Considérons un monôme tel que  $\theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\mu_k}$ . Par suite de l'antisymétrie du produit extérieur, il est clair qu'une telle expression est nulle dès qu'un vecteur de base est répété deux fois (c'est une autre façon de dire qu'un tenseur complètement antisymétrique est nul dès que deux indices sont répétés). Par ailleurs, deux monômes de ce type qui ne diffèrent que par l'ordre des termes sont soit égaux, soit opposés. On peut donc supposer que les indices sont ordonnés de la façon suivante :  $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \leq n$ . Enfin, il est facile de voir que toute forme extérieure d'ordre  $k$ , c'est à dire tout élément de  $\Lambda^k(E^*)$  peut se décomposer sur des monômes de ce type. La dimension de l'espace vectoriel  $\Lambda^k(E^*)$  est donc  $\binom{n}{k}$ . Bien entendu, lorsque  $k > n$ , toute forme extérieure est nulle (deux indices sont alors automatiquement répétés!). La dimension de l'algèbre extérieure est donc  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ . Pour conclure ce paragraphe, citons sans démonstration (mais elle est facile) le petit résultat bien utile suivant : Les formes linéaires  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p$  sont indépendantes si et seulement si leur produit extérieur  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p$  est non nul.

**Écriture des formes extérieures** Une forme extérieure  $\omega$  d'ordre  $k$  peut s'écrire de trois façons possibles. Tout d'abord, on peut la considérer

comme un tenseur  $k$  fois covariant, et, à ce titre, on peut la décomposer (existence et unicité) sur la base des tenseurs d'ordre  $k$ . On peut donc écrire

$$\omega = \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} \theta^{\mu_1} \otimes \theta^{\mu_2} \otimes \dots \otimes \theta^{\mu_k}$$

On peut aussi la décomposer sur la base des formes extérieures  $\theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\mu_k}$ , à condition d'ordonner les indices (sinon, la famille précédente est génératrice mais n'est pas libre et donc n'est pas une base!).

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} \theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\mu_k} \\ &= \omega_{|\mu_1\mu_2\dots\mu_k|} \theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\mu_k} \end{aligned}$$

La deuxième égalité utilise une notation  $|\dots|$  qui signifie que non seulement on utilise la convention d'Einstein (sommation sur les indices répétés) mais qu'on décide d'ordonner les indices.

La troisième écriture — de loin, la plus utilisée — est celle où on décompose la forme  $\omega$  (toujours la même) sur la famille génératrice des formes extérieures  $\theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\mu_k}$  mais sans ordonner les indices! Bien entendu, pour un ensemble d'indices donnés (pour un ensemble de vecteurs de base donné),  $k!$  des monômes précédents vont être égaux (ou opposés) et il faudra “corriger” le développement de  $\omega$  en rajoutant un  $1/k!$  devant l'expression. Ainsi donc,

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} \theta^{\mu_1} \wedge \theta^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\mu_k}$$

Notons que la première écriture contient  $n^k$  termes (et il y a unicité de la décomposition), la seconde contient  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  termes (et il y a unicité de la décomposition), la troisième contient  $n^k$  termes (mais il n'y a pas unicité de la décomposition). Il est quelquefois utile, pour alléger les notations, d'introduire des multi-indices  $M = (\mu_1\mu_2\dots\mu_k)$ . Alors, les deux décompositions précédentes s'écrivent

$$\omega = \omega_{|M|} \theta^M = \frac{\omega_M}{k!} \theta^M$$

### 1.5.3 Produit intérieur d'une forme par un vecteur

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\Lambda(E^*)$  l'algèbre extérieure sur son dual. Nous avons défini précédemment le produit *extérieure*, qui est une loi de composition interne à l'algèbre extérieure. Au contraire, l'opération que nous allons

maintenant définir, le produit *intérieur* n'est pas un produit au sens usuel du terme, en effet, il associe, à la donnée d'une forme extérieure  $\omega$  d'ordre  $k$  (un élément de  $\Lambda^k(E^*)$ ) et d'un vecteur  $v$  (un élément de  $E$ ) une autre forme différentielle, mais maintenant d'ordre  $k - 1$ , c'est à dire un élément de  $\Lambda^{k-1}(E^*)$ . Cette nouvelle forme est simplement obtenue en "contractant"  $\omega$  et  $v$ , plus précisément, en écrivant

$$\boxed{[i_v \omega](v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1})}$$

c'est à dire encore, en terme de composantes et en notant  $\alpha = i_v \omega$ ,

$$\alpha_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}} = v^\mu \omega_{\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}}$$

Cette opération est quelquefois notée  $v \lrcorner \omega$  au lieu de  $i_v \omega$ .

Il résulte de l'antisymétrie des formes extérieures que deux opérations  $i_v$  et  $i_w$  anticommulent, en particulier, le carré de l'opération  $i_v$  est nul :  $i_v i_w \omega = -i_w i_v \omega$  et  $i_v i_v \omega = 0$ , ce qu'on écrit simplement

$$\boxed{i_v i_w = -i_w i_v \quad \text{et} \quad i_v i_v = 0}$$

Le produit intérieur est une antiderivation de l'algèbre extérieure, c'est à dire que pour  $\omega_1 \in \Lambda^{k_1}(E^*)$  et  $\omega_2 \in \Lambda^{k_2}(E^*)$ , nous avons un analogue  $\mathbb{Z}_2$ -graduée de la règle de Leibniz

$$\boxed{i_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_v(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge i_v(\omega_2)}$$

En particulier, si  $v = e_{\mu_i}$  est un vecteur de base et si  $\omega$  est égal au produit extérieur d'un certain nombre de vecteurs de la base duale, l'expression précédente donne simplement :

$$\begin{aligned} i(e_{\mu_i}) \sigma^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{\mu_j} \wedge \dots \wedge \sigma^{\mu_k} &= (-1)^{j-1} \sigma^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\sigma^{\mu_j}} \wedge \dots \wedge \sigma^{\mu_k} \quad \text{si } i = j \\ &= 0 \quad \text{si } i \notin \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\} \end{aligned}$$

où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  désigne l'omission du symbole au dessus duquel il est situé.

#### 1.5.4 Transformation du produit extérieur et du produit intérieur par endomorphismes

Soit  $f_\sim$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$  et soit  $f^\sim$  l'endomorphisme dual (aussi appelé transposé). Rappelons ce que cela signifie :  $f_\sim$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$  et  $f^\sim$  est une application linéaire du dual  $E^*$  dans lui-même définie comme suit : soient  $v \in E$  et  $\theta \in E^*$ , alors

$f^\sim(\theta)(v) = \theta(f_\sim(v))$ , c'est à dire encore  $f^\sim(\theta) = \theta \circ f_\sim$ . On peut alors vérifier aisément que

$$f^\sim(\omega \wedge \eta) = f^\sim(\omega) \wedge f^\sim(\eta)$$

et que

$$i_{f_\sim(v)}(\omega) = i_v f^\sim(\omega)$$

Remarque sur les notations : celle utilisant  $*$  et non  $\sim$  est beaucoup plus utilisée ; cela dit, le symbole  $*$  est “trop” utilisé et peut quelquefois prêter à confusion puisqu'il peut aussi bien désigner la conjugaison complexe, la dualité de Hodge, qu'une involution quelconque... Par ailleurs le “tilde” est sous-employé (il désigne traditionnellement l'expression matricielle de  $f^\sim$ ), il en va de même de la “flèche”. Dans le cadre de cet ouvrage, nous écrirons indifféremment  $f_* = f_\sim = \overrightarrow{f}$  et  $f^* = f^\sim = \overleftarrow{f}$ . Notons pour finir que la notation  $f_\sim$  est en général inutile dans le cas des espaces vectoriels puisqu'on peut écrire tout simplement  $f = f_\sim$ , mais dans le cas des variétés, nous verrons que  $f \neq f_\sim \neq f^\sim$  !

## 1.6 Formes différentielles

### 1.6.1 Définition

Nous avons déjà défini la notion de vecteur au point  $P$  d'une variété différentiable  $M$  ainsi que la notion de champ de vecteurs. L'ensemble des vecteurs au point  $P$  se notant  $T_P M$ , l'ensemble de tous les vecteurs (le fibré tangent) se notant  $TM$  et l'ensemble des champs de vecteurs se notant  $\Gamma TM$ , on obtient, par dualité, les notions qui suivent. Tout d'abord l'espace vectoriel dual de  $T_P M$  se note  $T_P^* M$  ; ses éléments sont donc des formes extérieures de degré 1, ou plus simplement, des “1-formes” . L'ensemble  $T^* M$ , baptisé fibré cotangent, est l'ensemble de toutes les 1-formes, lorsque le point  $P$  décrit  $M$ , c'est-à-dire  $T^* M = \cup_{P \in M} T_P^* M$ .

Une forme différentielle (en degré un) est tout simplement un champ de formes extérieures, c'est-à-dire une application qui à tout point  $P \in M$  associe une forme extérieure en ce point. Nous verrons un peu plus loin la raison d'être de cette terminologie. L'ensemble des formes différentielles de degré 1 peut se noter  $\Gamma T^* M$  ou  $\Omega^1 M$ .

Toutes les constructions algébriques du paragraphe précédent (tenseurs et formes extérieures sur un espace vectoriel) sont en particulier valables ici puisqu'on peut choisir comme espace vectoriel, l'espace vectoriel tangent au point  $P$ , c'est-à-dire  $T_P M$ . Les tenseurs  $p$  fois contravariants,  $q$  fois covariants au point  $P$  sont donc des éléments de  $(T_P M)^{\otimes p} \otimes (T_P^* M)^{\otimes q}$ . Si on

considère tous les tenseurs de ce type (c'est-à-dire qu'on effectue la réunion de ces espaces lorsque  $P$  décrit  $M$ ) on obtient  $(TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}$  et on peut bien entendu considérer des champs de tenseurs de ce type, dont l'ensemble constitue  $\Gamma\left((TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}\right)$ .

Le cas particulier des tenseurs complètement antisymétriques est particulièrement intéressant. On notera  $\Lambda(T_P M)^* = \bigoplus_k \Lambda^k(T_P M)^*$  l'algèbre extérieure sur le dual de l'espace vectoriel  $T_P M$  et  $\Lambda(T^*M) = \cup_{p \in M} \Lambda(T_P M)^*$ .

Les *formes différentielles* de degré  $q$  sont des “sections” de  $\Lambda^q(T^*M)$  c'est-à-dire des champs de formes extérieures de degré  $q$ . Leur ensemble peut se noter, bien entendu,  $\Gamma\Lambda^q(T^*M)$ . Lorsque  $q = 1$ , on a  $\Lambda^1(T^*M) = T^*M$ . Pour alléger la notation, on décide de poser  $\Omega^q(M) = \Gamma\Lambda^q(T^*M)$ . On sait que  $q$  ne peut pas être trop grand ; plus précisément  $0 \leq q \leq n$  avec  $n = \dim M$ . Attention, ne pas confondre la dimensionalité de  $\Lambda(T_P M)^*$  – qui est  $2^n$  – et celle de  $\Omega M = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q M$ , qui est infinie. Notons que les éléments de  $\Omega^0 M$  sont simplement les fonctions sur  $M$  c'est-à-dire  $\Omega^0 M = C^\infty(M)$ . Nous avons déjà étudié les propriétés du produit extérieur et il n'y a rien à rajouter ici : le produit extérieur  $\alpha \wedge \beta$  de deux formes différentielles  $\alpha$  et  $\beta$  est obtenu en “globalisant” la définition déjà connue pour chaque point  $P$  de  $M$ .

$\Omega M$ , munie des opérations de multiplication par un scalaire, d'addition et de produit extérieur, devient ainsi une algèbre. Cette algèbre n'est pas commutative mais elle est commutative graduée puisque  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\#\alpha \#\beta} \beta \wedge \alpha$  où  $\#\alpha$  désigne le degré de  $\alpha$ . On appelle cette algèbre *algèbre de De Rham* des formes différentielles.

Pour ce qui est de l'écriture locale d'une forme différentielle, il n'y a pas grand-chose à rajouter non plus puisque nous savons déjà décomposer une forme extérieure sur une base de l'espace vectoriel  $T_P^* M$ . Le seul problème qui se pose est de savoir comment la base en question varie avec le point  $P$ .

Soient  $x^\mu(P)$  les coordonnées de  $P$  dans une carte locale. On sait que l'ensemble des vecteurs  $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  fournit le repère naturel associé à cette carte, c'est-à-dire que  $\{e_\mu\}$  est une base de l'espace tangent en tout point d'un voisinage de  $P$ .

On désignera par  $\{dx^\mu\}$  la base duale correspondante et on écrira avec des indices “en haut”  $\{e^\mu = dx^\mu\}$ . On peut, si on veut, “visualiser”  $dx^\mu$  par “un petit accroissement”, mais ceci présente un intérêt purement psychologique ; en effet  $dx^\mu$  est *défini* par dualité et donc par la relation  $\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \delta_\nu^\mu$ . De la même façon qu'on avait un repère naturel  $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$  associé aux coordonnées  $x^\mu$ , on a donc aussi un *corepère naturel*  $\{dx^\mu\}$ .

Dans le cas de l'espace tangent, nous avons défini la notion de repère mobile  $\{e_\alpha\}$  (qui était issu de  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  par changement de base arbitraire), nous aurons donc aussi un *corepère mobile*  $\{e^\alpha\}$  défini, en chaque point  $P$  de la

carte, comme la base duale de  $\{e_\alpha\}$ , c'est-à-dire  $\langle e^\alpha, e_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$ .

Venons-en maintenant à la notion de différentielle proprement dite. Pour ce qui est des fonctions (0-formes), on pose bien entendu

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu}$$

La 1-forme  $df$  peut être évaluée sur le champ de vecteurs  $v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . On obtient

$$\langle df, v \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu, v = v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} v^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} v^\nu \delta_\nu^\mu = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

On voit que le membre de droite n'est autre que  $v[f]$ . Ainsi donc,

$$\boxed{\langle df, v \rangle = v[f]}$$

On notera souvent  $df(v)$  au lieu de  $\langle df, v \rangle$ , l'évaluation de la forme  $df$  sur le vecteur  $v$ .

La règle de Leibniz usuelle pour la différentielle d'un produit de deux fonctions, à savoir

$$\boxed{d(fg) = df g + f dg}$$

résulte immédiatement de la propriété, pour les champs de vecteurs, d'être des dérivations de l'algèbre des fonctions.

Nous allons généraliser aussi bien la définition de  $d$  que la règle de Leibniz à des formes différentielles de degré supérieur.

### 1.6.2 La différentielle extérieure $d$

Soit  $\omega$  une  $k$ -forme différentielle; on va définir un opérateur  $d$  qui, appliqué à  $\omega$ , crée une  $(k+1)$ -forme. Cet opérateur est désigné sous le nom de *différentielle extérieure* ou *différentielle de De Rham*.

**Définition 1.** *La forme différentielle  $d\omega$  peut se définir directement par son action sur tout  $(k+1)$ -uplet  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  de champs de vecteurs, en posant*

$$\begin{aligned} d\omega(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} v_i \left[ \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{k+1}) \right] \\ &\quad + \sum_{i \leq j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega \left( [v_i, v_j], v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1} \right) \end{aligned}$$

où le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  désigne l'omission de l'argument correspondant.

Cette définition possède un intérêt pratique certain. Pour se rappeler des signes, on peut signaler le moyen mnémotechnique suivant : le premier type de termes s'obtient en faisant passer les vecteurs  $v_i$  devant  $\omega$  et en comptant un signe "−" chaque fois que  $v_i$  "traverse" un des autres vecteurs ; le second type de terme s'obtient en choisissant une paire  $v_i, v_j$  et en la faisant passer en position 1 et 2 de la forme  $\omega$ , tout en utilisant l'antisymétrie de  $\omega$  lorsqu'on effectue des transpositions. On remplace alors la paire  $(v_i, v_j)$  par son crochet  $[v_i, v_j]$  et on multiplie le tout par un signe  $-1$ .

Exemple 1 : Soit  $f$  une 0-forme, c'est à dire une fonction sur  $M$ . La définition ci-dessus conduit à

$$df(v) = v[f]$$

ce qu'on savait déjà.

Exemple 2 : Soit  $\omega$ , une 1-forme, alors

$$d\omega(u, v) = u(\omega(v)) - v(\omega(u)) - \omega([u, v])$$

Si  $u = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  et  $v = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ , on trouve simplement que les composantes de  $F = d\omega$  sont données par  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ .

Le lecteur aura reconnu, dans le cas de la dimension 4, l'expression du champ électromagnétique (le tenseur  $F$ ) en terme du (quadri) potentiel vecteur  $\omega$ . Soit dit en passant, il faut incorporer le troisième terme (l'évaluation de  $\omega$  sur le commutateur  $[u, v]$ ) lorsqu'on veut exprimer le champ  $F = d\omega$  dans un repère quelconque.

Exemple 3 : Soit  $\omega$ , une 2-forme, alors

$$\begin{aligned} d\omega(x, y, z) &= x(\omega(y, z)) - y(\omega(x, z)) + z(\omega(x, y)) \\ &\quad - \omega([x, y], z) - \omega([y, z], x) + \omega([x, z], y) \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $d$ , donnée ci-dessus, on montre immédiatement que, si  $\omega_1 \in \Omega^{k_1}$  et  $\omega_2 \in \Omega^{k_2}$ , alors

$$\boxed{d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2}$$

De la même façon, on montre que

$$\boxed{d^2 = 0}$$

Les deux propriétés ci-dessus sont absolument fondamentales et peuvent même servir à définir l'opérateur  $d$  lui même.

**Définition 2.**  $d$  est l'unique opérateur (application linéaire) de  $\Omega^k M$  dans  $\Omega^{k+1} M$  tel que, pour tout  $k$ ,  $\omega_1 \in \Omega^{k_1}$ ,  $\omega_2 \in \Omega^{k_2}$ ,  $k = k_1 + k_2$ , on ait  $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$  et  $d^2 = 0$ . En d'autre terme  $d$  étend la définition usuelle de différentiation des fonctions en une dérivation graduée de carré nul de l'algèbre  $\Omega M$ . En physique, si  $\omega$  désigne le quadri-potentiel vecteur, alors,  $F = d\omega$  obéit automatiquement à l'équation  $dF = 0$ , puisque  $d^2 = 0$ . Ceci nous donne donc la moitié des équations de Maxwell (les équations sans source).

Il existe une troisième définition possible de l'opérateur  $d$ , définition qui est également d'un intérêt pratique certain. La voici :

**Définition 3.** Relativement à un choix de coordonnées on peut écrire  $\omega = \omega_I dx^I$ , où  $I$  est un multi-indice et  $\omega_I$  est une 0-forme, c'est-à-dire une fonction. On définit d'abord  $d$  sur les fonctions  $d\omega_I = \frac{\partial \omega_I}{\partial x^\mu} dx^\mu$ . Ensuite, plus généralement, on pose  $d\omega = d\omega_I \wedge dx^I$ .

Nous venons de voir trois définitions équivalentes possibles de l'opérateur  $d$ . Toutes les trois sont utiles et nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'équivalence des définitions.

Terminons par un petit calcul élémentaire (clin d'œil au cours d'électromagnétisme). Soit  $A = A_\mu dx^\mu$  une 1-forme (le quadri-potentiel vecteur). Le champ de Maxwell est défini par

$$F = dA = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

Or

$$\begin{aligned} dA &= d(A_\mu) \wedge dx^\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

### 1.6.3 L'équation de Maurer-Cartan pour un repère mobile

Soit  $\{e_\alpha\}$  un repère mobile et  $f_{\beta\gamma}^\alpha$  les fonctions de structure correspondantes, c'est-à-dire que ce repère vérifie l'équation de structure :  $[e_\beta, e_\gamma] = f_{\beta\gamma}^\alpha e_\alpha$ .

Soit  $\{e^\alpha\}$  le co-repère mobile correspondant défini, comme on l'a vu, par dualité. Le co-repère vérifie également une équation de structure (souvent

désignée sous le nom d'équation de Maurer-Cartan)

$$\boxed{de^\alpha + \frac{1}{2}f_{\beta\gamma}^\alpha e^\beta \wedge e^\gamma = 0}$$

La façon la plus simple de démontrer cette identité est de la vérifier en l'évaluant sur un couple  $(e_\delta, e_\epsilon)$  de vecteurs du repère mobile. D'une part, en effet,

$$\begin{aligned} de^\alpha(e_\delta, e_\epsilon) &= e_\delta(e^\alpha(e_\epsilon)) - e_\epsilon(e^\alpha(e_\delta)) - e^\alpha([e_\delta, e_\epsilon]) \\ &= e_\delta(\delta_\epsilon^\alpha) - e_\epsilon(\delta_\delta^\alpha) - f_{\delta\epsilon}^\alpha e^\alpha(e_\gamma) \\ &= 0 - 0 - f_{\delta\epsilon}^\alpha \delta_\gamma^\alpha = -f_{\delta\epsilon}^\alpha \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont nuls puisqu'on dérive des constantes!

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_{\beta\gamma}^\alpha e^\beta \wedge e^\gamma(e_\delta, e_\epsilon) &= \frac{1}{2}f_{\beta\gamma}^\alpha (e^\beta \otimes e^\gamma - e^\gamma \otimes e^\beta)(e_\delta, e_\epsilon) = \frac{1}{2}f_{\beta\gamma}^\alpha (\delta_\delta^\beta \delta_\epsilon^\gamma - \delta_\delta^\gamma \delta_\epsilon^\beta) \\ &= \frac{1}{2}f_{\delta\epsilon}^\alpha - \frac{1}{2}f_{\epsilon\delta}^\alpha = \frac{1}{2}f_{\delta\epsilon}^\alpha + \frac{1}{2}f_{\delta\epsilon}^\alpha = f_{\delta\epsilon}^\alpha \end{aligned}$$

D'où le résultat.

#### 1.6.4 Produit intérieur d'une forme par un champ ou vecteurs

Cette opération généralise celle étudiée précédemment (produit intérieur d'une forme extérieure par un vecteur). On associe, à une  $k$  forme  $\omega$  et un vecteur  $v$  une  $k-1$  forme notée  $i_v\omega$ . La définition en est très simple : pour une 1-forme, c'est tout simplement l'évaluation. C'est-à-dire  $i_v\omega = \omega(v) = \langle \omega, v \rangle$ . Pour une  $k$ -forme, on généralise simplement en contractant l'indice du vecteur  $v$  avec le premier indice de la forme  $\omega$ ; en d'autres termes (et sans utiliser d'indices)  $i_v\omega$  est la  $k-1$  forme définie par

$$\boxed{i_v\omega(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1})}$$

Si  $\alpha = i_v\omega$  on a évidemment  $\alpha_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}} = v^\nu \omega_{\nu\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}}$ . Il s'agit d'une opération très élémentaire généralisant l'évaluation d'une forme sur un vecteur. L'opération  $i_v$ , de  $\Omega^k M$  dans  $\Omega^{k-1} M$  est, comme l'opération  $d$ , une dérivation graduée et de carré nul de l'algèbre extérieure. La propriété d'être de carré nul est une conséquence immédiate du fait que les formes différentielles sont des objets antisymétriques et donc s'annulent dès que deux arguments sont égaux. La propriété d'anti-dérivation, c'est-à-dire

$$\boxed{i_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_v\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (i_v\omega_2)}$$

où  $k$  est le degré de  $\omega_1$  est également une conséquence immédiate de la définition. La différence essentielle entre l'opération  $d$  et l'opération  $i_v$  est que ces deux opérations vont dans des sens différents ( $i_v$  fait baisser le degré d'une unité alors que  $d$  l'élève). Notons que la définition de  $i_v$  dépend du choix du vecteur  $v$ .

## 1.7 Application tangente et cotangente

Soit  $f$  un difféomorphisme de la variété  $M$ , ou, plus généralement, une application différentiable de  $M$  (de dimension  $m$ ) dans  $N$  (de dimension  $n$ ). En coordonnées locales,  $f$  s'écrit à l'aide de  $n$  fonctions  $f^\alpha$  de  $m$  variables  $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ . La matrice jacobienne de cette application est la matrice  $(n, m)$  des éléments  $\partial y^\alpha / \partial x^\mu$ . Une telle matrice définit une application linéaire de l'espace vectoriel tangent à  $M$  au point  $P$  dans l'espace tangent à  $N$  au point  $f(P)$ . Soit  $\{\partial_\mu\}$  un repère naturel de  $M$  défini dans un voisinage de  $P$  et  $\{\partial_\alpha\}$  un repère naturel de  $N$  défini dans un voisinage de  $f(P)$ . Soit  $v \in T_P(M)$ , on peut écrire  $v = v^\mu \partial_\mu$ . On obtient un vecteur  $w \in T_{f(P)}(N)$  en écrivant  $w = w^\alpha \partial_\alpha$  avec

$$\boxed{(w^\alpha) = \left( \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \right) (v^\mu)}$$

Cette application, dite application linéaire tangente (ou "push forward") se note, suivant les auteurs  $f_*$ ,  $Tf$ ,  $f_\sim$ , ou même  $\vec{f}$  et on dit que  $w = \vec{f}(v)$  est l'image directe de  $v$ . On peut bien entendu définir directement  $\vec{f}$  sans utiliser de systèmes coordonnés. De façon générale, à toute application différentiable  $f : M \rightarrow N$ , on associe une application linéaire tangente  $\vec{f} : TM \rightarrow TN$ , et si  $v \in T_P M$ , alors  $\vec{f}[v] \in T_{f(P)} M$ .

Remarque : on peut toujours prendre l'image d'un vecteur tangent par l'application tangente, mais l'image d'un champ de vecteurs  $v$  sur  $M$  ne définit pas nécessairement un champ de vecteur sur  $N$ ; d'une part, en effet, rien ne prouve qu'un point  $Q$  quelconque de  $N$  soit nécessairement dans l'image de  $f$ , et par ailleurs, même si  $f$  est surjective, rien ne dit, dans le cas où deux points distincts  $P_1$  et  $P_2$  seraient tels que  $f(P_1) = f(P_2)$  que l'image par  $\vec{f}$  du vecteur  $v(P_1)$  coïncide avec l'image par  $\vec{f}$  du vecteur  $v(P_2)$ . En fait, pour une application différentiable surjective  $f : M \rightarrow N$  donnée, il est commode d'introduire la notion de *champ de vecteurs projetable* :  $v \in \Gamma(TM)$  est dit projetable (par  $f$ ) si, pour tout  $Q \in N$  et pour toute paire  $(P_1, P_2)$  de points de  $M$  tels que  $Q = f(P_1) = f(P_2)$  on ait  $\vec{f}[v(P_1)] = \vec{f}[v(P_2)]$ ; dans ce cas on obtient bien un champ de vecteur sur  $N$ .

La même matrice jacobienne  $(\partial y^\alpha / \partial x^\mu)$  définit également une application

linéaire de l'espace cotangent à  $N$  au point  $f(P)$  dans l'espace cotangent à  $M$  au point  $P$ . En effet, soit  $\tau \in T_{f(P)}^*N$ , alors  $\tau = \tau_\alpha dy^\alpha$ . L'image de la forme  $\tau$  est la forme  $\sigma \in T_P^*M$ , avec  $\sigma = \sigma_\mu dx^\mu$  et

$$\boxed{(\sigma_\mu) = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right) (\tau_\alpha)}$$

Cette application, qu'on pourrait appeler *application linéaire cotangente*, (ou "pull back") et noter  $f^*$ ,  $T^*f$ ,  $f^\sim$ , ou même  $\overleftarrow{f}$  n'est donc autre que la transposée de l'application linéaire tangente  $\overrightarrow{f}$  au point  $P \in M$  : elle envoie les co-vecteurs de  $N$  au point  $f(P)$  (i.e. les 1-formes de  $N$  au point  $f(P)$ ) dans les co-vecteurs de  $M$  au point  $P$ . Si  $\tau \in T_{f(P)}^*N$ , alors  $\overleftarrow{f}(\tau) = \tau \circ \overrightarrow{f} \in T_P^*M$ . Cette application de  $T_{f(P)}^*N$  dans  $T_P^*M$  ne peut manifestement pas, en général, se généraliser à une application de  $T^*N$  dans  $T^*M$ ; la situation n'est donc pas tout à fait analogue à celle de l'application tangente, qui, elle, est bien définie, comme application de  $TM$  dans  $TN$ .

Par contre, si  $\omega$  est une 1-forme différentielle sur  $N$ , c'est à dire un champ de co-vecteurs, on peut toujours considérer son image par  $\overleftarrow{f}$ ; en effet, dans ce cas, si  $v$  est un vecteur quelconque en  $P \in M$ , alors  $\overrightarrow{f}(P)$  est un vecteur en  $Q = f(P) \in N$  et le nombre  $\omega_Q[\overrightarrow{f}(P)]$  est bien défini. On obtient ainsi une 1-forme différentielle sur  $M$  qu'on notera  $f^*\omega$  ou  $\overleftarrow{f}(\omega)$ . On l'appelle en général "pull back" de  $\omega$  par  $f$ .

Quelques remarques sur les notations : on peut trouver commode d'utiliser de nouveau le symbole  $df$  et d'écrire tout simplement (en un point  $P$  donné, non explicitement indiqué par la notation)

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dx^\mu}$$

et donc de considérer  $df$  comme un élément de  $T_{f(P)}N \otimes T_P^*M$ . La matrice  $(\partial f^\alpha / \partial x^\mu)$  est la matrice jacobienne de l'application  $f$ . Attention,  $df$ , ici, n'est pas une 1-forme puisque  $f$  n'est pas une fonction à valeurs dans le corps des scalaires mais une application entre deux variétés. Il ne semble pas nécessairement utile de vouloir à tout crin introduire de nouvelles notations chaque fois qu'une fonction de plusieurs variables donne naissance à des applications différentes lorsqu'on décide de geler l'un ou l'autre de ses arguments ! La notation "différentielle" précédente est une généralisation directe de la notation désignant la différentielle d'une fonction à valeurs réelles. Ici,  $df$  doit être considérée comme une application bilinéaire qu'on peut noter  $(\cdot, df, \cdot)$  dont l'une des restrictions coïncide avec  $\overrightarrow{f}$  et l'autre avec  $\overleftarrow{f}$ . Si on choisit  $\tau \in T_{f(P)}^*N$  et  $v \in T_P M$ , on voit que

$$\sigma = \overleftarrow{f}(\tau) = (\tau, df, \cdot) \in T_P^*M \quad \text{et} \quad w = \overrightarrow{f}(v) = (\cdot, df, v) \in T_{f(P)}N$$

La notation suivante est également très commode :

$$\langle \sigma | = \langle \tau | df \quad \text{et} \quad |w\rangle = df|v\rangle$$

Si on choisit un repère mobile  $e_{\hat{\alpha}} = \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\beta} \partial_{\beta}$  dans  $N$  et un co-repère mobile  $e^{\hat{\mu}} = L_{\hat{\nu}}^{\mu} dx^{\nu}$  dans  $M$ , on pourra écrire également

$$df = (\Lambda^{-1})_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} (L^{-1})_{\hat{\nu}}^{\mu} e_{\hat{\beta}} \otimes e^{\hat{\nu}}$$

et considérer la quantité  $f_{\hat{\nu}}^{\hat{\beta}} = (\Lambda^{-1})_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} (\partial f^{\alpha} / \partial x^{\mu}) (L^{-1})_{\hat{\nu}}^{\mu}$  comme les éléments de la matrice jacobienne de  $f$  par rapport au choix de deux repères mobiles.

Nous venons de voir que les 1-formes de  $N$  peuvent être “rappelées” sur  $M$  à l’aide de  $\overleftarrow{f}$  :

$$\overleftarrow{f} \omega = \omega \overrightarrow{f}$$

Il en va de même des  $p$ -formes et on définit, pour  $\omega \in \Omega^p N$ , la  $p$ -forme  $\overleftarrow{f}(\omega) \in \Omega^p M$  par l’égalité

$$\overleftarrow{f} \omega(v_1, v_2, \dots, v_p) = \omega(\overrightarrow{f} v_1, \overrightarrow{f} v_2, \dots, \overrightarrow{f} v_p)$$

avec  $v_1, v_2, \dots, v_p \in TM$ .

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes :

$$\overleftarrow{f}(\omega \wedge \eta) = \overleftarrow{f}(\omega) \wedge \overleftarrow{f}(\eta)$$

$$i_v \overleftarrow{f}(\omega) = \overleftarrow{f} \left( i_{\overrightarrow{f}(v)} \omega \right)$$

$$\overleftarrow{f} d\omega = d \overleftarrow{f} \omega$$

## 1.8 Dérivées de Lie

La notion usuelle de dérivée d’une fonction numérique  $f$  nous permet de préciser la notion de variation locale de cette fonction lorsque son argument croît ou décroît. Lorsque l’argument se déplace sur une variété de dimension supérieure à 1, la variation ne sera définie que si on précise dans quelle direction se déplace le point (l’argument). En d’autres termes, la généralisation de la notion de dérivée invoque obligatoirement la notion de vecteur tangent. La dérivée d’une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à un champ de vecteurs  $X$  se note  $L_X f$  et est tout simplement définie par l’égalité

$$L_X f = df[X] = X[f]$$

Ainsi, la différentielle de  $f$  “code” toutes les variations possibles, alors que la dérivée de  $f$  dans la direction  $X$  est obtenue en évaluant la différentielle de  $f$  sur le vecteur  $X$ .

Cette notion de dérivée se généralise au cas où  $f$  n’est plus une fonction sur  $M$  à valeurs réelles mais un champ  $t$  de tenseurs quelconques (ou même, comme on le verra plus tard, une section d’un fibré quelconque au-dessus de  $M$ ). On a envie de donner un sens à la limite de  $\frac{t(x+\epsilon X)-t(x)}{\epsilon}$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. La quantité correspondante se note toujours  $L_X t$  et s’appelle *dérivée de Lie* du tenseur  $t$  par rapport au champ de vecteurs  $X$ . C’est un tenseur de même type que  $t$ . On veut que  $L_X$  soit une dérivation de l’algèbre tensorielle, c’est-à-dire qu’on impose

$$\boxed{L_X(t_1 \otimes t_2) = L_X t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes L_X t_2}$$

où  $t_1$  et  $t_2$  sont des tenseurs quelconques. Pour définir complètement  $L_X$  il suffit de préciser la valeur de  $L_X Y$  lorsque  $Y$  est un champ de vecteurs (contravariants) et de  $L_X \omega$  lorsque  $\omega$  est une 1-forme (champ de vecteurs covariants). Dans le premier cas on pose

$$L_X Y = [X, Y]$$

Par exemple,

$$L_{e_\rho} e_\mu = f_{\rho\mu}^\nu e_\nu$$

Dans le second cas (action de  $L$  sur les 1-formes), on définit  $L_X \omega$  par la relation

$$[L_X \omega](Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

où  $Y$  est, comme  $X$ , un champ de vecteurs sur  $M$ . Nous laissons le soin au lecteur de démontrer que cette définition, ainsi que la propriété de dérivation, conduit à la relation suivante caractérisant l’action de  $L_X$  sur les formes différentielles :

$$\boxed{L_X = d i_X + i_X d}$$

Cette dernière propriété peut d’ailleurs servir de définition. Il est alors immédiat de vérifier que  $L_X$  est une dérivation de l’algèbre des formes différentielles puisque  $d$  et  $i_X$  sont des dérivations graduées.  $L_X$  est une “vraie” dérivation et non une dérivation graduée : le signe  $(-1)$  potentiel, dans la règle de Leibniz, disparaît.

$$\boxed{L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X(\beta)}$$

De plus  $L_X$  ne modifie pas le degré des formes puisque  $d$  et  $i_X$  agissent en sens contraires. La relation précédente conduit immédiatement à la formule

explicitement

$$L_X \omega(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$$

Le cas particulier où  $\omega$  est une 1-forme se retrouve aussi aisément. Notons que, dans ce dernier cas, si  $e_\mu$  et  $e^\mu$  désignent deux repères duaux l'un de l'autre (un repère mobile et le co-repère mobile dual), on a

$$L_X e^\mu = e^\mu([e_\nu, X])e^\nu$$

et en particulier

$$\boxed{L_{e_\rho} e^\mu = f_{\nu\rho}^\mu e^\nu}$$

En coordonnées locales, lorsqu'on choisit un repère naturel, on peut écrire  $\omega = 1/k! \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$  et on obtient

$$\boxed{L_X \omega = \frac{1}{k!} \left( X^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} + \omega_{\rho\mu_2 \dots \mu_k} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^{\mu_1}} + \dots + \omega_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^{\mu_k}} \right) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}}$$

Dans le cas des formes, la définition de la dérivée de Lie implique immédiatement que  $L_X$  commute avec  $d$  (car  $d^2 = 0$ ), ainsi qu'avec  $i_X$  (puisque  $i_\nu i_\nu = 0$ ), et que, par ailleurs

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]} &= L_X i_Y - i_Y L_X \\ [L_X, L_Y] &= L_{[X,Y]} \end{aligned}$$

Enfin, si  $f$  est une application différentiable et  $\omega$  une forme différentielle, on voit que

$$L_X \overleftarrow{f} \omega = \overleftarrow{f} L_{\overrightarrow{f}X} \omega$$

Nous terminons ce paragraphe en montrant que la dérivée de Lie du tenseur de Kronecker  $\delta = e_\mu \otimes e^\mu$  est nulle dans toutes les directions. En effet

$$\begin{aligned} L_{e_\rho} \delta &= L_{e_\rho} e_\mu \otimes e^\mu + e_\mu \otimes L_{e_\rho} e^\mu \\ &= [e_\rho, e_\mu] \otimes e^\mu + e_\mu \otimes f_{\nu\rho}^\mu e^\nu \\ &= f_{\rho\mu}^\sigma e_\sigma \otimes e^\mu + f_{\nu\rho}^\mu e_\mu \otimes e^\nu = 0 \end{aligned}$$

## 1.9 Flots

Un *flot* sur la variété  $M$  est un sous-groupe différentiable à un paramètre  $\{\phi_t\}$  de difféomorphismes de  $M$  : on suppose que pour tout  $t$  réel, l'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi_t \in \text{Diff}(M)$  est un homomorphisme de groupe et que l'application  $(t, P) \in \mathbb{R} \times M \mapsto \phi_t(P) \in M$  est différentiable.

La *trajectoire du flot* aussi appelée *courbe intégrale du flot* passant par le point  $P \in M$  est la courbe  $t \mapsto \phi_t(P)$ . L'application linéaire tangente à cette courbe associée au vecteur unité 1 de  $\mathbb{R}$  (identifié avec son espace tangent en 0) un vecteur tangent en  $Q = \phi_t(P) \in T(M, Q)$ . Ce vecteur tangent en  $Q$  ne dépend que du flot. En effet, les propriétés d'homomorphisme  $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$ , et de bijectivité de  $\phi_f$ , montrent que si deux trajectoires passent par le même point  $Q$ , c'est à dire si  $\phi_{t_1}(P_1) = \phi_{t_2}(P_2)$ , avec  $t \geq t_2$  par exemple, on peut poser  $t_1 = t - t_2$  et  $P_2 = \phi_{t_1}(P_1)$ , ce qui montre que les vecteurs tangents en  $Q$  à ces deux trajectoires coïncident. Le vecteur tangent obtenu, notons le  $X(Q)$ , définit un champ de vecteurs  $X$  quelquefois désigné sous le nom de *champ des vitesses du flot*.

Puisque le flot choisi définit un champ des vitesses, il définit également une dérivée de Lie par rapport à ce champ de vecteurs.

On peut démontrer qu'inversement, un champ de vecteurs sur une variété définit un *flot local*, c'est à dire qu'il ne sera en général défini que sur un ouvert strictement inclus dans  $\mathbb{R} \times M$  ; si cette inclusion devient une égalité, le champ de vecteur est dit "complet" et il engendre un flot : les difféomorphismes  $\phi_t$  sont alors définis quel que soit  $t$ .

## 1.10 Orientation – Élément de volume Déterminant – Intégration

En géométrie élémentaire, l'orientation d'un espace vectoriel réel est spécifiée par le choix d'une base  $\mathcal{B}$  (choix *ordonné* d'un système libre et générateur). Le choix d'une autre base  $\mathcal{B}'$  détermine un isomorphisme  $g$  qui envoie les vecteurs de  $\mathcal{B}$  sur les vecteurs de  $\mathcal{B}'$ . On dit que  $g$  préserve l'orientation si  $\det g > 0$  et renverse l'orientation si  $\det g < 0$ . Dans le premier cas on dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont la même orientation ; dans le second cas,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont des orientations opposées. On peut alors répartir les bases de l'espace vectoriel en question en deux classes d'équivalence correspondant aux deux orientations possibles. Afin de généraliser cette discussion au cadre des variétés, il est utile de reformuler ce qui précède en terme de formes extérieures. Nous allons donc travailler avec les bases duales et poser  $e^{\mu'} = f(e^\mu)$ .

Soit  $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}$  et  $\omega = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$ .

Soit  $\mathcal{B}'^* = \{e^{1'}, e^{2'}, \dots, e^{n'}\}$  avec  $e^{\mu'} = f(e^\mu)$  et  $\omega' = f(e^1) \wedge f(e^2) \wedge \dots \wedge f(e^n)$ . L'espace des formes extérieures de degré  $n$  sur un espace vectoriel de dimension  $n$  est un espace vectoriel de dimension 1. Les formes  $\omega$  et  $\omega'$  sont donc proportionnelles et le coefficient de proportionnalité n'est autre que le déterminant de  $f$  :  $\omega' = (\det f) \omega$ . Nous laissons au lecteur le soin de retrouver la définition élémentaire des déterminants en écrivant  $e^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} e^\mu$ .

L'orientation de l'espace vectoriel qui était définie par le choix de  $\mathcal{B}$  peut tout aussi bien se définir par le choix de la  $n$ -forme  $\omega$ . Deux  $n$ -formes  $\omega$  et  $\omega'$  (obligatoirement proportionnelles) définissent la même orientation si le coefficient de proportionnalité est positif et deux orientations de sens contraire si le coefficient en question est négatif. Nous pouvons maintenant passer au cas des variétés. Nous venons de voir que l'orientation, en chaque point  $P$  de  $M$ , de l'espace tangent  $T_P M$ , est équivalente au (ou définie par le) choix d'une  $n$ -forme extérieurement en ce point. On pourrait donc naïvement penser que, pour définir une orientation globale de la variété  $M$ , il suffit de choisir une  $n$ -forme différentiable  $\omega$ . Le problème est que, si  $\omega$  s'annule en un point, l'orientation cesse d'être définie en ce point ! Pour pouvoir parler d'orientation de façon globale, il faut donc qu'il soit possible de choisir une  $n$ -forme différentielle sur  $M$  qui ne s'annule nulle part. Ceci n'est pas toujours possible : on dit que la variété est orientable ou non orientable suivant les cas. Tout le monde connaît l'exemple fameux du ruban de Moebius ou de la bouteille de Klein.

On appelle "élément de volume" sur  $M$  le choix d'une  $n$ -forme  $\omega$  sur  $M$  qui ne s'annule nulle part (ce qui suppose, par définition, que  $M$  soit orientable). On note  $[\omega]$  l'ensemble des éléments de volume proportionnels à  $\omega$ , avec un coefficient de proportionnalité positif et  $[-\omega]$  l'ensemble des éléments de volume proportionnels à  $\omega$ , avec un coefficient de proportionnalité négatif. Une variété orientable possède donc deux orientations possibles, l'une quelconque d'entre elles étant caractérisée par le choix d'un élément de volume appartenant à l'une des deux classes possibles. Soient maintenant  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables de même dimension  $n$  et  $f$  un difféomorphisme de  $M$  dans  $N$  ; on suppose  $M$  et  $N$  orientables et orientées par le choix des éléments de volume  $\omega_M$  et  $\omega_N$ . On dit que  $f$  préserve l'orientation si et seulement si  $\overleftarrow{f}(\omega_N) \in [\omega_M]$  et renverse l'orientation si  $\overleftarrow{f}(\omega_N) \in [-\omega_M]$ .

### 1.10.1 Orientation – Partition de l'unité

Notre but, dans ce paragraphe, est d'introduire la notion d'intégration des formes différentielles. Comme d'habitude, on va commencer par définir cette notion pour l'espace numérique  $\mathbb{R}^n$ , puis, grâce à un système de cartes, on va pouvoir généraliser la construction au cas des variétés. On suppose le lecteur familier avec la notion d'intégrale (de Riemann) sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f$  une fonction

(numérique) c'est-à-dire une fonction – que nous supposons différentiable – de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs réelles. Nous supposons, de plus, que  $f$  est à support compact. Son intégrale est notée  $\int_{\mathbb{R}^n} f$  ou  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x$ , comme d'habitude. Choisissons maintenant une orientation sur  $\mathbb{R}^n$  et considérons la  $n$ -forme

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

où  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$  est une  $n$ -forme positive pour l'orientation choisie. On pose simplement

$$\int \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f d^n x$$

Notons que la définition du membre de gauche dépend de l'orientation choisie ; en d'autres termes, on peut identifier les deux notations et concepts en posant

$$d^n x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

mais il faut bien noter que l'identification des notations dépend du choix d'une orientation car l'intégrale d'une  $n$ -forme dépend de l'ordre  $x^1, x^2, \dots, x^n$  alors que l'intégrale de Riemann d'une fonction  $f$  n'en dépend pas. Soit  $T$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire un changement de variables  $x^\mu \xrightarrow{T} y^\mu$ .

Notre étude générale des formes différentielles implique en particulier

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = J(T) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

où  $J(T) = \det(\partial x^\mu / \partial y^\nu)$  est le jacobien (le déterminant de la matrice jacobienne) de l'application  $T$ . On a donc

$$\int f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int f(T^{-1}(y)) J(T) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

Mais on sait bien que

$$\int f(x) d^n x = \int f(T^{-1}(y)) |J(T)| d^n y$$

Donc si  $\overleftarrow{T}\omega$  désigne l'image réciproque de  $\omega$ , on voit que  $\overleftarrow{T}\omega = \pm \int \omega$  suivant que  $T$  préserve ou non l'orientation : l'intégrale d'une  $n$ -forme est invariante sous le groupe des difféomorphismes qui préservent l'orientation.

Passons maintenant au cas des variétés. Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et  $\omega$  une  $n$ -forme à support compact. Supposant la variété orientable, on choisit une orientation  $[M]$  et une *partition de l'unité*  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$  subordonnée à un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , c'est-à-dire qu'on se donne une famille de fonctions différentielles non négatives  $\rho_\alpha$  telles que le support de  $\rho_\alpha$  soit contenu dans

$U_\alpha$  et telles que  $\sum \rho_\alpha = 1$  (chaque point de  $M$  doit posséder un voisinage dans lequel la somme précédente est une somme finie). L'existence d'une telle partition de l'unité, pour une variété différentiable, est un théorème (que nous ne démontrons pas) qui permet, dans de nombreux cas, de passer des résultats locaux (valables dans une carte) aux résultats globaux (valables pour toute la variété  $M$ ). On définit l'intégrale de  $\omega$  sur  $[M]$  par l'égalité

$$\int_{[M]} \omega = \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \omega$$

où la quantité  $\int_{U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \omega$  signifie en fait  $\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\alpha}^{-1})^*(\rho_{\alpha} \omega)$  pour une trivialisatation locale  $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$  préservant l'orientation. On se ramène ainsi au cas de  $\mathbb{R}^n$ .

L'orientation étant choisie une fois pour toutes, on note  $\int_M$  et non plus  $\int_{[M]}$  l'intégrale correspondante. Il reste alors à démontrer que la définition adoptée ne dépend pas des cartes choisies. . .

On appelle *élément de volume* sur  $M$  (de dimension  $n$ ) ou *forme volume* un élément quelconque  $\epsilon$  de  $\Omega^n M$ . Le *volume* de  $M$ , supposée compacte, est alors égal, par définition, à  $\int_M \epsilon$ . Il faut bien noter que sur une variété quelconque (orientée), on intègre des  $n$ -formes, et non des fonctions, à moins, précisément, d'avoir choisi un élément de volume  $\epsilon$  une fois pour toutes, auquel cas on peut évidemment poser  $\int_M f = \int_M f \epsilon$  où  $f \in C^\infty(M)$ . Un cas particulièrement important à considérer est celui où la forme volume est associée canoniquement au choix d'une structure riemannienne (voir section 1.11) sur la variété en question.

## 1.11 Variétés riemanniennes (propriétés élémentaires)

En toute logique, cette section ne devrait pas se trouver dans ce premier chapitre consacré aux variétés différentielles. En effet, la définition de la structure de variété riemannienne est liée à un cas particulier de restriction d'espace fibré (les espaces fibrés font l'objet du chapitre 4). Cela dit, pour des raisons à la fois historiques et pédagogiques, il est sans doute préférable que le lecteur se familiarise d'ores et déjà avec certaines propriétés des variétés riemanniennes.

En géométrie élémentaire, on étudie d'abord les propriétés linéaires et affines et on passe, ensuite, aux notions métriques. Il en va de même dans l'étude des variétés. Une variété différentiable est encore un objet flasque et mou. . . la donnée d'une métrique rigidifie l'espace considéré et permet, d'une part, de parler de norme des vecteurs tangents et, d'autre part, de parler

de distances entre points. La définition élémentaire d'une métrique  $g$ , sur une variété différentiable  $M$ , est la suivante : c'est un champ de tenseurs covariants symétriques de degré deux (en général on impose également une condition de non dégénérescence). Si  $\{x^\mu\}$  désigne un système de coordonnées locales, on écrira

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

La métrique  $g$  est quelquefois notée  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  et appelée "élément de longueur" ou *tenseur métrique*. Si  $\{e^\alpha\}$  est un co-repère mobile, on pourra écrire également  $g = g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta$ . En tout point  $P$  de  $M$  on a donc un produit scalaire  $g_P$  défini sur  $T_P M$  et permettant de calculer le produit scalaire  $g_P(v, w)$  de deux vecteurs quelconques  $v$  et  $w$  appartenant à l'espace tangent en ce point. On a déjà dit que  $g$  devait être symétrique (c'est-à-dire  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , ou  $g_P(v, w) = g_P(w, v)$ ). Dans la plupart des cas, on impose également à  $g$  d'être non dégénérée : le déterminant de la matrice  $(g_{\mu\nu})$  est supposé non nul en tout point  $P$  et on peut donc inverser cette matrice. On obtient ainsi  $(g^{\mu\nu})$  avec  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ . Cela définit un produit scalaire sur l'espace cotangent qu'on pourra noter  $\sharp g$  (et quelquefois  $g^{-1}$ ) et même parfois  $g$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$g = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Une variété différentiable munie d'une métrique (non dégénérée) est, par définition, une *variété riemannienne*. Nous n'avons pas imposé au produit scalaire défini par  $(g_{\mu\nu})$  d'être positif et nous ne l'imposerons pas. En général, une forme bilinéaire symétrique est caractérisée par sa signature  $(p, q)$  – le nombre de signes  $+$  ( $p$ ) et de signes  $-$  ( $q$ ) obtenus lorsqu'on la diagonalise. Si on tient à préciser que la signature est de type  $(p, 0)$  ou  $(0, p)$ , on dira que la variété est proprement riemannienne. Si on tient à préciser que la signature est de type  $(p, 1)$  ou  $(1, p)$ , on dira que la variété est lorentzienne (on dit aussi, dans ce dernier cas, que la signature est hyperbolique). Les cas riemanniens et lorentziens sont particulièrement importants en physique mais nous n'avons pas besoin de nous restreindre à ce cadre pour l'essentiel de ce qui suit.

- Pour une variété riemannienne  $(M, g)$  orientée, on peut définir une *forme de volume canonique* de la façon suivante. Soit  $\{e_{\hat{\alpha}}\}$  un repère mobile orthonormal, c'est-à-dire  $g(e_{\hat{\alpha}}, e_{\hat{\beta}}) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ , avec  $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \pm \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ , le signe  $\pm$  dépendant de la signature de la métrique. Pour l'instant nous pouvons supposer que l'espace est proprement riemannien, et orienté, mais à la fin de cette section, nous verrons comment compléter les propriétés qui suivent lorsque la signature de la métrique est quelconque, et plus particulièrement lorsqu'elle est hyperbolique. Désignant par  $\{e^{\hat{\alpha}}\}$  le co-repère dual du repère mobile choisi,

l'élément de volume riemannien est

$$\epsilon = e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge \dots \wedge e^{\hat{n}}$$

Soit  $\{\sigma_\alpha\}$  un autre repère, non nécessairement orthonormal, et  $\Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}}$  la matrice de passage, c'est-à-dire  $\sigma_\alpha = \Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}$ . Alors  $g_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}} \Lambda_\beta^{\hat{\beta}} g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ , ce qui implique

$$\det(g_{\alpha\beta}) = \left[ \det(\Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}}) \right]^2 \det(g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}) \text{ et donc } \det(\Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}}) = \left| \frac{\det g_{\alpha\beta}}{\det g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}} \right|^{1/2}$$

mais  $|\det(g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}})| = 1$  puisqu'on a supposé la base  $\{e_{\hat{\alpha}}\}$  orthonormale et donc

$$\det(\Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}}) = |\det(g_{\alpha\beta})|^{1/2} = \left[ \det((\Lambda^{-1})_\alpha^\alpha) \right]^{-1}$$

Or

$$\begin{aligned} \epsilon &= e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge \dots \wedge e^{\hat{n}} = \Lambda_{\alpha_1}^{\hat{1}} \Lambda_{\alpha_2}^{\hat{2}} \dots \Lambda_{\alpha_n}^{\hat{n}} \sigma^{\alpha_1} \wedge \sigma^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \sigma^{\alpha_n} \\ \epsilon &= \det(\Lambda_\alpha^{\hat{\alpha}}) \cdot \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \dots \wedge \sigma^n \\ \epsilon &= \sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|} \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \dots \wedge \sigma^n = \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \sigma^{\alpha_1} \wedge \sigma^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \sigma^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Ainsi<sup>2</sup>

$$\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|} \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{12\dots n}$$

où le symbole  $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{12\dots n}$  désigne  $\pm$  suivant que  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  est une permutation paire ou impaire de  $1, 2, 3, \dots, n$  et il est égal à zéro dans les autres cas.

En particulier, si  $\{\sigma_\alpha\}$  désigne un repère naturel  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\}$ , on a  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  et

$$\epsilon = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Notons également que, dans un repère orthonormé, la racine carrée précédente vaut 1 et donc  $\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{12\dots n}$  En particulier  $\epsilon_{12\dots n} = 1$ .

• La métrique  $g$  permet également d'établir un isomorphisme canonique entre l'espace tangent  $TM$  et l'espace cotangent  $T^*M$ . Cette propriété est évidente puisqu'en chaque point, l'existence d'un produit scalaire permet d'identifier les espaces vectoriels  $T_P M$  avec  $T_P^* M$ . En d'autres termes, on peut

2. L'espace des  $n$ -formes étant de dimension 1, deux  $n$ -formes quelconques sont obligatoirement proportionnelles. Dans les équations qui précèdent, le passage de la première à la seconde ligne peut donc être considéré comme une définition du déterminant de la matrice  $\Lambda$ .

“monter” et “descendre” les indices à l’aide de la métrique : au vecteur  $v = v^\mu e_\mu$  on associe la 1-forme  ${}^b v = v_\mu e^\mu$  définie par  $\boxed{v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu}$  ( $\{e^\mu\}$  désignant la base duale de  $\{e_\mu\}$ ). Inversement, à la 1-forme  $\sigma = \sigma_\mu e^\mu$  on associe le vecteur  $\sharp\sigma = \sigma^\mu e_\mu$  avec  $\boxed{\sigma^\mu = g^{\mu\nu} \sigma_\nu}$ . On peut écrire  $\langle {}^b v_1, v_2 \rangle = g(v_1, v_2)$  et  $\langle \sigma, \sharp\sigma_2 \rangle = (\sigma_1, \sigma_2)$ . Les isomorphismes  $\flat$  et  $\sharp$  sont appelés *isomorphismes musicaux* (pour des raisons évidentes !). Cela dit, les physiciens choisissent en général une métrique une fois pour toutes et décident donc de passer sous silence ces isomorphismes musicaux. En d’autres termes, ils identifient  $v$  et  ${}^b v$  ainsi que  $\sigma$  et  $\sharp\sigma$  et écrivent tout simplement  $v = v^\mu e_\mu = v_\mu e^\mu$  ou  $\sigma = \sigma_\mu e^\mu = \sigma^\mu e_\mu$ . Pour des raisons analogues ils écrivent  $g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu = g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$  (mais il faut bien entendu se rappeler que  $(g_{\mu\nu})$  est la matrice inverse de  $(g^{\mu\nu})$ ). Les isomorphismes musicaux permettent, de la même façon, d’identifier les tenseurs covariants et contravariants de même rang. Attention, lorsqu’on n’utilise pas de métrique pour monter ou baisser les indices, il n’y a pas de raison de faire attention à la position relative des indices covariants et contravariants (par exemple, on peut parler de  $T_{\nu\rho}^\mu$  sans dire s’il s’agit de  $T^\mu_{\nu\rho}$ , de  $T_{\nu\rho}{}^\mu$  ou de  $T_\nu{}^\mu{}_\rho$ ). Les trois types de composantes correspondent d’ailleurs à des objets différents puisque on travaille, suivant les cas, dans  $TM \otimes T^*M \otimes T^*M$ ,  $T^*M \otimes T^*M \otimes TM$  ou  $T^*M \otimes TM \otimes T^*M$ . Par contre, si on utilise la métrique pour procéder à des identifications, il faut faire attention aux positions relatives des indices haut et bas ! Ainsi, par exemple,  $T_{\mu\nu\rho}$  désignera  $g_{\mu\mu'} T^{\mu'}{}_{\nu\rho}$ . Tout ceci est assez trivial, mais peut être fallait-il le dire une fois ?

Lorsqu’on a choisi une métrique, on écrira donc abusivement (sans utiliser la notation  $\flat$  et  $\sharp$ ), par exemple  $T = T_{\mu\nu\rho} e^\mu \otimes e^\nu \otimes e^\rho = T_\mu{}^{\nu\rho} e^\mu \otimes e_\nu \otimes e_\rho = T^{\mu\nu\rho} e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\rho = \dots$

Les isomorphismes musicaux sont quelquefois simplement désignés par le même symbole  $g$  que la métrique elle-même, le nombre d’arguments permettant de décider si on parle des isomorphismes en question ou de la métrique. Par exemple, on peut noter  $g(e_\mu) = g_{\mu\nu} e^\nu$  et  $g(e^\mu) = g^{\mu\nu} e_\nu$ . Ceci est en accord avec les notations précédentes puisque par exemple  $g(v) = g(v^\mu e_\mu) = v^\mu g(e_\mu) = v^\mu g_{\mu\nu} e^\nu = v_\nu e^\nu$ .

Avec ces notations, nous avons alors  $g(v, w) = \langle g(v), w \rangle = \langle g(w), v \rangle = g(w, v)$ .

- L’existence d’une métrique permet non seulement de calculer le produit scalaire de deux vecteurs (ou de deux 1-formes) mais de contracter n’importe quel tenseur d’ordre  $k$  covariant, contravariant ou partiellement covariant et contravariant avec n’importe quel autre tenseur d’ordre  $k$ . On utilisera encore la notation  $\langle | \rangle$  pour écrire ces contractions de type assez général. Plutôt que de décrire les différents cas, il suffit de dire, en termes imagés,

qu'on "monte" tous les indices du premier à l'aide de la métrique, qu'on "descend" tous les indices du second et qu'on contracte complètement les objets obtenus. Par exemple, si  $S = S_{\mu\nu}{}^\rho e^\mu \otimes e^\nu \otimes e_\rho$  et  $T = T_\mu{}^{\nu\rho} e^\mu \otimes e_\nu \otimes e_\rho$  on fabrique  $S_{\mu\nu\rho'} = g_{\rho'\rho} S_{\mu\nu}{}^\rho$  et  $T^{\mu'\nu\rho} = g^{\mu'\mu} T_\mu{}^{\nu\rho}$ . On peut alors calculer  $\langle S, T \rangle = S^{\mu\nu\rho} T_{\mu\nu\rho}$ . En particulier, si  $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^k\}$  désignent une famille de 1-formes et  $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^k\}$  en désigne une autre, on peut vérifier que cette définition conduit à

$$\langle \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^k, \psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \dots \wedge \psi^k \rangle = k! \det(\langle \varphi^i, \psi^j \rangle)$$

Dans le sous-cas particulier où ces deux familles coïncident et où on suppose la famille  $\{\varphi^k\}$  orthonormée, il vient

$$\langle \varphi^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{\mu_k}, \varphi^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \varphi^{\nu_k} \rangle = k! \delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$$

• Lorsque la signature de la métrique n'est pas proprement riemannienne, c'est à dire lorsqu'elle est de type  $(p, q)$ , il faut supposer que la variété admet une orientation temporelle et qu'elle est temporellement orientée. Dans le cas usuel de l'espace-temps de la physique (signature  $(3, 1)$ ), on utilisera des indices 0, 1, 2, 3, comme c'est l'usage, plutôt que 1, 2, 3, 4 ; on posera alors

$$\epsilon = e^{\hat{0}} \wedge e^{\hat{1}} \wedge e^{\hat{2}} \wedge e^{\hat{3}}$$

La différence avec le cas proprement euclidien vient du fait qu'il faut faire attention aux signes lorsqu'on "monte" les indices. Par ailleurs,  $\det(g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}) = (-1)^q$ . Les formules précédentes restent donc valables et on aura toujours, par exemple,

$$\epsilon_{\widehat{0123}} = 1$$

mais par contre

$$\epsilon^{\widehat{0123}} = -1$$

Plus généralement, nous avons vu que  $\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|} \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{12 \dots n}$ , mais si on "monte" ces indices (à l'aide de la métrique) le résultat va dépendre de la signature, plus particulièrement du nombre  $q$  de signes "−" dans la métrique. On obtient donc

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{(-1)^q}{\sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}} \delta_{12 \dots n}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = (-1)^q \sqrt{|\det g^{\alpha\beta}|} \delta_{12 \dots n}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

Citons quelques contractions utiles :

$$q! \delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}}^{\alpha_1 \dots \alpha_p \mu_1 \dots \mu_q} = \delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}}^{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q} \delta_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\mu_1 \dots \mu_q}$$

Lorsque la variété est lorentzienne, avec une signature de type  $(3, 1)$ , on obtient en particulier

$$\delta_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$

$$\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$

$$\delta_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{3} \delta_{\mu\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{6} \delta_{\mu\beta\lambda}^{\alpha\beta\lambda} = -\frac{1}{6} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} \epsilon_{\mu\beta\lambda\rho}$$

• Pour terminer, notons que l'existence d'une métrique permet d'associer à la différentielle  $df$  d'une fonction  $f$ , un champ de vecteurs, le *gradient* de  $f$  défini par  $grad f = \sharp df$ . Ainsi, dans un repère naturel, on écrira

$$grad f = g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Encore une fois, la présente section consacrée aux variétés riemanniennes n'est destinée qu'à introduire certaines notations utiles et quelques notions élémentaires. Nous reviendrons plus en détail sur les variétés riemanniennes à la fin du chapitre consacré aux connexions.

## 1.12 Divers

Nous regroupons dans ce paragraphe un certain nombre de notions et de commentaires qui peuvent être considérés comme un peu moins élémentaires que ce qui précède ; cela ne signifie pas qu'ils sont moins "importants" mais simplement que nous utiliserons peu ou pas ces concepts dans la suite de l'ouvrage. On se contente donc ici de présenter quelques définitions de façon à suggérer au lecteur des lectures plus approfondies et à donner quelques idées intuitives.

### 1.12.1 Compléments sur les dérivations d'algèbre

L'ensemble des dérivations de l'algèbre associative  $\mathcal{A}$  se note  $Der \mathcal{A}$ . Rappelons qu'une dérivation est une application linéaire  $v$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  telle que  $v[f g] = v[f] g + f v[g]$  avec  $f, g \in \mathcal{A}$ . Il est facile de voir que la somme de deux dérivations est une dérivation, par contre le produit de deux dérivations n'est pas une dérivation (dans les cas où on peut le définir, c'est un opérateur du "second ordre"). Il est intéressant de savoir si l'opérateur  $w$  défini par  $w = h v$  avec  $h \in \mathcal{A}$  et  $v \in Der \mathcal{A}$  est, ou non, une dérivation. En d'autres termes,

on veut savoir si l'espace  $Der\mathcal{A}$  est stable lorsqu'on multiplie (à gauche) ses éléments par des éléments de  $\mathcal{A}$ . Dans l'affirmative, on dit que  $Der\mathcal{A}$  est un *module* sur  $\mathcal{A}$ . La réponse est oui, mais seulement dans le cas où  $\mathcal{A}$  est commutative. En effet, prenons  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{A}$ . Alors,  $(hv)[fg] = h(v[fg]) = h(v[f]g + fv[g]) = hv[f]g + hfv[g]$  mais  $(hv)[f]g + f(hv)[g] = hv[f]g + fhv[g]$ . Ces deux expressions ne coïncident que si  $hf = fh$ .

Conclusion : L'ensemble des dérivations d'une algèbre associative n'est pas, en général, un module sur cette algèbre, sauf si cette dernière est commutative. Il est facile de voir que  $Der\mathcal{A}$  est un module sur le centre de  $\mathcal{A}$ , centre qui peut être assez petit...

Par contre, l'ensemble des dérivations est toujours une algèbre de Lie : on peut y définir une loi de composition interne (notée  $[, ]$ ) non associative et anti-commutative ( $[u, v] = -[v, u]$ ), qui vérifie l'identité suivante (l'identité de Jacobi) :

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Rappelons que l'ensemble des champs de vecteurs sur une variété n'est autre que l'algèbre de Lie  $DerC^\infty(M)$ .

Le fait que l'ensemble des dérivations de  $\mathcal{A}$  soit un module sur  $\mathcal{A}$  lorsque  $\mathcal{A}$  est commutative admet une généralisation *supersymétrique*. Supposons que  $A$  soit une algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -graduée. Chaque élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  peut donc s'écrire comme somme d'un élément pair ( $\#a = 0$ ) et d'un élément impair ( $\#a = 1$ ). On définit les *dérivations graduées* (ou *super-dérivations*) des algèbres  $\mathbb{Z}_2$ -graduées comme les dérivations usuelles, mais en introduisant un signe. On dit qu'une super-dérivation est paire si c'est une dérivation, au sens usuel du terme. On dit qu'une super-dérivation est impaire si c'est une application linéaire de  $A$  dans  $A$  telle que  $v[fg] = v[f]g + (-1)^{\#f}fv[g]$ . On introduit donc alors une  $\mathbb{Z}_2$  graduation pour les super-dérivations et on réunit les deux types de formules de la façon suivante :

$$\boxed{v[fg] = v[f]g + (-1)^{\#v\#f}fv[g]}$$

avec  $f, g \in \mathcal{A}$ . En pratique, il suffit d'utiliser la règle dite "Règle de Milnor" disant qu'il faut introduire un signe "−" chaque fois qu'on doit commuter deux éléments impairs.

L'ensemble des super-dérivations d'une algèbre  $A$  ne constitue pas, en général, un module sur  $\mathcal{A}$ , sauf lorsque  $\mathcal{A}$  est *commutative graduée* (on dit aussi *super-commutative*), c'est à dire lorsque  $fg = (-1)^{\#f\#g}gf$ . Par contre l'ensemble des dérivations graduées constitue toujours un module sur le *super-centre* de  $\mathcal{A}$  (l'ensemble des éléments de  $\mathcal{A}$  qui commute – au signe près – avec  $\mathcal{A}$ ) et il constitue également une *super-algèbre de Lie*, c'est à

dire que les dérivations graduées super-anticommutent :

$$\boxed{[v, w] = -(-)^{\#v\#w}[w, v]}$$

et vérifient l'identité de Jacobi graduée

$$\boxed{(-)^{\#u\#w}[u, [v, w]] + (-)^{\#w\#v}[w, [u, v]] + (-)^{\#v\#u}[v, [w, u]] = 0}$$

### 1.12.2 Cohomologie de De Rham

Nous avons vu que l'opérateur  $d$  satisfait  $d^2 = 0$  et envoie  $\Omega^k M$  dans  $\Omega^{k+1} M$ . Soit  $Z^k$  le noyau de  $d$ , c'est-à-dire  $Z^k = \{\omega \in \Omega^k M \text{ tq } d\omega = 0\}$ . Les éléments de  $Z^k$  sont appelés *cocycles de De Rham* de degré  $k$  (ou *formes fermées*). Soit  $B^k$  l'image par  $d$  de  $\Omega^{k-1} M$  dans  $\Omega^k M$ , c'est-à-dire  $B^k = \{\omega \in \Omega^k M \text{ tq } \exists \tau \in \Omega^{k-1} \text{ avec } \omega = d\tau\}$ . Les éléments de  $B^k$  sont les *cobords de De Rham* de degré  $k$  ou *formes exactes*. Le fait que  $d^2 = 0$  implique l'inclusion  $B^k \subset Z^k$ .

Il résulte de la linéarité de  $d$  que  $Z^k$  et  $B^k$  sont stables par addition, ce sont donc des groupes abéliens ; on peut alors considérer le groupe quotient  $H^k = Z^k/B^k$  qu'on appelle groupe de cohomologie (de De Rham) de degré  $k$ . On peut calculer, pour toute variété, les groupes  $H^0, H^1, \dots, H^n$ . Ces groupes fournissent, en quelque sorte une "mesure" de la non-trivialité de la topologie de la variété  $M$ . En effet, tous ces groupes sont triviaux (se réduisent à l'élément neutre 0) dans le cas de l'espace numérique  $\mathbb{R}^n$ , ce que le lecteur sait déjà puisque, dans un autre contexte, celui de la théorie des équations différentielles sur  $\mathbb{R}^n$ , on montre de façon élémentaire que, pour résoudre une équation  $df = 0$ , il faut poser  $f = dg$  (Lemme de Poincaré).

### 1.12.3 Homologie de De Rham

La définition de l'homologie de De Rham est plus délicate que celle de la cohomologie. De façon à en donner une image intuitive, disons qu'on s'intéresse à des "morceaux" de la variété  $M$  (comptés possiblement avec multiplicité). Un tel morceau  $C$  (techniquement une *chaîne*) peut avoir un bord (le bord d'un disque est un cercle) ou pas de bord (le bord d'un cercle est nul). On peut formellement additionner les chaînes (avec des coefficients réels, dans le cas présent). On définit alors un *opérateur bord*  $\partial$ , de carré nul lui aussi ( $\partial^2 = 0$ , le bord d'un bord est nul) et on peut considérer les *cycles* (chaînes  $C$  dont le bord  $\partial C$  est nul) et les *bords* (chaînes  $C$  qui sont le bord de quelque chose  $C = \partial D$ ).

Tous les bords étant des cycles, on peut là aussi considérer les cycles  $Z_k$  de dimension  $k$  modulo les bords  $B_k$  et définir les groupes d'homologie

$H_k = Z_k/B_k$ . De façon générale, on parle de *cohomologie* lorsqu'on a un opérateur de carré nul (tel  $d$ ) dont l'action sur un espace vectoriel  $\mathbb{Z}$ -gradué fait croître le degré d'une unité et d'*homologie* lorsqu'on a un opérateur de carré nul (tel  $\partial$ ) dont l'action fait décroître le degré.

Paradoxalement, la définition de  $d$  est plus simple que celle de  $\partial$  (nous avons passé cette dernière sous silence) alors que l'action de  $\partial$  est plus intuitive, plus "visuelle" que celle de  $d$ . Le lien entre les deux est fourni par le *théorème de Stokes* : de façon générale on peut intégrer les  $k$ -formes sur les  $k$ -chaînes et on a la propriété

$$\boxed{\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega}$$

qui généralise la relation bien connue des physiciens de première année de nos universités  $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \text{div} \vec{E} d\tau$  où la surface  $\Sigma$  est le bord du volume  $V$  et où l'intégrale représente le "flux sortant" du champ électrique  $\vec{E}$ .

La dualité entre homologie et cohomologie s'écrit très simplement dans le cas des variétés compactes; dans ce cas, on démontre que  $H^k$  est isomorphe à  $H_{n-k}$  où  $n$  est la dimension de la variété. Le support visuel intuitif suffit, en dimension 2, pour calculer l'homologie (et donc la cohomologie) de quelques variétés très simples. C'est ainsi que, pour la sphère  $S^2$  on a  $H_0(S^2) = H_2(S^2) = \mathbb{R}$  et  $H_1(S^2) = 0$  (tout cercle tracé sur la sphère est le bord de quelque chose), alors que pour le tore  $T^2$ , on a  $H_0(T^2) = H_2(T^2) = \mathbb{R}$  mais  $H_1(T^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  : les deux générateurs de  $H_1(T^2)$  correspondent respectivement aux deux types de cercles qu'on peut tracer sur un tore et qui ne "bordent" rien, c'est-à-dire "ceux qui font un tour". On appelle *nombres de Betti* de la variété  $M$ , la dimension  $b_p$  de  $H_p(M)$  considéré comme espace vectoriel.

#### 1.12.4 Espace des $p$ -vecteurs

Nous avons choisi de développer la notion de produit extérieur en partant du fibré cotangent, c'est-à-dire que nous avons considéré des produits tensoriels complètement antisymétriques de vecteurs covariants. Ceci nous a amené au concept de forme différentielle. Nous aurions pu faire de même en partant des vecteurs contravariants. Le formalisme est très semblable et les objets contravariants  $\Omega_p(M)$  correspondant aux formes différentielles  $\Omega^p(M)$  sont simplement baptisés " $p$ -vecteurs". On peut alors bien entendu évaluer une  $p$ -forme sur un  $p$ -vecteur, le résultat étant une fonction sur  $M$ .

### 1.12.5 Espace des courants de De Rham

Le lecteur est sans doute déjà familier avec la notion de distribution. Pour les fonctions numériques sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  les distributions sont définies comme dual des fonctions infiniment différentiables. Cet espace contient d'une part des éléments "réguliers" mais aussi toutes les mesures (en particulier la mesure de Dirac) et même des objets encore plus singuliers (les dérivées de la distribution de Dirac par exemple). On peut généraliser la théorie des distributions aux formes différentielles de degré quelconque sur une variété; on définit ce qu'on appelle l'espace des *courants de De Rham* comme dual (sur  $\mathbb{R}$ ) des formes différentielles. L'évaluation d'un courant  $C$  sur une forme  $\omega$  est donc un nombre  $\langle C, \omega \rangle$ . Si la variété  $M$  est compacte et si  $\omega$  est une  $k$ -forme, un élément "régulier" peut être représenté par une  $n - k$  forme  $\sigma$  puisque l'évaluation de l'intégrale  $\int_M \sigma \wedge \omega$  est bien une fonctionnelle linéaire. L'intégration d'une forme sur une chaîne (théorie de l'homologie), l'évaluation d'un  $p$ -vecteur sur une  $p$ -forme suivie de l'intégration sur  $M$  de la fonction obtenue, fournissent aussi des exemples de courants de De Rham. La théorie de l'homologie de De Rham (opérateur  $\partial$ ) se généralise d'ailleurs au cadre des courants et le théorème de Stokes s'écrit dans ce cas  $\langle \partial C, \omega \rangle = \langle C, d\omega \rangle$ .

### 1.12.6 Les algèbres de Frölicher – Nijenhuis et de Nijenhuis–Richardson

Nous savons que l'algèbre de De Rham  $\Omega(M)$ , munie du produit extérieur, est une algèbre commutative graduée.

Nous savons aussi que l'ensemble des dérivations graduées d'une algèbre commutative graduée constitue une super-algèbre de Lie pour laquelle le crochet de Lie est donnée par le commutateur (gradué) que nous noterons simplement  $[\cdot, \cdot]$ .

En conséquence  $Der(\Omega(M))$  est une algèbre de Lie graduée. Reste à identifier explicitement les éléments de cette algèbre.

Tout d'abord, puisque  $\Omega(M)$  est  $\mathbb{Z}$ -graduée, on dira qu'une dérivation est de degré  $p$  (qui peut être positif, négatif ou nul) si elle fait passer de  $\Omega^k(M)$  à  $\Omega^{k+p}(M)$ . On notera  $Der_p(\Omega(M))$  l'espace des dérivations de degré  $p$ . La dérivée extérieure est elle-même un élément de  $Der_1(\Omega(M))$ .

Soit  $\Omega(M, TM)$  l'espace des formes différentielles sur  $M$  à valeurs dans le fibré tangent, c'est à dire  $\Omega^k(M, TM) = \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes TM)$ . Une  $k$ -forme  $K$  à valeurs vectorielles s'écrira, dans un repère naturel,

$$K = K_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^\nu dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Un résultat dû à Richardson et Nijenhuis montre que l'algèbre de Lie graduée des dérivations (graduées) de l'algèbre de De Rham  $\Omega(M)$  peut s'identifier à deux copies de  $\Omega(M, TM)$  munies de deux crochets différents, connus respectivement sous le nom de *crochet de Nijenhuis-Richardson* et *crochet de Frölicher-Nijenhuis*. Plus précisément, pour toute dérivation  $D$ , de degré  $k$  de l'algèbre  $\Omega(M)$  on peut trouver un unique  $K \in \Omega^k(M, TM)$  et un unique  $L \in \Omega^{k+1}(M, TM)$  tels que

$$\boxed{D = \mathcal{L}_K + i_L}$$

où  $\mathcal{L}_K$  et  $i_L$  définissent des dérivations que nous allons caractériser un peu plus loin. Nous ne démontrerons pas le théorème de Richardson et Nijenhuis mais définirons seulement les dérivations dont il vient d'être question (voir [7]).

Il se trouve que les éléments de  $\Omega(M, TM)$  peuvent en effet agir par dérivation sur  $\Omega(M)$ , et ce, de deux façons distinctes.

La première consiste en une généralisation du produit intérieur. Au lieu de considérer le produit intérieur d'une forme par un vecteur, on remplace le vecteur par une  $k$ -forme à valeurs vectorielles. En effet, soit  $K \in \Omega^k(M, TM)$ ,  $L \in \Omega^l(M, TM)$  et  $\omega$  une forme différentielle de degré  $q$  sur  $M$ . On va définir  $i_K \omega$ , qui sera une forme différentielle de degré  $k + (q - 1)$  (la partie "champ de vecteurs" présente dans  $K$  fait passer de  $q$  à  $q - 1$  mais les  $k$  indices de forme demeurent). Soient  $X_i$   $i \in \{1, 2, \dots, k + (q - 1)\}$  des champs de vecteurs. On pose

$$i_K \omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+q-1}) = \frac{1}{k!(q-1)!} \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \omega(K(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}), X_{\sigma(k+1)}, \dots)$$

Notons que, agissant sur une fonction (un élément de  $\Omega^0(M)$ ),  $i_K$  donne zéro. On peut vérifier que  $i_K$  définit bien une dérivation. Celle-ci est d'ailleurs de degré  $k - 1$ ; ainsi  $i_K \in \text{Der}_{k-1} \Omega(M)$ . On peut démontrer que toute dérivation de l'algèbre de De Rham dont la restriction aux fonctions est nulle est de cette forme. Le commutateur gradué (dans  $\text{Der}(\Omega(M))$ ) de deux dérivations de ce type est une dérivation du même type. Plus précisément,

$$\boxed{[i_K, i_L] = i_{[K, L]_{NR}}}$$

où la forme à valeur vectorielle  $[K, L]_{NR}$  est égale à

$$[K, L]_{NR} = i_K L - (-1)^{(k-1)(l-1)} i_L K$$

et où on généralise l'action de  $i_K$  sur  $\Omega(M)$  à une action sur  $\Omega(M, TM)$  en posant  $i_K(\alpha \otimes X) = i_K(\alpha) \otimes X$ , avec  $\alpha \in \Omega(M)$  et  $X$  un champ de vecteurs. Le crochet  $[\cdot, \cdot]$  porte le nom de *crochet de Nijenhuis-Richardson*.

La deuxième façon d'agir consiste en une généralisation de la dérivée de Lie. Soit encore  $K \in \Omega^k(M, TM)$ . On définit  $\mathcal{L}_K$  par

$$\mathcal{L}_K = [i_K, d] = i_K d - (-1)^{k-1} d i_K$$

On peut vérifier que cet opérateur fournit bien une dérivation de l'algèbre  $\Omega(M)$ . Cette dérivation est de degré  $k$  :  $\mathcal{L}_K \in Der_k(\Omega(M))$  (dans le cas particulier  $k = 0$  on retrouve un résultat connu). On peut démontrer que

$$\boxed{[\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_L] = \mathcal{L}_{[K, L]_{FN}}}$$

pour une forme à valeurs vectorielles bien déterminée notée  $[K, L]_{FN}$  qu'on appelle *crochet de Frölicher-Nijenhuis*. Pour des éléments décomposés, on a la formule de Michor

$$\begin{aligned} [\alpha \otimes X, \beta \otimes Y]_{FN} &= \alpha \wedge \beta \otimes [X, Y] + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta \otimes Y \\ &\quad - \mathcal{L}_Y \alpha \wedge \beta \otimes X + (-1)^{\# \alpha} (d\alpha \wedge i_X \beta \otimes Y + i_Y \alpha \wedge d\beta \otimes X) \end{aligned}$$

Avant de conclure ce paragraphe, il est utile de définir la notion suivante. Soit  $J \in \Omega^1(M, TM)$ , alors le carré gradué de  $J$ , pour le crochet de Frölicher-Nijenhuis, est un élément  $[J, J]_{FN}$  de  $\Omega^2(M, TM)$  appelé *torsion de Nijenhuis* du vecteur-1-forme  $J$ . Pour justifier l'intérêt porté à cette notion, citons seulement le résultat suivant (nous n'étudierons pas les variétés complexes dans cet ouvrage) : lorsque  $J$ , qui peut s'interpréter géométriquement comme un champ d'endomorphismes du fibré tangent, est une structure presque complexe ( $J^2 = -1$ ), l'annulation de sa torsion de Nijenhuis fournit une condition nécessaire et suffisante pour l'intégrabilité de cette structure (c'est à dire que, dans ce cas, la structure presque-complexe est en fait, complexe).

# Chapitre 2

## Groupes de Lie et espaces homogènes

### 2.1 Généralités sur les groupes de Lie

#### 2.1.1 Généralités et définitions élémentaires

Les groupes de Lie et les espaces homogènes fournissent une multitude d'exemples particulièrement simples de variétés différentiables et c'est une des raisons pour lesquelles nous leur consacrons une section de cet ouvrage. Une autre raison importante est que les groupes de Lie vont être utilisés comme "outils" dans les chapitres suivants.

Chacun est censé être déjà familier avec la notion de structure de groupe. L'introduction aux groupes et leur utilisation dans toutes les branches de la physique est un thème présenté et étudié, suivant les années et les réformes de l'enseignement secondaire, entre la classe de quatrième et les années de Licence... Rappelons donc qu'un groupe est un ensemble (fini ou infini) muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre, et tel que tout élément possède un symétrique pour la loi en question. Du point de vue du calcul, notons que, dans un groupe, il est toujours possible de résoudre une équation du premier degré (du type  $ax = b$ , la solution étant  $x = a^{-1}b$ ). Les exemples les plus simples habituellement présentés aux élèves de nos lycées sont les suivants : Le groupe  $(\mathbb{Z}, +)$  des entiers relatifs, les groupes (additif et multiplicatif) de nombres rationnels  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$  ainsi que leurs généralisations réelles et complexes, les groupes de congruence  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , les groupes de symétrie des solides platoniques, les groupes de transformations linéaires, affines ou projectives et les groupes de substitutions. Les groupes ne sont pas nécessairement commutatifs, comme les derniers exemples le montrent clairement. Les groupes peuvent être finis (comme

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ), infinis mais discrets (comme  $\mathbb{Z}$ ) ou infinis et “continus” (comme  $\mathbb{R}$  ou comme le groupe  $U(1)$  des rotations autour d’un axe). Regardons ce dernier exemple d’un peu plus près. Toute rotation autour d’un axe est parfaitement caractérisée par un angle  $\theta$  compris entre 0 et  $2\pi$ ; de surcroît, les rotations d’angle 0 et  $2\pi$  sont identiques. En d’autres termes, on peut considérer les rotations en question comme les différents points d’un cercle  $S^1$  de rayon quelconque, l’élément neutre (c’est à dire la rotation d’angle nul) étant un point marqué de ce cercle  $S^1$ . Ceci nous fournit un image “visuelle” de ce groupe  $U(1)$ , image qui peut nous faire oublier momentanément la structure algébrique proprement dite de cet ensemble (un groupe) mais qui attire notre attention sur sa structure topologique ou même différentiable (un cercle). La notion de groupe de Lie généralise ce dernier exemple en juxtaposant de façon axiomatique la structure de groupe et celles de variété.

Par définition, un groupe de Lie  $G$  est donc une variété différentiable munie d’une structure de groupe, de façon à ce que les deux structures soient compatibles, c’est à dire de façon à ce que la multiplication<sup>1</sup> et le passage à l’inverse soient des applications différentiables. Notons que la multiplication est une application de  $G \times G$  dans  $G$  alors que le passage à l’inverse est une application de  $G$  dans  $G$ . Le lecteur pourra visuellement se représenter un groupe de Lie comme un “patatoïde” avec multiplication (entre points) et origine marquée (voir 2.1).

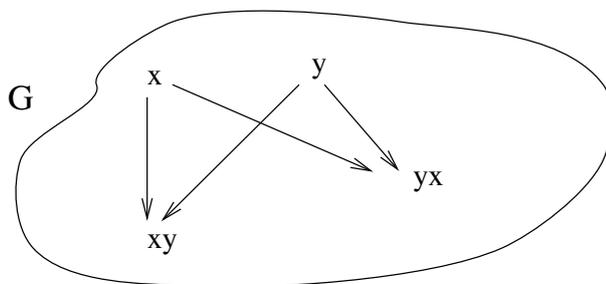


FIGURE 2.1 – Un groupe de Lie

La dimension d’un groupe de Lie est, par définition, sa dimension en tant que variété (nous verrons de nombreux exemples un peu plus loin); notons dès à présent que le groupe  $U(1)$  présenté plus haut est de dimension 1.

---

1. La loi de composition interne sera en effet, le plus souvent, notée multiplicativement.

### 2.1.2 Exemples élémentaires de groupes classiques

On désigne par  $M(n, \mathbb{C})$  l'algèbre (de dimension complexe  $n^2$ ) des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes et par  $a^\dagger$  l'adjointe d'une matrice  $a$  de  $M(n, \mathbb{C})$  (si  $a = (a_{ij})$ , alors  $a^\dagger = (\overline{a_{ji}}$ ). L'ensemble précédent n'est certes pas un groupe pour la loi de multiplication des matrices puisqu'il contient de nombreux éléments non inversibles (toutes les matrices de déterminant nul) mais il contient plusieurs sous-ensembles intéressants qui, eux, sont bien des groupes multiplicatifs, comme on pourra le vérifier aisément.

- $GL(n, \mathbb{C}) = \{a \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det a \neq 0\}$ , le groupe linéaire complexe.
- $U(n) = \{a \in GL(n, \mathbb{C}) \mid a^\dagger = a^{-1}\}$ , le groupe unitaire.
- $SU(n) = \{a \in U(n, \mathbb{C}) \mid \det a = 1\}$ , le groupe unitaire unimodulaire, aussi appelé groupe spécial unimodulaire.

Notons que les éléments de  $U(n)$  ont automatiquement un déterminant (un nombre complexe) de module 1, puisque  $\det a^\dagger = \overline{\det a} = 1/\det a$ , mais pas nécessairement égal à 1.

Les groupes précédents sont définis comme groupes de matrices ; les entrées de ces matrices (les “éléments de matrice”) sont des nombres qui peuvent être réels mais sont généralement complexes. Si on impose à ces éléments de matrice d'être réels, on obtient de nouveaux groupes. Soit  $M(n, \mathbb{R})$  l'algèbre (de dimension réelle  $n^2$ ) des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. Cet ensemble, comme  $M(n, \mathbb{C})$  est une algèbre associative mais n'est pas un groupe multiplicatif. On définit

- $GL(n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap M(n, \mathbb{R})$ , le groupe linéaire réel.
- $O(n, \mathbb{R}) = U(n, \mathbb{C}) \cap M(n, \mathbb{R})$ , le groupe orthogonal, encore appelé groupe des rotations.
- $SO(n, \mathbb{R}) = SU(n) \cap M(n, \mathbb{R})$ , le groupe spécial orthogonal.

Les éléments du groupe unitaire ayant un déterminant de module 1, ceux de  $O(n, \mathbb{R})$  auront un déterminant égal à  $-1$  ou à  $1$  ; ceux pour lesquels il est précisément égal à  $1$  constituent le groupe  $SO(n, \mathbb{R})$ . On désigne par  $\tilde{a}$  la transposée d'une matrice  $a$  de  $M(n, \mathbb{R})$ .

## 2.2 Généralités sur les algèbres de Lie

### 2.2.1 Application exponentielle et algèbres de Lie

#### Définition

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur un corps commutatif  $\mathfrak{K}$  est un ensemble qui est, d'une part un espace vectoriel sur  $\mathfrak{K}$  (sa loi de groupe abélien est notée  $+$

et sa loi externe sur  $\mathfrak{K}$  est notée multiplicativement), de dimension finie ou non, et qui, d'autre part, est muni d'une loi de composition interne –non associative– généralement notée  $[, ]$  vérifiant les propriétés suivantes

$$\text{Anticommutativité } \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad [X, Y] = -[Y, X]$$

$$\text{Identité de Jacobi } \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

On suppose également vérifiée la linéarité par rapport aux scalaires, c'est à dire  $[\alpha X, Y] = [X, \alpha Y] = \alpha[X, Y]$  si  $\alpha \in \mathfrak{K}$ . La loi  $[, ]$  est généralement désignée sous le nom de "crochet de Lie". Dans toute la suite, le corps  $\mathfrak{K}$  coïncidera avec le corps  $\mathfrak{C}$  des nombres complexes.

### Exemple fondamental

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre associative; on peut lui associer canoniquement une algèbre de Lie en définissant le crochet de Lie de la façon suivante (auquel cas le crochet de Lie peut également être désigné sous le nom de commutateur) :

$$X, Y \in \mathcal{A} \rightarrow [X, Y] = XY - YX$$

Le crochet obtenu est généralement non nul, sauf évidemment si  $X$  et  $Y$  commutent. Par ailleurs on vérifie aisément que les propriétés d'anticommutativité du crochet ainsi que l'identité de Jacobi sont automatiquement satisfaites. Les ensembles de matrices  $M(n, \mathfrak{C})$  et  $M(n, \mathfrak{R})$  sont donc automatiquement des algèbres de Lie.

### Constantes de structure d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

Supposons que  $\mathfrak{g}$ , en tant qu'espace vectoriel sur le corps des complexes  $\mathfrak{C}$  soit de dimension finie  $n$  et soit  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \{1..n\}}$  une base de  $\mathfrak{g}$ . Le crochet de Lie  $[X_\alpha, X_\beta]$  de deux vecteurs de base est *a priori* un élément de  $\mathfrak{g}$  et peut donc se développer sur la base choisie :

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$$

Les  $n^3$  nombres  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  sont les constantes de structure de  $\mathfrak{g}$  par rapport à la base choisie.

### Application exponentielle dans $M(n, \mathfrak{C})$

On désigne par  $\exp : \alpha \rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p / p!$  l'application exponentielle définie sur  $M(n, \mathfrak{C})$ . Posons  $g = e^A$ . Il est facile de voir que

$$\det g = e^{\text{Tr } A}$$

Cette relation est évidente si  $A$  est diagonalisable (puisque  $e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_p} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}$ ). Si ce n'est pas le cas, on utilise pour démontrer cette propriété générale le fait que l'ensemble des matrices diagonalisables sur  $\mathfrak{C}$  est dense. Cette relation est à la base d'une quantité de résultats dont voici le premier : si  $A \in M(n, \mathfrak{C})$ , alors  $g = e^A \in GL(n, \mathfrak{C})$ ; en effet,  $\det g$  n'est jamais nul puisque la fonction  $z \rightarrow e^z$  ne s'annule pas.

$\Delta$  *ATTENTION* : On n'a pas dit que tout élément de  $GL(n, \mathfrak{C})$  pouvait être atteint par la fonction  $\exp$  (c'est faux!).

### Cas des groupes de matrices : Correspondance entre groupes et algèbres de Lie

Soit  $G$  un groupe de Lie défini comme sous-ensemble de  $M(n, \mathfrak{C})$ . On définit son algèbre de Lie notée  $\mathfrak{g}$  ou  $Lie G$  comme suit,

$$Lie G = \{A \in M_n(\mathfrak{C}) \mid \forall t \in \mathfrak{R}, e^{tA} \in G\}$$

De façon un peu imagée, on peut dire que l'algèbre de Lie d'un groupe  $G$ , c'est... son logarithme! De fait, l'utilisation de l'algèbre de Lie de  $G$  permet de linéariser les propriétés des groupes, c'est à dire de transformer les multiplications en additions etc .

La définition ci-dessus de l'algèbre de Lie d'un groupe  $G$  semble un peu restrictive en ce sens qu'elle semble ne pouvoir s'appliquer qu'aux groupes de matrices, mais il existe une définition plus abstraite de la notion d'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, définition ne faisant pas l'hypothèse d'une réalisation matricielle; nous y reviendrons plus loin.

Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $G$  et supposons qu'on puisse écrire  $g = e^{tA}$  et  $h = e^{tB}$  avec  $A, B \in \mathfrak{g}$ . Tout d'abord, notons que  $g^{-1} = e^{-tA}$ . On peut alors considérer le commutateur de  $g$  et  $h$  au sens de la théorie des groupes, c'est à dire l'élément  $c = ghg^{-1}h^{-1}$  de  $G$ . Au second ordre en  $t$ , il vient

$$\begin{aligned} c &= e^{tA} e^{tB} e^{-tA} e^{-tB} \\ &= (1 + tA + t^2 A^2 / 2! + \dots)(1 + tB + t^2 B^2 / 2! + \dots) \\ &\quad (1 - tA + t^2 A^2 / 2! + \dots)(1 - tB + t^2 B^2 / 2! + \dots) \\ &= 1 + 0t + t^2 [A, B] + O(t^3) \end{aligned}$$

Il ne faudrait pas trop hâtivement en déduire que le commutateur dans  $G$  est égal à l'exponentielle du commutateur dans  $Lie G$ , mais c'est "presque" vrai, comme on vient de le voir ( $c \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 + t^2 [A, B]$ ). De plus, on peut démontrer que

$$e^{t^2 [A, B]} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{tA/n} e^{tB/n} e^{-tA/n} e^{-tB/n})^{n^2}$$

C'est à l'aide de ces relations qu'on peut s'assurer que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est bien... une algèbre de Lie (l'ensemble est bien stable par le commutateur).

Soit  $g \in G$  et supposons qu'on puisse écrire  $g = e^A$ ; alors, en utilisant la structure d'espace vectoriel de  $Lie G$ , on voit qu'on peut décomposer  $A$  sur une base  $\{X_\alpha\}$ ; ainsi,  $A = \sum a^\alpha X_\alpha$ . Les  $n$  nombres  $a^\alpha$  permettent donc de définir sur  $G$  un système de coordonnées (une carte). Ceci montre également que la dimension de  $G$ , en tant que variété, est égale à celle de  $Lie G$ , considéré comme espace vectoriel.

### 2.2.2 Correspondance entre groupes et algèbres de Lie Algèbres de Lie des groupes classiques

Notons d'abord que, pour les groupes unitaires,

$$e^A \in U(n) \iff e^A e^{A^\dagger} = 1 \iff A + A^\dagger = 0$$

ainsi la matrice  $A$  est anti-hermitienne.

Nous avons déjà rencontré la relation  $\det e^A = e^{Tr A}$ ; il s'ensuit que, si le déterminant de  $g = e^A$  est égal à 1, la trace de  $A$  est nulle. Ainsi,

$$e^A \in SU(n) \iff [A + A^\dagger = 0 \text{ et } Tr A = 0]$$

Dans le cas des groupes orthogonaux, la définition implique immédiatement

$$e^A \in O(n) \iff [e^A e^{A^t} = 1 \text{ et } A \text{ réel}] \iff [A + A^t = 0 \text{ et } A \text{ réel}]$$

Les matrices  $A$  de l'algèbre correspondante sont donc antisymétriques réelles, ce qui, en particulier, implique la nullité des éléments de matrice diagonaux et donc de la trace; mais le seul fait que  $tr A = 0$  implique  $\det e^A = 1$  et donc  $e^A \in SO(n)$ . Y aurait-il une contradiction? Comment donc obtenir une matrice orthogonale de déterminant différent de 1? Il est pourtant bien évident que la définition de  $O(n)$  est différente de celle de  $SO(n)$ ! La seule conclusion possible est la suivante: les éléments de  $O(n)$  qui ne sont pas dans  $SO(n)$  ne sont pas atteints par la fonction  $\exp$  (voir la remarque à la fin du présent paragraphe).

Pour calculer la dimension des groupes de Lie, le plus simple est en général de calculer la dimension des algèbres de Lie correspondantes. Voici un exemple que lecteur pourra généraliser sans peine: "Fabriquons" une matrice carrée antihermitienne. Une matrice  $n \times n$  dépend, *a priori*, de  $n^2$  paramètres complexes; nous enlevons d'abord la diagonale (donc il reste  $n^2 - n$  paramètres), puis nous fabriquons une matrice triangulaire inférieure

stricte (donc  $(n^2 - n)/2$  paramètres); la partie triangulaire supérieure est alors complètement déterminée par la condition d'anti-hermiticité; finalement, cette même condition implique que les éléments diagonaux sont imaginaires purs : il nous faut donc rajouter  $n$  paramètres réels. Au total, on a donc  $2(n^2 - n)/2 + n = n^2$  paramètres réels. Ainsi donc  $\dim_{\mathfrak{R}} U(n) = \dim_{\mathfrak{R}} \text{Lie } U(n) = n^2$ .

Le lecteur pourra sans doute ainsi retrouver sans difficulté la dimension des algèbres de Lie suivantes. Remarque : La notation  $Sp(n)$  utilisée ci-dessous désigne le groupe unitaire-quaternionique (voir "remarques diverses" en fin de section 2 concernant les groupes symplectiques); les matrices de l'algèbre de Lie correspondante sont du type  $\begin{pmatrix} A & B \\ -B^\dagger & -\tilde{A} \end{pmatrix}$  avec  $A^\dagger = -A$  et  $\tilde{B} = B$ .

$G$	$\text{Lie } G$	$\dim_{\mathfrak{R}} G$
$GL(n, \mathfrak{C})$	$M(n, \mathfrak{C})$	$2n^2$
$GL(n, \mathfrak{R})$	$M(n, \mathfrak{R})$	$n^2$
$U(n)$	Matrices anti-hermitiennes	$n^2$
$SU(n)$	Matrices anti-hermitiennes de trace nulle	$n^2 - 1$
$SO(n)$	Matrices antisymétriques réelles	$\frac{n(n-1)}{2}$
$Sp(n)$	Voir ci-dessus	$\frac{2n(2n+1)}{2}$

### Remarques

- Si nous ne précisons pas davantage, c'est que les algèbres de Lie que nous considérons sont des algèbres de Lie *réelles*. Il y a là une petite subtilité que nous allons illustrer en considérant le cas de  $\mathfrak{u}(n) = \text{Lie } U(n)$ . Il s'agit d'un espace vectoriel sur  $\mathfrak{R}$  de dimension  $d = n^2$ , ce qui signifie qu'une base de cet espace vectoriel réel possède  $d = n^2$  éléments (appelons les  $\{X_\alpha\}_{\alpha=1\dots d}$ ) et qu'un élément quelconque  $A$  de  $\mathfrak{u}(n)$  peut s'écrire  $A = \sum_{\alpha=1}^d a^\alpha X_\alpha$ , avec des composantes  $a^\alpha$  qui sont des nombres réels. Par contre, les éléments  $\{X_\alpha\}$  sont, dans le cas présent des matrices antihermitiennes dont les éléments de matrice sont généralement complexes (comme ceux de  $A$ , d'ailleurs). Pour compliquer légèrement les choses, les éléments  $\{X_\alpha\}$  qu'on appelle traditionnellement *générateurs* de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  ou encore *générateurs infinitésimaux*, sont souvent écrits sous la forme  $X_\alpha = iY_\alpha$

(dans le cas de  $\mathfrak{u}(n)$  les  $Y_\alpha$  sont donc hermitiens) et le développement de  $A$  sur la base  $X_\alpha$  se re-écrit  $A = \sum_{\alpha=1}^d a^\alpha i Y_\alpha$ , de sorte que si on pose  $A = iB$  on obtient simplement  $B = \sum_{\alpha=1}^d a^\alpha Y_\alpha$ ; dans ce cas, il y a des facteurs  $i$  au second membre des relations de commutation des  $Y_\alpha$  entre eux. Pour couronner le tout les  $Y_\alpha$  sont eux-aussi quelquefois désignés sous le nom de “générateurs infinitésimaux”, bien qu’ils n’appartiennent même plus à l’algèbre de Lie si cette dernière est réelle!

- L’application  $\exp$  est continue. L’image continue d’un espace connexe est un espace connexe. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel et donc un espace connexe. L’ensemble  $\exp \mathfrak{g} = \{e^X \mid X \in \mathfrak{g}\}$  est donc connexe. Conclusion : si un groupe de Lie  $G$  n’est pas connexe, les éléments qui n’appartiennent pas à la composante connexe de l’identité ne peuvent pas être atteints par la fonction  $\exp$  (ils ne peuvent pas s’écrire sous la forme  $e^X$ ). Ceci montre que, dans bien des cas, l’application  $\exp$  n’est pas surjective. Le calcul effectué plus haut et concernant le groupe orthogonal  $O(n)$  reflète le fait que ce dernier n’est pas connexe. Par contre les groupes  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $SO(n)$  et  $Sp(n)$  sont connexes.

Même si  $G$  est connexe, l’application  $\exp$  n’est pas nécessairement surjective. Par contre, on démontre que si  $G$  est compact et connexe, cette application est surjective (c’est le cas de  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $SO(n)$  et  $Sp(n)$ ). Si  $G$  est connexe mais non compact, on démontre que  $\exp$  est “presque” surjective, en ce sens que

$$\forall g \in G, \exists A_1, A_2 \dots A_p \in \mathfrak{g} \quad p \text{ fini, tel que } g = e^{A_1} e^{A_2} \dots e^{A_p}$$

- Par définition, le *rang* d’un groupe de Lie compact est égal à la dimension d’un sous groupe abélien maximal contenu dans  $G$  (on dit alors souvent “tore maximal” au lieu de “sous groupe abélien maximal”).

Cette définition sera suffisante pour nous, mais voici néanmoins une définition valable dans un contexte plus général : le rang d’un groupe de Lie est défini comme étant celui de l’algèbre de Lie correspondante, lui-même défini comme la dimension de l’une quelconque de ses sous-algèbres de Cartan (si le corps de base est celui des complexes et que l’algèbre de Lie est de dimension finie, toutes ses sous-algèbres de Cartan sont isomorphes); dans ce cadre général une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre de Lie nilpotente qui coïncide avec son propre normalisateur. Dans le cas semi-simple une sous-algèbre de Cartan est simplement une sous-algèbre de Lie abélienne maximale.

**Isomorphisme local : comparaison entre  $SU(2)$  et  $SO(3)$** 

Nous avons déjà vu (dans le cas du groupe orthogonal  $O(n)$ ) que les éléments d'un groupe n'appartenant pas à la composante connexe de l'identité ne pouvaient pas être atteints par la fonction exponentielle. Pour cette raison, nous supposons que tous les groupes de Lie considérés dans la présente sous-section sont connexes (cas de  $SO(n)$ ). Nous nous intéressons en effet ici à des phénomènes plus fins que la connexité.

— Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les trois *matrices de Pauli*.  $Lie(SU(2))$  est l'espace vectoriel engendré par  $X_1, X_2, X_3$  avec  $X_j = i\sigma_j/2$  puisque  $\{X_1, X_2, X_3\}$  constituent une base de l'algèbre des matrices antihermitiennes de trace nulle. Notons que

$$[X_i, X_j] = -\epsilon_{ijk}X_k$$

où  $\epsilon$  est complètement antisymétrique et  $\epsilon_{123} = 1$ . En développant la fonction exponentielle en série et en utilisant les propriétés  $\sigma_3^2 = 1$ ,  $\sigma_3^{2p+1} = \sigma_3$ , le lecteur montrera aisément que

$$\exp(\theta X_3) = \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \in SU(2)$$

Notons que

$$\begin{aligned} \exp[(\theta + 2\pi)X_3] &= -\exp[\theta X_3] \\ \exp[(\theta + 4\pi)X_3] &= +\exp[\theta X_3] \end{aligned}$$

— Soient maintenant

$$X_1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'espace vectoriel engendré par  $X_1, X_2, X_3$  est constitué par l'ensemble des matrices antisymétriques réelles  $3 \times 3$ ; il coïncide donc avec l'algèbre de Lie  $Lie(SO(3))$ . Comme dans le cas précédent, on peut vérifier que

$$[X_i, X_j] = -\epsilon_{ijk}X_k$$

Les deux algèbres  $Lie(SO(3))$  et  $Lie(SU(2))$  sont donc isomorphes. Par ailleurs, en développant la fonction  $\exp$  en série et en utilisant les

propriétés  $X_3^{2p} = \text{diag}((-1)^p, (-1)^p, 0)$ ,  $X_3^{2p+1} = (-1)^p X_3$ , il est facile de voir que

$$\exp[\theta X_3] = \text{diag}(\cos \theta, \cos \theta, 1) + X_3 \sin \theta \in SO(3)$$

Notons alors que

$$\exp[(\theta + 2\pi)X_3] = + \exp[\theta X_3]$$

- Ainsi donc, lorsqu’“on fait un tour” dans  $SO(3)$ , on revient à l’identité – chose qu’on savait déjà ! – mais, dans  $SU(2)$ , pour revenir à l’identité, il faut faire . . . deux tours ! Cette différence de comportement entre les deux groupes peut sembler assez surprenante à première vue. Il est possible de l’illustrer de façon assez simple grâce à une expérience élémentaire.

*Expérience utilisant  $SO(3)$*  : Prenez un objet quelconque, posez-le sur la table et faites-lui subir une rotation de 360 degrés autour d’un axe vertical ; la configuration que vous obtenez est indiscernable de la configuration initiale.

*Expérience utilisant  $SU(2)$*  : Prenez un objet quelconque, suspendez-le au milieu de la pièce en utilisant huit élastiques reliés aux huit coins (haut et bas) de la pièce (vous pouvez utiliser un moins grand nombre d’élastiques !) et faites subir à votre objet une rotation de 360 degrés ; notez que les élastiques sont emmêlés ; essayez de démêler les élastiques sans faire tourner l’objet. . . vous n’y parvenez pas. Faites alors subir à votre objet une seconde rotation de 360° (depuis la configuration initiale vous aurez ainsi effectué une rotation de  $4\pi = 720^\circ$ ) ; les élastiques semblent être encore plus emmêlés ; essayez de démêler ces élastiques (retrouver la configuration initiale) sans faire tourner l’objet. . . A votre grande surprise (même si vous avez fait cette expérience plusieurs fois) vous y parvenez !

*Remarque* : Si vous avez vraiment des difficultés à démêler les élastiques, ouvrez l’ouvrage [5] où la suite des mouvements à effectuer est décrite en détails.

Il existe une autre expérience, encore plus simple, mais un peu plus difficile à décrire “avec des mots”, qui illustre la même différence de comportement entre les deux groupes et qui illustre donc la façon dont  $SU(2)$  décrit les “rotations d’objets attachés à leur environnement”. Prenez un verre (rempli de votre vin favori) et essayez, par pivot du poignet, de lui faire subir une rotation de 360° . . . échec : à moins d’avoir des articulations très spéciales, vous vous retrouvez tout tordu. Essayez alors, à partir de cette position (tordue) de faire subir à votre

verre une seconde rotation, dans le même sens, de  $360^\circ$  (le coude doit normalement s'abaisser) et ça marche : Vous vous retrouvez dans l'état initial !

Ce phénomène amusant est d'une importance physique capitale. C'est lui qui, en définitive, explique la différence entre fermions et bosons (rappelons que les électrons — et plus généralement les particules de spin demi-entier — obéissent à la statistique de Fermi-Dirac alors que les photons (ou les noyaux d'Hélium !) — et plus généralement les particules de spin entier — obéissent à la statistique de Bose-Einstein.

- Revenons aux mathématiques. Nous avons un homomorphisme de  $SU(2)$  dans  $SO(3)$  : l'image de  $\exp(\theta^i X_i) \in SU(2)$  est, par définition  $\exp(\theta^i X_i) \in SO(3)$  où les  $X_i$  sont, bien entendu, définis de deux façons différentes, comme précédemment. Ce morphisme surjectif n'est pas injectif ; en effet, les deux éléments distincts  $\exp(2\pi X_3) = -1$  et  $\exp(4\pi X_3) = 1$  de  $SU(2)$  se projettent tous deux sur l'identité de  $SO(3)$ . Le noyau de cet homomorphisme est donc  $\mathfrak{Z}_2 = \{-1, 1\}$  d'où il s'ensuit que  $SO(3) = SU(2)/\mathfrak{Z}_2$ . En effet, un théorème très élémentaire de théorie des groupes nous apprend que si  $\ell$  est un homomorphisme du groupe  $G$  dans le groupe  $K$ , alors l'image  $\ell(G)$  est isomorphe au quotient de  $G$  par le noyau de  $\ell$  (dans le cadre commutatif, ce théorème généralise un résultat bien connu et rencontré, par exemple, dans l'étude des espaces vectoriels).

- Deux groupes possédant des algèbres de Lie isomorphes sont dits *localement isomorphes*. Ainsi  $SU(2)$  et  $SO(3)$  sont localement isomorphes. Ils ne sont cependant pas isomorphes.

On admettra le résultat suivant. Deux groupes compacts connexes non isomorphes peuvent admettre des algèbres de Lie isomorphes (on dit qu'il s'agit de groupes localement isomorphes). Les groupes de Lie qui admettent la même algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sont tous de la forme  $G_i = G/D_i$  où  $D_i$  est un sous-groupe discret distingué de  $G$ . Le sous-groupe  $D_i$  est isomorphe au groupe fondamental de  $G_i$  (i.e. au premier groupe d'homotopie  $\pi_1(G_i)$ ) et le groupe  $G$  est simplement connexe (ce qui signifie que son sous-groupe fondamental est réduit à l'identité).  $G$  est appelé revêtement universel de  $G_i$ . On note quelquefois  $G = \widehat{G}_i$

- Exemples de groupes de Lie localement isomorphes.

$$SU(2) \text{ et } SO(3) = SU(2)/\mathfrak{Z}_2 \quad \pi_1(SU(2)) = 1 \quad \pi_1(SO(3)) = \mathfrak{Z}_2$$

$$SU(3) \text{ et } SU(3)/\mathfrak{Z}_3 \quad \pi_1(SU(3)) = 1 \quad \pi_1(SU(3)/\mathfrak{Z}_3) = \mathfrak{Z}_3$$

$$\mathfrak{R} \text{ et } U(1) = \mathfrak{R}/\mathfrak{Z} \quad \pi_1(\mathfrak{R}) = 1 \quad \pi_1(U(1)) = \mathfrak{Z}$$

- Les groupes  $SO(n)$  ne sont jamais simplement connexes.

— Lorsque  $n = 2$ ,  $SO(2) = U(1) = S^1$  et on sait que  $\pi_1(S^1) = \mathfrak{Z}$  ;

le revêtement universel de  $U(1)$  est  $\mathfrak{R}$ , l'ensemble des réels : par définition du cercle (périodicité) on sait que  $U(1) = \mathfrak{R}/\mathfrak{Z}$ .

- Lorsque  $n = 3$ , on a vu que le revêtement universel de  $SO(3)$  est  $SU(2)$  et que  $\pi_1(SO(3)) = \mathfrak{Z}_2$ .
- Lorsque  $n \geq 3$ , on montre que  $\pi_1(SO(n)) = \mathfrak{Z}_2$ . Le revêtement universel  $\overline{SO}(n)$  de  $SO(n)$  se note  $Spin(n)$ . Le fait que  $Spin(3) = SU(2)$  est une coïncidence de basse dimension ; on montre que  $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ ,  $Spin(5) = U(2, \mathfrak{H}) \equiv Sp(2) \equiv USp(4)$ ,  $Spin(6) = SU(4)$ .
- Lorsque  $n > 6$ ,  $Spin(n)$  n'est autre que...  $Spin(n)$  et ne coïncide pas avec un autre groupe classique. Pour construire explicitement  $Spin(n)$ , le plus simple est d'utiliser les algèbres de Clifford (voir la discussion en fin de chapitre).

### 2.2.3 Classification des groupes et algèbres de Lie. Généralités.

#### Un peu de terminologie

- Une algèbre de Lie est *abélienne* si elle est... commutative.
- Une algèbre de Lie est *simple* si elle n'est pas abélienne et si elle ne possède aucun idéal bilatère non trivial.
- Une algèbre de Lie est *semi-simple* si elle peut s'écrire comme (si elle est isomorphe à une) somme directe d'algèbres simples.
- Une algèbre de Lie est *non semi-simple* si elle n'est pas semi-simple.

On a bien entendu une terminologie analogue au niveau des groupes.

- Un groupe de Lie est *abélien* s'il est... commutatif.
- Un groupe de Lie est *simple* s'il n'est pas abélien et s'il ne possède aucun sous groupe distingué (*invariant*) non trivial.
- Un groupe de Lie est *semi-simple* s'il peut s'écrire comme (s'il est isomorphe à un) produit direct de groupes simples.
- Un groupe de Lie est *non semi-simple* s'il n'est pas semi-simple.

#### Idées fondamentales de la classification

- On tente d'abord de classier les algèbres de Lie. On en déduit la classification des groupes de Lie. Nous supposons toujours, dans cette section, et sauf mention explicite du contraire, que nous sommes en dimension finie.
- On montre qu'une algèbre de Lie quelconque peut toujours se décomposer en une somme directe d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre de Lie non semi-simple particulière qu'on appelle son radical (décomposition

de Levi). Pour définir le radical d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , on procède comme suit : on commence par construire la "série dérivée" ( $\mathfrak{g}^{(i)}$ ) de  $\mathfrak{g}$  définie par  $\mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$ . Chaque terme de cette suite est un idéal de  $\mathfrak{g}$  contenant le terme suivant. Notons que  $\mathfrak{g}$  est abélienne lorsque le premier terme de cette suite (c'est à dire  $\mathfrak{g}^{(1)}$ ) est nul. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite *résoluble* lorsque  $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$  pour une certaine valeur de  $k$ . Etre résoluble est ainsi, pour une algèbre de Lie, une notion un peu plus faible que celle d'être abélienne. Le *radical* d'une algèbre de Lie quelconque est alors, par définition le plus grand idéal résoluble de cette algèbre de Lie. Le radical d'une algèbre de Lie semi-simple est, bien évidemment, nul. L'existence de la décomposition de Levi montre qu'il faudrait classifier, pour bien faire, d'une part les algèbres de Lie semi-simples et et d'autre part les algèbres de Lie non semi-simples.

- La classification des algèbres de Lie non semi-simples est difficile... (et probablement impossible).
- La classification des algèbres de Lie semi-simples (sur le corps  $\mathfrak{C}$ ) a été effectuée par E. Cartan. Pour classer les algèbres de Lie semi-simples, il suffit de classer les algèbres de Lie simples.
- On classifie d'abord les algèbres de Lie simples complexes (i.e. en tant qu'espace vectoriel, le corps des complexes est  $\mathfrak{C}$ ). On démontre qu'il existe quatre séries infinies  $A_n, B_n, C_n, D_n$  d'algèbres de Lie simples. Le symbole  $n$  apparaissant en indice fournit le rang de l'algèbre correspondante. Pour  $n$  "suffisamment petit", il peut se faire que des individus appartenant à des séries différentes coïncident. Il peut se faire aussi, pour  $n$  petit, que les algèbres en question soient, non pas simples, mais semi-simples (en fait cela n'arrive qu'une seule fois). On y reviendra plus loin. On démontre aussi qu'il existe, en dehors des algèbres de Lie classiques, qui sont, par définition, les membres des quatre séries pré-citées, un nombre fini (cinq) d'algèbres de Lie simples. On les appelle "exceptionnelles" ; ce sont :  $G_2, F_4, E_6, E_7$  et  $E_8$ .
- Pour une algèbre de Lie complexe donnée, on classifie les différentes algèbres de Lie réelles admettant la même extension complexe ; techniquement, ceci se fait en classifiant les involutions. C'est ainsi que  $D_n$ , par exemple, admet les formes réelles distinctes, notées  $\mathfrak{so}(p, q)$ ,  $p \geq 0, q \geq 0, p + q = n$ , et  $\mathfrak{so}(2n)^*$ .
- A chaque forme réelle (c'est à dire, à chaque algèbre de Lie réelle correspondant à une algèbre de Lie complexe donnée) on associe un groupe de Lie connexe et simplement connexe, à l'aide de l'application exponentielle. On démontre que, pour une algèbre de Lie complexe donnée (exemple  $D_3$ ), une seule forme réelle correspond à un groupe

de Lie compact (dans notre exemple, il s'agit de  $SO(6) = \exp(\mathfrak{so}(6))$ ). Les autres groupes de Lie ainsi obtenus, à savoir  $SO(5, 1)$ ,  $SO(4, 2)$ ,  $SO(3, 3)$  et  $SO(6)^*$  sont non compacts. L'algèbre de Lie réelle unique dont l'exponentielle constitue un groupe de Lie compact s'appelle *forme réelle compacte* de l'algèbre de Lie complexe donnée (bien que, *stricto sensu* cette algèbre possède évidemment une topologie non compacte puisqu'il s'agit d'un espace vectoriel!).

- A chaque groupe de Lie connexe et simplement connexe  $\widehat{G}$ , on associe alors une famille de groupes de Lie  $G_i$  connexes, mais non simplement connexes en quotientant  $\widehat{G}$  par un sous-groupe distingué discret  $K_i$  (voir la sous-section précédente) :  $G_i = \widehat{G}/K_i$ . On a  $\pi_1(G_i) = K_i$  et  $\widehat{G}$  est le revêtement universel des  $G_i$ . Par exemple, on obtient ainsi  $SO(6) = SO(6)/\mathfrak{I}_2$  (rappelons la notation consacrée :  $Spin(n) = SO(n)$ ).
- Les groupes de Lie compacts correspondant à la forme réelle compacte des algèbres complexes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  sont les groupes déjà rencontrés notés  $SU(n+1)$ ,  $Spin(2n+1)$ ,  $Sp(n)$  et  $Spin(2n)$  dont nous avons déjà donné les dimensions. Ceux correspondants aux algèbres de Lie exceptionnelles se notent généralement de la même façon que les algèbres de Lie correspondantes. Les dimensions des cinq groupes exceptionnels  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  sont respectivement 14, 52, 78, 133, 248.

### Remarques diverses

- Tout le monde, ou presque, désigne par  $SO(n)$  le groupe  $SO(n, \mathfrak{R})$  et par  $SU(n)$  le groupe  $SU(n, \mathfrak{C})$ . Les groupes de Lie correspondant à la série  $C_n$  se notent malheureusement de façons très diverses suivant les auteurs. Nous avons décidé de noter  $Sp(n)$  le groupe compact correspondant et de réserver la notation  $Sp(2n, \mathfrak{R})$  pour désigner “le” groupe symplectique (la forme réelle non compacte de  $C_n$  qui définit la géométrie de l'espace des phases en mécanique). La notation  $U(n, \mathfrak{H})$  se référant aux groupes unitaires quaternioniques ( $\mathfrak{H}$  est le corps non commutatif des quaternions) est aussi assez en vogue pour désigner le groupe compact  $Sp(n)$ . Le même groupe est désigné quelquefois par le symbole  $USp(2n)$ . La raison d'être de cette dernière notation est que ce groupe coïncide avec l'intersection des unitaires (les  $U(n)$ ) et des symplectiques complexes (les  $Sp(n, \mathfrak{C})$ ) Pour cette raison on les appelle aussi “les unitaires symplectiques”. Hélas, on peut également trouver des auteurs désignant ce même groupe  $USp(2n)$  par  $USp(n)$ ... Bref,

c'est la pagaille.

- Toutes les algèbres de Lie, membres de séries  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  — et tous les groupes correspondants — sont simples, à l'exception de  $D_2 = A_1 \oplus A_1$ . Au niveau des groupes, on peut donc écrire  $Spin(4) = SU(2) \times SU(2) = Spin(3) \times Spin(3)$ ; en d'autres termes,  $SO(4)$  et  $SO(3) \times SO(3)$  ont même algèbre de Lie.
- Comme annoncé plus haut, il existe des isomorphismes exceptionnels entre membres de séries différentes, lorsque  $n$  est assez petit. Les voici

$$\begin{array}{ll} A_1 = D_1 = C_1 & D_2 = A_1 \oplus A_1 \quad (\text{déjà vu}) \\ A_3 = D_3 & C_2 = B_2 \end{array}$$

Au niveau des groupes compacts correspondants, on obtient donc les isomorphismes

$$\begin{array}{ll} SU(2) = Spin(3) = Sp(1) & Spin(4) = SU(2) \times SU(2) \\ SU(4) = Spin(6) & Sp(2) = Spin(5) \end{array}$$

Citons enfin quelques isomorphismes concernant les groupes non compacts.  $Spin^\uparrow(p, q)$  désigne ici la composante connexe de l'identité dans  $Spin(p, q)$  :

$$Spin^\uparrow(2, 1) = SL(2, \mathfrak{R}), Spin^\uparrow(3, 1) = SL(2, \mathfrak{C}), Spin^\uparrow(4, 1) = U(1, 1, \mathfrak{H})$$

$$Spin^\uparrow(5, 1) = SL(2, \mathfrak{H}), Spin^\uparrow(3, 2) = Sp(4, \mathfrak{R}), Spin^\uparrow(4, 2) = SU(2, 2)$$

- La classification des algèbres et groupes de Lie ainsi que l'étude des problèmes qui s'y rattachent nécessiterait de décupler la taille de ce chapitre. Nous ne prétendons donc pas, dans ce paragraphe, expliquer quoi que ce soit et nous nous contentons de faire un tour rapide du zoo... Il est difficile de parler de la classification des groupes de Lie sans mentionner les diagrammes de Dynkin (dans un contexte différent on parle aussi de graphes de Coxeter). Mentionnons seulement que la classification de Cartan, pour les algèbres de Lie simples, se réduit, en fin de compte, à un problème de combinatoire admettant une interprétation graphique. A chaque algèbre de Lie simple complexe, on associe donc un petit diagramme (voir n'importe traité de classification des groupes de Lie). Nous recommandons au lecteur de compléter sa culture en allant consulter la littérature appropriée. Notons que ces diagrammes apparaissent absolument partout, c'est à dire non seulement dans un contexte lié à l'étude des algèbres de Lie, mais

encore dans bien d'autres domaines : dans la théorie des groupes engendrés par réflexions, en théorie des singularités, dans la théorie des noeuds, dans la classification des inclusions d'algèbres d'opérateurs (sous-facteurs), en arithmétique, dans la géométrie des solides platoniques (en relation avec l'étude des sous-groupes finis de  $SO(3)$ ), dans la théorie des carquois, dans celle des systèmes intégrables (en mécanique), dans les théories conformes bi-dimensionnelles, en théorie des cordes... Bref, partout. Nous espérons donc que le lecteur, curieux, sera tenté de vouloir comprendre pourquoi ces quelques petits dessins contiennent une telle quantité d'information.

- Un dernier mot sur ces diagrammes : certains contiennent des lignes doubles ou triples (exemple de  $G_2$ ), et d'autres non. Ceux n'utilisant que des lignes simples (ce sont ceux des séries  $A_n$ ,  $D_n$  et  $E_n$ ) sont souvent considérés, d'une certaine façon, comme plus fondamentaux que les autres ; les algèbres de Lie correspondantes (les algèbres "ADE") sont également appelées *algèbres simplement lacées*.

### 2.2.4 Message

Un tout dernier mot : passer en revue "l'essentiel" de la théorie des groupes de Lie en une seule section – même en se limitant aux généralités et aux problèmes de classification – est certainement une tâche impossible. Un ouvrage entier serait d'ailleurs insuffisant. Nous n'avons fait qu'aborder le sujet. Vouloir dresser la liste de ce qui n'a pas été effleuré serait à la fois inutile et... incomplet ! Voici donc le message le plus important destiné à notre lecteur néophyte : La section qui s'achève ici ne doit pas être considérée comme un résumé, mais comme une invitation au voyage...

## 2.3 Actions de groupes et représentations

### 2.3.1 Généralités

L'étude des groupes pour eux-mêmes ne devrait pas nous faire oublier un fait essentiel : un groupe sert surtout à agir sur "quelque chose". Historiquement, d'ailleurs, on définissait le plus souvent les groupes comme "groupes de transformations", pour s'apercevoir, après coup, du fait que deux groupes de transformations pouvant sembler très différents de prime abord, ne constituaient, en fait, qu'un seul et même groupe "abstrait", agissant de deux façons différentes sur deux espaces différents. Pour préciser cette notion d'action ainsi que pour décrire la façon dont un groupe  $G$  agit sur un ensemble

$M$ , il est utile d'introduire un vocabulaire approprié.

### 2.3.2 Groupe $G$ opérant à gauche sur un ensemble $E$

A tout élément  $g$  de  $G$  et à tout élément  $x$  (on dira "point") de  $E$ , on associe un point  $y$  de  $E$  qu'on appellera *image de  $x$  par la transformation  $g$* . On écrira

$$y = g x$$

On veut que  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$  afin de pouvoir oublier les parenthèses. Plus précisément, une action (à gauche) de  $G$  sur  $E$  est la donnée d'un homomorphisme  $L$  du groupe  $G$  dans le groupe des substitutions de  $E$  (l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$ ). L'image de  $g \in G$  est noté  $L_g$ . L'application  $L_g$  est donc une bijection de  $E$  dans lui-même. Puisque  $L$  est un homomorphisme, on a  $L_{g_1 g_2} = L_{g_1} L_{g_2}$ . Par abus de langage, il est d'usage de noter  $y = g x$  au lieu de  $y = L_g(x)$ . Le lecteur aura compris que le symbole  $L$  vient de *Left*.

Pour définir une action quelconque, nous avons simplement supposé que  $L_g$  était une bijection, mais on peut contraindre davantage la situation en imposant à  $L_g$  d'être un homéomorphisme ( $E$  étant alors supposé muni d'une topologie), un difféomorphisme ( $E$  étant une variété différentiable), etc . On parle alors d'action continue, différentiable, etc .

### 2.3.3 Action à droite (anti-action)

On dit que  $G$  agit à droite sur  $E$  si on se donne un anti-homomorphisme  $R$  de  $G$  dans l'ensemble des substitutions de  $E$ . En d'autres termes, on remplace la condition  $L_{g_1 g_2} = L_{g_1} L_{g_2}$  par la condition  $R_{g_1 g_2} = R_{g_2} R_{g_1}$ . Une action à droite n'est donc pas une action, au sens strict du terme, mais une anti-action. De façon à pouvoir se débarrasser du symbole  $R$ , mis pour *Right*, on notera  $y = x g$  au lieu de  $y = R_g(x)$ . L'écriture de  $g$ , à droite de  $x$  permet de composer correctement les transformations sans qu'il y ait besoin de parenthèses :  $R_{g_1 g_2}(x) = R_{g_2} R_{g_1}(x)$  implique en effet  $x(g_1 g_2) = (x g_1) g_2$ .

### 2.3.4 Passage de la droite à la gauche (et inversement)

Supposons donnée une action à droite  $R$  de  $G$  sur  $E$ ; on peut canoniquement lui associer une action à gauche  $L$  en définissant  $L_g x = R_{g^{-1}} x$ ; c'est à dire encore, avec des notations plus dépouillées,  $g x = x g^{-1}$ . On peut ainsi toujours passer de la droite à la gauche et inversement. Cela dit, il est, quelquefois, dangereux d'effectuer ce passage sans notations protectrices... En effet, prenons par exemple  $E = G$  lui-même; on n'a alors certainement

pas  $g.k = k.g^{-1}$  dans le groupe  $G$  ! Une telle expression devrait donc s'écrire  $g \times k = k.g^{-1}$  et s'interpréterait, non comme une égalité dans  $G$  mais comme une expression définissant, à partir de la multiplication “.” une nouvelle multiplication “ $\times$ ” (qu'on appelle d'ailleurs la “multiplication opposée”).

### 2.3.5 Orbites, espace quotient

- Soit  $G$  un groupe opérant à gauche sur  $E$ . L'orbite  $Gx$  de  $x \in E$  est l'ensemble

$$Gx = \{y \in E \text{ tel que } \exists g \in G, y = gx\}$$

On peut ainsi passer d'un point à un autre de la même orbite en utilisant un élément du groupe  $G$ .

- Le fait, pour deux points  $x$  et  $y$ , d'appartenir à la même orbite est clairement une relation d'équivalence (utilisant l'existence d'un élément neutre, l'existence, pour tout  $g$ , d'un inverse  $g^{-1}$ , et le fait que la loi de groupe soit interne). L'ensemble quotient n'est autre que l'ensemble des différentes orbites  $\bar{x} = Gx$  et se note  $G \backslash E$  pour une action à gauche. L'ensemble quotient pour une action à droite (les classes sont alors les orbites  $\bar{x} = xG$ ) se note  $E/G$ .

### 2.3.6 Efficacité

- L'action de  $G$  sur  $E$  est dite *fidèle*, *efficace*, ou *effective* (“*effective or faithful action*”) lorsque tous les éléments de  $G$  (hormis l'élément neutre) font effectivement quelque chose ! On considère le fait de ne rien faire comme une action particulière peu efficace. . . L'adjectif “efficace” est assez parlant, mais il semble que le mot “fidèle” soit maintenant généralement utilisé pour désigner cette notion. Pour une action donnée du groupe  $G$  sur l'ensemble  $E$ , on définit l'ensemble  $I$  des éléments de  $G$  qui n'agissent sur aucun des éléments de  $E$ , c'est à dire

$$I = \{j \in G \text{ tel que } \forall x \in E, jx = x\}$$

Cet ensemble  $I$  est manifestement un sous-groupe de  $G$  (on pourrait l'appeler le sous-groupe des feignants ! ) et il caractérise l'efficacité de l'action du groupe  $G$ . Plus il y a de feignants, moins l'action est efficace. Lorsque  $I$  se réduit à l'élément neutre de  $G$ , on dit que l'action est fidèle. Lorsque  $I$  coïncide avec  $G$ , l'action est triviale.

- Manifestement, seules les actions fidèles sont intéressantes. Pour cette raison, il est utile, lorsqu'on se donne une action non- fidèle de  $G$  sur

$E$ , de fabriquer un nouveau groupe  $G/I$  pour lequel l'action est fidèle. Noter que  $G/I$  est bien un groupe car  $I$  est distingué dans  $G$  (en effet  $gI(g^{-1}x) = gg^{-1}x = x$  donc  $gIg^{-1} = I$ ).

### 2.3.7 Liberté et stabilisateur

- On suppose donnée une action fidèle du groupe  $G$  sur l'ensemble  $E$ . Puisque l'action est fidèle, tous les éléments de  $G$  – sauf l'élément neutre – “font quelque chose”. Cependant, il peut se faire que, pour un point particulier  $x \in E$ , il existe des éléments de  $G$  laissant ce point invariant. On définit ainsi le *stabilisateur*  $H_x$  de  $x \in E$  :

$$H_x = \{h \in G \quad \text{tel que} \quad hx = x\}$$

Il est facile de voir que  $H_x$  est un sous-groupe de  $G$ . Noter la différence entre la définition de  $H_x$  et celle de  $I$  donnée dans le paragraphe précédent : la définition de  $H_x$  dépend *a priori* de  $x$  ! Le stabilisateur de  $x$  est quelquefois dénommé (historiquement, dans le contexte de l'action du groupe de Lorentz sur l'espace de Minkowski de la théorie de la Relativité Restreinte) *petit groupe de  $x$* . Le stabilisateur  $H_x$  de  $x$  est aussi appelé *sous-groupe d'isotropie de  $x \in E$* .

- Deux points appartenant à la même orbite ont des stabilisateurs conjugués. En effet, soit  $y = gx$ , alors l'hypothèse  $H_x x = x$  implique  $H_x g^{-1}y = g^{-1}y$ . Ceci montre que  $H_y = gH_x g^{-1}$ . Notons que  $H_x$  et  $H_y$ , bien qu'isomorphes, sont en général distincts comme sous-groupes de  $G$  ( $H_x$  n'est généralement pas distingué dans  $G$ ).
- Il existe une bijection entre les points de l'orbite  $\bar{x} = Gx$  de  $x$  et les points de l'ensemble quotient  $G/H_x$  : à  $y = gx$  on associe l'élément  $gH_x$  de  $G/H_x$  et réciproquement. On assimile souvent l'orbite  $Gx$  de  $x$  à l'ensemble quotient  $G/H$  où  $H$  désigne le stabilisateur d'un point quelconque de l'orbite, mais il faut se rappeler que, précisément, cette identification n'est possible que si on a choisi un point. En d'autres termes, la bijection entre les deux ensembles n'est pas canonique puisqu'elle dépend du point  $x$  choisi. Cette remarque (le fait qu'une telle bijection ne soit pas canonique) est à la base de l'idée d'invariance de jauge, qui, elle-même, est à la base de pratiquement toutes nos théories physiques. Nous y reviendrons avec force détails dans le chapitre consacré aux espaces fibrés, puis dans celui consacré aux connexions.
- Il peut se faire que, pour tout point  $x$  de  $E$ , le stabilisateur  $H_x$  se réduise à l'identité. Dans ce cas l'action est dite *libre*. Le résultat

précédent montre alors que, dans un tel cas, chaque orbite est identifiable à  $G$  lui-même. Cette situation est à la base de la théorie des espaces fibrés principaux (chapitre suivant).

- Notons que liberté implique efficacité ...

### 2.3.8 Transitivité

L'action de  $G$  sur  $E$  est dite *transitive* s'il n'existe qu'une seule orbite, en d'autres termes, s'il est possible de passer de n'importe quel point de  $E$  à n'importe quel autre point à l'aide d'un élément de  $G$ .

### 2.3.9 Action d'un sous-groupe $H$ sur un groupe $G$ , normalisateur, centralisateur

- Le cas particulier où  $E = G$  et où on considère donc l'action de  $G$  sur lui-même par multiplication – à gauche ou à droite – mérite évidemment une mention spéciale. Il s'agit alors d'une action fidèle, libre et transitive ; nous y reviendrons un peu plus loin car elle permet de donner une définition intrinsèque de la notion d'algèbre de Lie.
- Choisissons maintenant un sous-groupe  $H$  de  $G$ . On peut alors définir une action à gauche de  $H$  sur  $G$  (les orbites sont les  $\bar{g} = Hg$ , c'est à dire les classes de  $H \backslash G$ ) et une action à droite de  $H$  sur  $G$  (les orbites sont les  $\bar{g} = gH$ , c'est à dire les classes de  $G/H$ ). En général, les ensembles quotients  $G/H$  et  $H \backslash G$  ne sont pas des groupes, sauf dans le cas où les classes à gauche et à droite coïncident ( $gH = Hg$ ), c'est à dire lorsque  $H$  est *distingué* dans  $G$  (on dit aussi dans ce cas que  $H$  est un sous-groupe *invariant* ou un sous-groupe *normal*). En effet, on peut alors définir de façon non ambiguë la multiplication des classes :  $\bar{g}\bar{k} = gHkH = gkH = \overline{gk}$ .
- Soit  $H \subset G$ . On définit le *normalisateur*  $N$  de  $H$  dans  $G$  comme le plus grand sous-groupe de  $G$  dans lequel  $H$  est normal.

$$N = \{n \in G \quad \text{tel que} \quad nH = Hn\}$$

Par construction  $H$  est distingué dans  $N$ , donc  $N|H$  est un groupe, et si  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$ , alors  $N = G$ . Notons que, dans un groupe abélien, tout sous-groupe est distingué.

- Il faut distinguer (précisément !) les notions de normalisateur et de centralisateur. Le *centralisateur*  $\mathcal{Z}_H$  de  $H$  dans  $G$  est l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent (élément par élément) avec ceux de  $H$  :

$$\mathcal{Z}_H = \{z \in G \quad \text{tel que} \quad \forall h \in H, hz = zh\}$$

Le centralisateur  $\mathcal{Z}$  de  $H$  dans  $G$  (que nous notons également  $\mathcal{Z}_H$  pour préciser) est bien évidemment un sous-groupe – non nécessairement abélien – de  $G$ . Il nous faut également rappeler la définition du *centre* d'un groupe  $G$  qui n'est autre que le centralisateur de  $G$  dans lui-même. Bien entendu, le sous-groupe  $H$  possède lui-même son propre centre  $C_H$  et on a  $C_H \subset \mathcal{Z}_H$ .

### 2.3.10 Stratification

Dans toute cette sous-section on considère un groupe  $G$  agissant sur  $E$  de façon fidèle.

- On sait que si deux points appartiennent à la même orbite, leurs stabilisateurs sont conjugués, mais il peut se faire qu'ils coïncident. Cela arrivera si  $H_{y=gx} = H_x$  c'est à dire si  $gH_xg^{-1} = H_x$ , c'est à dire si  $g$  appartient au normalisateur de  $H_x$  dans  $G$ .
- Ce n'est pas parce que les stabilisateurs de  $H_{x_1}$  et de  $H_{x_2}$  sont conjugués qu'ils appartiennent nécessairement à la même orbite. Par contre, et par définition, on dit alors qu'ils appartiennent à la même *strate*. Ainsi, une strate donnée est caractérisée par un certain sous-groupe  $H$  de  $G$  défini à isomorphisme près. On dira que deux orbites sont du même type si les stabilisateurs des différents points sont isomorphes. Une strate est donc la réunion de toutes les orbites d'un même type.
- On peut ainsi décomposer  $E$  en une réunion de strates  $E_H$ , chaque strate étant caractérisée par un certain type de stabilisateur  $H$ . On peut également décomposer l'espace des orbites  $G \backslash E$  en une réunion d'ensembles  $G \backslash E_H$ . Lorsque  $E$  est muni d'une topologie, on démontre que l'une de ces strates (dite la *strate générique*) est ouverte et dense dans  $E$ ; le groupe d'isotropie correspondant (le *stabilisateur générique*) est le plus petit possible.

### 2.3.11 Remarques

Afin de se familiariser avec les concepts qui précèdent ainsi qu'avec la terminologie correspondante, nous suggérons très fortement au lecteur de revoir toute la géométrie élémentaire (celle étudiée dans les classes secondaires) en ces termes, c'est à dire en utilisant l'action des groupes de translations, rotations, homothéties, etc. Il pourra être également extrêmement utile de revoir la cinématique classique (puis la cinématique relativiste) sous cet angle, en étudiant l'action du groupe Euclidien, celle du groupe de Galilée, du groupe de Lorentz etc.

## 2.4 Champs de vecteurs fondamentaux

### 2.4.1 Cas d'un groupe de Lie agissant sur une variété

— On se donne un groupe de Lie  $G$  et une action à gauche (supposée différentiable) de  $G$  sur une variété  $M$ . Il y a, au moins, trois façons de considérer cette action :

1. Comme une application de  $G \times M$  dans  $M$  :

$$(g, P) \in G \times M \xrightarrow{L} gP \in M$$

2. Comme la donnée, pour tout point  $P$  dans  $M$ , d'une application

$$g \in G \xrightarrow{R_P} gP \in M$$

3. Comme la donnée, pour tout élément  $g$  du groupe  $G$ , d'une application

$$P \in M \xrightarrow{L_g} gP \in M$$

Attention : Une action à gauche fournit une application notée  $L_g$  quand on gèle l'élément  $g$  du groupe mais fournit une application notée  $R_P$  quand on gèle le point  $P$ . L'application  $L_g$  n'est autre que celle qui nous a permis précédemment de définir l'action d'un groupe sur un ensemble. Notons que  $L_g = L(g, \cdot)$ . C'est en fait surtout le point de vue 2 qui nous intéresse ici et nous allons donc étudier l'application  $R_P = L(\cdot, P)$ . L'application  $R_P$  étant supposée différentiable, nous pouvons considérer sa différentielle notée suivant les auteurs,  $R_{P*}$ ,  $TR_P$  ou simplement  $dR_P$ . Comme on le sait (voir la première partie de cet ouvrage),  $dR_P$  est une application linéaire de l'espace tangent  $T(G, g)$  dans l'espace tangent  $T(M, gP)$  dont l'expression, relativement à un couple de repères mobiles dans  $G$  et  $M$  s'écrit à l'aide de la matrice jacobienne. Si on choisit alors  $g = e$  (l'élément neutre de  $G$ ), on obtient ainsi une application linéaire  $T(G, e) \rightarrow T(M, P)$  qu'on devrait noter  $(dR_P)_{g=e}$  mais que nous préférons ne pas baptiser du tout. L'important est d'observer qu'on obtient ainsi, pour tout vecteur  $X$  appartenant à  $T(G, e)$  un vecteur noté  $X^L(P)$  appartenant à  $T(M, P)$ . Puisque cette application existe pour tout  $P$  de  $M$ , on obtient donc un champ de vecteurs  $P \in M \rightarrow X^L(P) \in T(M, P)$ . On dit que  $X^L$  est le *champ de vecteurs fondamental gauche* associé à l'élément  $X$  de l'espace tangent à  $G$  en l'identité.

- Nous verrons un peu plus loin que l'algèbre de Lie de  $G$ , que nous avons précédemment définie de façon élémentaire à l'aide de la fonction exponentielle, peut s'identifier, *en tant qu'espace vectoriel* à l'espace tangent à  $G$  en l'identité :  $Lie(G) = T(G, e)$ . En anticipant légèrement, nous voyons donc qu'à tout élément  $X$  de  $Lie(G)$  on peut associer un champ de vecteurs  $X^L$  sur  $M$ . Résumons cette construction simple et fondamentale par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left( \begin{array}{c} G \rightarrow M \\ g \rightarrow gP \end{array} \right) & \rightarrow & (T(G, g) \rightarrow T(M, gP)) \rightarrow \left( \begin{array}{c} LieG = T(G, e) \rightarrow T(M, P) \\ X \qquad \qquad \rightarrow X^L(P) \end{array} \right) \\ \text{On différentie} & & \text{On particularise} \end{array}$$

- Le champ fondamental gauche associé à  $X \in LieG$  se note, soit  $X^L(P)$  comme ci-dessus, soit, encore plus simplement

$$X^L(P) = X \cdot P$$

Pour rendre cette notation naturelle, il suffit de développer l'exponentielle dans l'écriture

$$g(t) \cdot P = e^{tX} \cdot P \approx P + tX \cdot P + \dots$$

et ne garder que les termes du premier ordre. Ainsi  $X^L(P) = X \cdot P = \frac{d}{dt}(g(t) \cdot P)|_{t=0}$ .

- Tout ce que nous avons décrit depuis le début de cette section consacrée à l'étude des champs fondamentaux supposait donnée une action à gauche de  $G$  sur  $M$ . Nous obtenons des notions analogues en supposant que  $G$  agit à droite sur  $M$ . En particulier, lorsque  $M = G$ , nous pouvons aussi bien considérer l'action à gauche que l'action à droite du groupe sur lui-même, et donc, de la même façon que nous avons construit des champs fondamentaux gauche, nous pouvons également construire, pour tout élément  $X$  de  $Lie(G) = T(G, e)$ , un champ de vecteurs fondamentaux droit (le *champ fondamental droit*

$$X^R(P) = P \cdot X$$

associé à  $X$ ).

- Certains auteurs désignent les champs fondamentaux sous le nom de *champs de Killing*. Pour nous, les champs de Killing sont des champs fondamentaux particuliers, ceux associés à l'action d'un groupe agissant par isométries sur une variété riemannienne.

### 2.4.2 Exemple : le groupe euclidien agissant sur le plan $\mathfrak{R}^2$

Le groupe euclidien  $E(2)$  agit sur le plan affine  $M = \mathfrak{R}^2$  par composition de translations et de rotations autour de l'origine (c'est un produit semi-direct du groupe des rotations  $U(1)$  par le groupe des translations  $\mathfrak{R}^2$ ). Une carte (qui est d'ailleurs globale) de  $\mathfrak{R}^2$  est définie par les coordonnées  $(x, y)$  relatives à un repère du plan. L'action du groupe euclidien s'écrit

$$(\theta, a, b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b \end{pmatrix}$$

Noter qu'un élément  $g$  du groupe euclidien peut s'écrire à l'aide de la carte  $g \rightarrow (\theta, a, b) \in \mathfrak{R}^3$ ;  $G$  est un groupe de Lie de dimension 3. La différentielle de l'application

$$g = (\theta, a, b) \xrightarrow{L_P} gP = P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

s'écrit

$$[dL_P]_{g=(\theta, a, b)} = \begin{pmatrix} \partial x' / \partial \theta & \partial x' / \partial a & \partial x' / \partial b \\ \partial y' / \partial \theta & \partial y' / \partial a & \partial y' / \partial b \end{pmatrix}$$

En prenant  $g = e = (0, 0, 0)$ , il vient  $[dL_P]_e = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Grâce à l'utilisation de quelques abus de notations évidents, nous voyons que

— Le champ fondamental associé à  $X_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est

$$X_\theta(P) = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \text{ et donc } X_\theta(P) = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

— Le champ fondamental associé à  $X_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est

$$X_a(P) = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } X_a(P) = \frac{\partial}{\partial x}$$

— Le champ fondamental associé à  $X_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est

$$X_b(P) = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } X_b(P) = \frac{\partial}{\partial y}$$

### 2.4.3 Un cas particulier fondamental : le groupe $G$ agissant sur lui-même par translations à gauche et à droite

- Nous considérons maintenant le cas où  $G$  opère sur  $M = G$  lui même ( $g, k \in G$  et  $P \in G$ ). Comme nous le savons, il est possible de considérer deux actions : l'une à gauche  $g \rightarrow g \cdot P$  et l'autre à droite  $k \rightarrow P \cdot k$ . En conséquence, nous avons aussi des champs fondamentaux à gauche  $X^L$  et des champs fondamentaux à droite  $X^R$ . Soit  $X \in Lie G$ , alors

$$X^L(k) = X k \text{ et } X^R(k) = k X$$

Notons aussi que

$$X^R(k) = k X^L(k) k^{-1}$$

- Les deux actions commutent :  $(gP)k = g(Pk)$ . Elles commutent donc aussi infinitésimalement,  $(X^L Y^R - Y^R X^L)(k) = X(kY) - (Xk)Y = 0$ . D'où

$$[X^L, Y^R] = 0$$

- La propriété  $X^L(g)k = X^L(gk)$  caractérise l'invariance de  $X^L$  (champ résultant d'une action à gauche) lorsqu'on le multiplie à droite par  $k$ . On peut donc dire que le champ fondamental gauche  $X^L$  est un *champ invariant à droite*. Attention : *Un champ fondamental gauche est invariant à droite et un champ fondamental droit est invariant à gauche*. Attention, le champ invariant à *gauche* associé à  $X$  se note  $X^R$ .
- Soit  $X \in Lie(G)$ . Lorsque  $t$  varie, l'élément  $g(t) = e^{tX}$  décrit une courbe dans le groupe  $G$  et le vecteur tangent à l'origine de cette courbe est donné par  $\frac{dg(t)}{dt}|_{t=0} = X$ . Inversement, à tout élément  $X$  de  $T(G, e)$  on peut associer une courbe à un paramètre  $g(t) = e^{tX}$  (en fait il s'agit d'un groupe à un paramètre puisque  $g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2)$ ). On peut ainsi identifier  $Lie(G)$ , en tant qu'espace vectoriel, et défini comme précédemment à l'aide de la fonction exponentielle, avec l'espace tangent en l'identité du groupe  $G$  :

$$Lie(G) \equiv T(G, e)$$

- Un champ fondamental droit  $X^R$  est parfaitement caractérisé — que  $M = G$  ou non — par  $X \in T(G, e)$  c'est à dire par un élément de l'espace tangent à l'identité du groupe  $G$ . Dans le cas où  $M = G$ , cependant, la correspondance entre champs fondamentaux droits

(champs invariants à gauche) et éléments de  $T(G, e)$  est bijective ( $kX = kY, k \in G$  implique  $X = Y$ ). Notons que si  $\dim G = n$ , alors  $\dim T(G, e) = n$  et la dimension de l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche est encore  $n$ , alors que la dimension de l'espace de tous les champs de vecteurs est infinie.

- Par ailleurs, on vient de voir que la correspondance entre  $T(G, e)$  et l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche (par exemple) était bijective. En effet  $X^R(g)$  est parfaitement caractérisé par  $X = X^R(e)$  puisque  $X^R(g) = g.X$ . Notons  $\Gamma^G(TG)$  l'ensemble de ces champs de vecteurs. On peut donc identifier  $Lie(G)$  avec  $\Gamma^G(TG)$  :

$$Lie(G) \equiv \Gamma^G(TG)$$

Une autre façon de définir l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $G$  est donc de la définir comme espace des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie. Le commutateur dans l'algèbre de Lie (le crochet de Lie) est alors défini simplement comme commutateur des champs de vecteurs ; il faut évidemment montrer que le commutateur de deux champs de vecteurs invariants à gauche est encore invariant à gauche :

$$[X^R, Y^R] = [X, Y]^R$$

Cette propriété résulte de ce qui précède.

- On pourrait bien sûr penser à utiliser les champs invariants à droite pour définir l'algèbre de Lie, cependant (noter le signe), le commutateur des champs invariants à droite conduit à la relation (exercice !)

$$[X^L, Y^L] = -[X, Y]^L$$

A titre d'exercice (ou d'illustration), vérifions ces propriétés générales dans le cadre de  $SL(2, \mathfrak{C})$ .

Les générateurs (représentation fondamentale) sont donnés par

$$\underline{X}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les actions à droite et à gauche sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{X}_+ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underline{X}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ \underline{X}_- \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underline{X}_- &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{X}_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underline{X}_3 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notez que les générateurs  $\underline{X}_\pm$  et  $\underline{X}_3$  agissent par dérivations. En effet, les actions classiques (droite et gauche) ci-dessus peuvent aussi être écrites à l'aide des opérateurs différentiels suivants :

$$\begin{aligned} \underline{X}_+^L &= c \frac{\partial}{\partial a} + d \frac{\partial}{\partial b} & , & & \underline{X}_+^R &= a \frac{\partial}{\partial b} + c \frac{\partial}{\partial d} \\ \underline{X}_-^L &= a \frac{\partial}{\partial c} + b \frac{\partial}{\partial d} & , & & \underline{X}_-^R &= b \frac{\partial}{\partial a} + d \frac{\partial}{\partial c} \\ \underline{X}_3^L &= a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} - c \frac{\partial}{\partial c} - d \frac{\partial}{\partial d} & , & & \underline{X}_3^R &= a \frac{\partial}{\partial a} - b \frac{\partial}{\partial b} + c \frac{\partial}{\partial c} - d \frac{\partial}{\partial d} \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier explicitement que, par exemple,

$$[\underline{X}_3, \underline{X}_+] = +2\underline{X}_+, \quad [\underline{X}_3^R, \underline{X}_+] = +2\underline{X}_+^R, \quad [\underline{X}_3^L, \underline{X}_+] = -2\underline{X}_+^R$$

#### 2.4.4 L'action adjointe de $G$

Le groupe  $G$  agit sur lui-même par multiplications à droite et à gauche, comme nous l'avons vu plus haut, mais également par l'application adjointe. Soit  $g$  un élément de  $G$ , on définit :

$$Ad_g : k \in G \rightarrow Ad_g(k) = gkg^{-1} \in G$$

Cette action n'est pas fidèle en général car les éléments du centre  $C$  n'agissent pas. Le groupe  $G|C$  qu'on désigne sous le nom de *groupe adjoint* ou *groupe des automorphismes intérieurs* agit, bien sur, de façon fidèle. L'application tangente à  $Ad_g$ , au point  $k$ , envoie  $T(G, k)$  dans  $T(G, gkg^{-1})$ . Si on prend alors  $k = e$  (l'élément neutre), on voit que l'application tangente, notée  $ad_g = (d(Ad_g))_{k=e}$  envoie  $T(G, e)$  dans  $T(G, gg^{-1} = e)$ , c'est à dire  $Lie(G)$  dans  $Lie(G)$ . Posant  $k(t) = e^{tX}$ , on voit que  $ad_g(X) = \frac{d}{dt}(ge^{tX}g^{-1})|_{t=0}$  et donc

$$ad_g(X) = gXg^{-1}$$

#### 2.4.5 Exemple : l'algèbre de Lie du groupe euclidien

Nous avons déjà fait agir le groupe euclidien  $G$  (éléments  $g = (\theta, a, b)$ ) sur l'espace affine  $\mathfrak{A}^2$ . Nous allons maintenant faire agir  $G$  sur lui-même, à droite.

Soit  $P \in G$ . On considère l'application

$$\left( \begin{array}{l} G \xrightarrow{R_P} M = G \\ g \longmapsto Q = Pg \end{array} \right)$$

ce qui, avec des coordonnées, s'écrit

$$(\theta_Q, a_Q, b_Q) = (\theta_P, a_P, b_P)(\theta_g, a_g, b_g)$$

soit, explicitement

$$\begin{pmatrix} \theta \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & a \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \theta \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}_g$$

La différentielle de  $R_P$ , c'est à dire l'application tangente est égale à

$$dR_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_Q}{\partial \theta^g} & \frac{\partial \theta_Q}{\partial a^g} & \frac{\partial \theta_Q}{\partial b^g} \\ \frac{\partial a_Q}{\partial \theta^g} & \frac{\partial a_Q}{\partial a^g} & \frac{\partial a_Q}{\partial b^g} \\ \frac{\partial b_Q}{\partial \theta^g} & \frac{\partial b_Q}{\partial a^g} & \frac{\partial b_Q}{\partial b^g} \end{pmatrix}$$

On choisit, comme base de  $T(G, e)$  la base  $X_\theta(e) = \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $X_a(e) = \frac{\partial}{\partial a}$ ,  $X_b(e) = \frac{\partial}{\partial b}$ .

$$\text{On calcule } dR_P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dR_P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad dR_P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La base correspondante de  $\text{Lie}G \equiv \Gamma^G(TG)$  est donc

$$X_\theta(P) = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_a(P) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial a} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial b} \text{ et } X_b(P) = \sin \theta \frac{\partial}{\partial a} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial b}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les relations de commutation

$$[X_\theta, X_a] = -X_b, \quad [X_\theta, X_b] = +X_a \quad \text{et} \quad [X_a, X_b] = 0$$

### 2.4.6 Exemple : champs invariants sur $SU(2)$

Le groupe  $SU(2)$  est difféomorphe à la sphère  $S^3$ . Pour le voir, il suffit d'écrire un élément  $g$  de  $SU(2)$  comme une matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ , obéissant à la condition  $g^\dagger = g^{-1}$ . Alors,  $\det g^\dagger g = 1$ , c'est à dire

$$\text{Re}^2(\alpha) + \text{Im}^2(\alpha) + \text{Re}^2(\beta) + \text{Im}^2(\beta) = 1$$

On obtient ainsi l'équation cartésienne d'une 3-sphère. On peut donc se représenter visuellement  $SU(2)$  comme une sphère dotée d'une structure multiplicative (non commutative d'ailleurs). Attention, il ne faudrait pas se

laisser abuser par cet exemple : seules les sphères  $S^0 = \mathfrak{Z}_2$ ,  $S^1 = U(1)$  et  $S^3 = SU(2)$  sont des groupes (et  $S^7$  est “presque” un groupe). Ces particularités des dimensions 0, 1, 3, 7 sont liées à l’existence des algèbres de division suivantes : les corps  $\mathfrak{R}$  (les réels),  $\mathfrak{C}$  (les complexes),  $\mathfrak{H}$  (les quaternions) et les octaves de Cayley (octonions)  $\mathcal{O}$ .

Revenons à la sphère  $S^3$  qu’on peut donc identifier avec le groupe de Lie  $SU(2)$ . Posons  $X_i = i/2\sigma_i$ , où les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli (section 2.2.2). On peut paramétriser un point quelconque  $g$  par trois angles d’Euler  $\psi, \theta, \phi$  en écrivant

$$g = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi), \quad 0 < \psi \leq 4\pi, 0 < \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$R_i(x) = \exp(tX_i)$  est une rotation d’angle  $x$  autour de l’axe  $i$ . On considère, dans  $SU(2)$  les courbes obtenues par translation à droite,  $D_i(t) = gR_i(t)$  et nous notons  $X_i^R(g)$  les champs fondamentaux à droite correspondants (les champs invariants à gauche). En terme du repère naturel associé aux coordonnées d’Euler, on obtient le repère mobile :

$$\begin{pmatrix} X_1^R \\ X_2^R \\ X_3^R \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{\sin \phi}{\sin \theta} & -\sin \phi \cot \theta \\ \sin \phi & \frac{-\cos \phi}{\sin \theta} & \cos \phi \cot \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les relations de commutation s’écrivent

$$[X_1^R, X_2^R] = -X_3^R \quad \text{etc}$$

Le corepère mobile correspondant  $\{X^{iR}\}$  (le dual du repère mobile  $\{X_i^R\}$ ) est donné par

$$(X^{1R}, X^{2R}, X^{3R}) = (d\theta, d\psi, d\phi)N^{-1}$$

On peut aussi considérer les courbes  $G_i(t) = R_i(t)g$  obtenues par translation à gauche. L’expression des champs de vecteurs invariants à droite  $X_i^L$  (et des formes correspondantes  $X^{iL}$ ) s’exprime à l’aide des formules précédentes en interchangeant simplement partout les coordonnées  $\phi$  et  $\psi$ . Les relations de commutation s’écrivent alors

$$[X_1^L, X_2^L] = +X_3^L \quad \text{etc}$$

et on vérifie que

$$[X_i^R, X_j^L] = 0$$

### 2.4.7 Une remarque sur les constantes de structure

Soit  $G$  un groupe de Lie et choisissons une base  $X_\alpha$  dans son algèbre de Lie, ensemble que nous identifions, en tant qu'espace vectoriel, avec l'espace tangent  $T(G, e)$ . Les vecteurs  $X_\alpha$  déterminent, comme nous l'avons vu, des champs de vecteurs invariants à gauche  $X_\alpha(\cdot)$ . L'espace de ces champs de vecteurs étant, comme on le sait, de dimension finie et étant lui-même identifiable à l'algèbre de Lie de  $G$ , on peut écrire, en tout point  $P$  de  $G$ ,

$$[X_\alpha(\cdot), X_\beta(\cdot)](P) = f_{\alpha\beta}^\gamma(P)X_\gamma(P)$$

On voit qu'on a ainsi obtenu un repère mobile *global* (les  $\{X_\alpha(P)\}$ ) pour lequel les fonctions de structure sont les  $f_{\alpha\beta}^\gamma(P)$ . En fait, ces  $f_{\alpha\beta}^\gamma(P)$  sont des constantes : elles ne dépendent pas de  $P \in G$ . Ceci résulte du fait que le commutateur de deux champs invariants à gauche est lui-même un champ invariant à gauche.

Rappelons que, pour une variété différentiable quelconque, les fonctions de structure d'un repère mobile dépendent généralement du point où elles sont évaluées ; par contre, on voit ici que, lorsque cette variété est un groupe de Lie et que le repère mobile choisi est un champ de vecteurs invariant à gauche, ces fonctions de structure  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  sont des *constantes de structure* : elles ne dépendent que de la base choisie dans  $T(G, e)$  et non du point  $P$  où elles sont calculées.

En utilisant des champs invariants à droite, on pourrait mener une discussion analogue, c'est à dire, en particulier, associer à toute base  $\{X_\alpha\}$  de  $T(G, e)$  un repère mobile global constitué de champs invariants à droite  $X^L(g) = Xg$  et obtenir des constantes de structure  $g_{\alpha\beta}^\gamma = -f_{\alpha\beta}^\gamma$ .

### 2.4.8 La forme de Maurer-Cartan

- Il existe en fait *deux* formes de Maurer-Cartan : l'une est "gauche" et l'autre est "droite". Tout le monde utilisant des champs invariants à gauche pour définir l'algèbre de Lie, on parle alors de "la" forme de Maurer-Cartan.
- La forme de Maurer-Cartan  $\theta$  est une forme au sens généralisé du mot. En effet, elle est à valeurs, non pas dans le corps des réels (ou des complexes) mais dans une algèbre de Lie. Son rôle est de ramener les champs invariants (à gauche) à l'origine : soit  $X_\alpha(g)$  un champ invariant à gauche, on définit  $\theta_g$  par

$$\boxed{\theta_g(X_\alpha(g)) = X_\alpha(e)}$$

En notant  $\{\theta^\alpha(g)\}$  la base duale, au point  $g$  de  $G$  de la base  $\{X_\alpha(g)\}$  et en notant simplement  $X_\alpha = X_\alpha(e)$ , on voit que

$$\theta_g = \theta^\alpha(g) \otimes X_\alpha \in T^*(G, g) \otimes T(G, e)$$

en effet,

$$\theta_g(X_\beta(g)) = \theta^\alpha(g)(X_\beta(g))X_\alpha = \delta_\beta^\alpha X_\alpha = X_\beta$$

L'application  $\theta_g$  va de  $T(G, g)$  dans  $T(G, e)$ . La forme de Maurer-Cartan elle-même  $\theta = \theta^\alpha(\cdot) \otimes X_\alpha$ , qu'on peut simplement noter  $\theta^\alpha X_\alpha$ , va de  $TG$  dans  $LieG = T(G, e)$ . En résumé,  $\theta \in \Omega^1(G, LieG)$ .

Si  $u \in TG$ , c'est à dire que  $u$  est un vecteur en un certain point  $g$ , on peut, *a priori* décomposer  $u$  sur une base de champs invariants à gauche au point  $g$  :  $u = u^\alpha X_\alpha(g)$ . On sait que  $\theta(u)$  est alors l'élément de l'algèbre de Lie (identifiée ici avec  $T(G, e)$ ) égal à  $\theta(u) = u^\alpha X_\alpha(e) = u^\alpha X_\alpha$ . Puisque  $\theta = \theta^\alpha X_\alpha$ , on définit  $d\theta = d\theta^\alpha X_\alpha$  (rappelons que  $X_\alpha \equiv X_\alpha(e)$ ), mais on sait que, pour un repère mobile quelconque (voir chapitre précédent), on a  $d\theta^\alpha + \frac{1}{2}f_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \theta^\gamma = 0$  où les  $f_{\beta\gamma}^\alpha$  sont les fonctions de structure du repère mobile ; ici les "fonctions de structure" sont les *constantes de structure*. Pour deux formes  $\omega$  et  $\sigma$  à valeurs dans une algèbre de Lie ( $\omega = \omega^\alpha X_\alpha$  et  $\sigma = \sigma^\alpha X_\alpha$ ) on définit le crochet

$$[\omega \wedge \sigma] = [\omega^\alpha X_\alpha \wedge \sigma^\beta X_\beta] = \omega^\alpha \wedge \omega^\beta [X_\alpha, X_\beta] = \omega^\alpha \wedge \sigma^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$$

Ainsi donc l'équation de structure de Maurer-Cartan s'écrit

$$\boxed{d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0}$$

- *Attention aux facteurs 1/2 et aux notations* : la présence du  $[\ , \ ]$  autour du symbole  $\wedge$  est indispensable dans la définition de  $[\omega \wedge \sigma]$  et on voit que le crochet, en ce sens, d'une  $p$ -forme à valeurs dans  $LieG$  avec une  $q$ -forme du même type est une  $(p+q)$ -forme à valeurs dans  $LieG$ . Prenons de nouveau  $\omega$  et  $\sigma$  dans  $\Omega^1(G, LieG)$  et évaluons-les sur des vecteurs  $u$  et  $v$  :  $\omega(u) = \omega^\alpha(u)X_\alpha$ ,  $\sigma(v) = \sigma^\beta(v)X_\beta$ . On peut aussi définir

$$[\omega, \sigma](u, v) = [\omega(u), \sigma(v)]$$

Alors  $[\omega^\alpha(u)X_\alpha, \sigma^\beta(v)X_\beta] = \omega^\alpha(u)\sigma^\beta(v)[X_\alpha, X_\beta] = \omega^\alpha(u)\sigma^\beta(v)f_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ , mais par ailleurs,  $\omega^\alpha \wedge \omega^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma(u, v) = ((\omega^\alpha \otimes \omega^\beta - \omega^\beta \otimes \omega^\alpha)f_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma)(u, v) = 2\omega^\alpha(u)\omega^\beta(v)f_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ . Ainsi  $[\omega \wedge \omega](u, v) = 2[\omega, \omega](u, v)$  et l'équation de Maurer-Cartan peut s'écrire également sous la forme

$$d\theta + [\theta, \theta] = 0$$

On peut utiliser indifféremment le crochet  $[\wedge]$  ou le crochet  $[, ]$  mais ils diffèrent par des facteurs numériques. Par ailleurs, de nombreux auteurs désignent  $[\wedge]$  par  $[, ]!$

- La forme de Maurer-Cartan ci-dessus, définie à l'aide de champs fondamentaux à droite (c'est à dire à l'aide de champs invariants à gauche) est celle qui est le plus utilisée. Il ne faut pas oublier qu'“A travers le miroir” existe une forme analogue, définie à partir des champs invariants à droite. Notons  $\omega$  la forme de Maurer-Cartan “à droite”. Par une méthode analogue à celle qui précède, on montre que  $\omega$  satisfait à l'équation de structure

$$d\omega - \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0$$

## 2.5 Action d'un groupe sur un espace vectoriel : la théorie des représentations

Une *représentation*  $L$  d'un groupe  $G$  dans un espace vectoriel  $E$  (sur le corps  $K$ ) est un cas particulier de la notion d'action. L'espace  $E$  n'étant pas quelconque mais doté d'une structure d'espace vectoriel, on impose à l'action  $L_g$  d'être linéaire. En d'autres termes, à tout élément  $g$  de  $G$ , on associe un automorphisme  $L_g$  de  $E$  (une transformation linéaire bijective de  $E$  sur lui-même). Si  $E$  est de dimension finie  $p$ , moyennant un choix de bases, on peut écrire l'automorphisme  $L_g$  à l'aide d'une matrice inversible  $p \times p$  encore désignée par  $L_g$ . On peut donc définir une représentation  $L$  comme un homomorphisme du groupe  $G$  dans le groupe  $GL(p, K)$ . On dit qu'une représentation est *fidèle* lorsque l'homomorphisme  $L$  ci-dessus est injectif.

La théorie des représentations est un chapitre essentiel de la théorie des groupes et est également d'une importance capitale dans pratiquement toutes les branches de la physique. Les différents aspects de la théorie des représentations ne seront pas étudiés dans cet ouvrage.

## 2.6 Espaces homogènes

Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe. On définit la relation d'équivalence  $g_1 \sim g_2$  si et seulement si  $g_1 \in g_2 H$ . L'ensemble des classes d'équivalence, c'est à dire l'ensemble quotient  $G/\sim$  se note  $G/H$ . On dit que cet ensemble est un espace homogène pour le groupe  $G$ . Le vocable “homogène” vient du fait que les propriétés algébriques de  $G/H$  sont les mêmes en tous ses points puisqu'on peut passer de l'un à l'autre par action de  $G$ .

On démontre, lorsque  $G$  est topologique, que  $H$  doit être fermé pour que le quotient ait une topologie séparée (propriété de Hausdorff). C'est toujours ce que nous supposons.

Lorsque  $G$  est un groupe de Lie et  $H$  un sous groupe de Lie,  $G/H$  est une variété différentiable. Les espaces homogènes fournissent donc une quantité d'exemples intéressants de variétés. Ce sont les variétés les plus "simples" qui soient (les groupes de Lie eux-mêmes étant des cas particuliers d'espaces homogènes). Nous aurons de nombreuses fois l'occasion d'y revenir lors de notre étude des espaces fibrés. Attention, une variété donnée peut parfois s'écrire de diverses façons comme espace homogène de groupes de Lie. En d'autres termes, deux quotients  $G_1/H_1$  et  $G_2/H_2$  peuvent très bien être difféomorphes, même si  $G_1 \neq G_2$  (par exemple  $SU(3)/SU(2)$  et  $SO(6)/SO(5)$  sont tous deux difféomorphes à la sphère  $S^5$ ). Ainsi, deux groupes différents peuvent agir transitivement sur le même espace.

Les résultats concernant la théorie des espaces homogènes (en particulier tout ce qui concerne les espaces symétriques) sont d'un usage constant dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique théorique. Là encore, comme pour la théorie des représentations, que nous n'avons fait que mentionner... nous conseillons vivement au lecteur de se cultiver sur le sujet en consultant les ouvrages appropriés.

## 2.7 Algèbres de Clifford et groupes Spin

### 2.7.1 Définitions générales

Bien connaître la structure des algèbres de Clifford est une chose essentielle, aussi bien pour les géomètres que pour les physiciens des particules, ou plus généralement pour les physiciens théoriciens. Cette section est bien trop courte pour couvrir tous leurs aspects. Nous nous contenterons de donner leur définition, de discuter leur structure générale, et de montrer comment se servir de ces algèbres pour obtenir une description explicite des groupes *Spin*.

L'*algèbre de Clifford* réelle  $C(p, q)$  est l'algèbre associative unitaire engendrée sur  $\Re$  par  $n = p + q$  symboles  $\gamma^\mu$  soumis aux relations  $(\gamma^\mu)^2 = 1$  pour  $\mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $(\gamma^\nu)^2 = -1$  pour  $\nu \in \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ , et

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0$$

quand  $\mu \neq \nu$ .

Il est utile d'introduire une matrice diagonale  $\eta = \text{diag}(1 \dots 1, -1, \dots -1)$  et d'écrire les relations précédentes à l'aide d'un anticommutateur ( $\{, \}$ ) sous la forme  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu, \} = 2\eta^{\mu\nu}$

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathfrak{R}$  muni d'un produit scalaire non dégénérée  $g$  (la métrique), de signature  $(p, q)$ . Soit  $\{e_\mu\}$  une base orthonormée et  $\{e^\mu\}$  la base duale. On a encore une métrique de composantes  $g_{\mu\nu}$  sur le dual. On peut associer, à tout vecteur  $v = v_\mu e^\mu$  du dual, un élément  $Cliff(v) = v_\mu \gamma^\mu$  de l'algèbre de Clifford  $C(p, q)$ . Abus de notations : Nous noterons  $v = Cliff(v)$ . Les physiciens des particules utilisent en général la notation "slash" de Feynmann. De cette façon nous obtenons la relation  $uv + vu = 2g(u, v)$  pour tout couple de vecteurs du dual.

Une base vectorielle de  $C(p, q)$  peut être choisie comme suit :

$$\{1, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho, \dots\}$$

avec  $\mu < \nu < \rho < \dots$ . La dimension (réelle) de  $C(p, q)$  est donc

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots = 2^n$$

L'adjectif *réel* est important : Par exemple, en dimension  $(3, 1)$ , l'élément  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  n'est pas un élément de  $C(p, q)$  mais un élément de l'algèbre complexifiée  $C^\mathfrak{C} = C(p, q) \otimes \mathfrak{C}$ .

L'algèbre  $C(p, q)$  n'est généralement pas isomorphe à  $C(q, p)$ . Il faut se rappeler que  $(p, q) = (p_+, q_-)$ .

Puisque l'algèbre de Clifford  $C = C(p, q)$  et l'algèbre extérieure  $\Lambda(E)$  ont même dimension, ils sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels. La correspondance entre les deux lois d'algèbre est la suivante : pour  $u, v \in E^*$ , on peut directement définir le produit de Clifford  $uv = u \wedge v + g(u, v)$ .

Soit  $C_0$  la partie paire de  $C$ , c'est à dire la sous-algèbre linéairement engendrée par les produits d'un nombre pair de générateurs  $\gamma$ .

Soit

$$\boxed{\epsilon = \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^n}$$

l'*opérateur d'orientation*. On doit choisir un ordre sur les générateurs. La définition de  $\epsilon$  n'est pas ambiguë si on a choisi une orientation de  $E$  (sinon, il n'est défini qu'au signe près).

Soit  $Z$  le centre de  $C$  et  $Z_0$  le centre de  $C_0$ .

### 2.7.2 Le groupe *Spin*

Le groupe des rotations  $O(n)$  possède, comme nous l'avons vu, deux composantes connexes, mais lorsqu'on autorise une signature pseudo-euclidienne  $(p, q)$ , le groupe des rotations correspondant, noté  $L = O(p, q)$  en possède en général quatre.

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow$$

Le signe  $\pm$  fait référence au signe du déterminant (transformations qui changent, ou non, l'orientation totale) et le signe  $\uparrow$  ou  $\downarrow$  fait référence aux transformations qui changent, ou non, l'orientation temporelle. On dit généralement, pour une signature  $(p, q)$ , que la métrique possède  $\min(p, q)$  dimensions de temps et  $\max(p, q)$  dimensions d'espace. On considère les groupes et sous-groupes suivants

$$L = O(p, q), \quad SO(p, q) = L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow, \quad SO^\uparrow(p, q) = L_+^\uparrow$$

Aucune des composantes connexes de  $L$  n'est simplement connexe. Il est donc naturel de considérer, pour chacun des groupes mentionnés leur groupe de recouvrement universel. On note  $Pin$ ,  $Spin$  et  $Spin^\uparrow$  les groupes simplement connexes correspondant à  $O$ ,  $SO$  et  $SO^\uparrow$ .

Le groupe de Clifford  $\Gamma$  est défini comme l'ensemble de tous les éléments  $s$  de l'algèbre de Clifford  $C = C(p, q)$  qui sont inversibles et satisfont à la propriété :

$$\forall x \in E, sxs^{-1} \in E$$

$E$  désigne ici l'espace vectoriel (pseudo) euclidien, de signature  $(p, q)$  auquel l'algèbre  $C$  est associée. Attention, l'algèbre de Clifford, comme toute algèbre associative, est stable par le crochet de Lie défini comme le commutateur,  $C$  est donc aussi une algèbre de Lie *mais* cette algèbre de Lie n'est pas (n'est jamais) l'algèbre de Lie du groupe de Clifford. Il est évident que tout élément inversible de  $E$  appartient au groupe de Clifford (on plonge  $E$  dans  $C$  en associant à  $v = v_\mu e^\mu$  l'élément  $v = v_\mu \gamma^\mu$ ). En effet

$$v xv^{-1} = \frac{1}{v^2} v x v = \frac{1}{v^2} (-v v x + 2g(v, x)) = -x + 2g(v, x)v/v^2$$

La transformation  $x \mapsto v xv^{-1}$  est donc l'opposée de la symétrie par rapport à l'hyperplan conjugué à  $v$ . Plus généralement, pour  $s \in \Gamma$ , la transformation

$$\chi(s) : x \in E \rightarrow sxs^{-1}$$

appartient au groupe orthogonal  $O(p, q)$  en vertu d'une propriété élémentaire connue disant que les groupes de rotations peuvent être engendrés par produit de symétries par rapport à des hyperplans.

L'application  $\chi$  définit manifestement une représentation du groupe de Clifford, mais cette représentation n'est pas fidèle puisque  $s$  et  $3s$ , par exemple, déterminent la même rotation. On va obtenir le groupe  $Spin$  à partir du groupe de Clifford en introduisant une condition de normalisation. Notons tout d'abord avec une "barre", placée au dessus d'un symbole, l'involution principale de  $C$ , définie par  $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$ , c'est à dire

$$\overline{\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^p} = \gamma^p \dots \gamma^2 \gamma^1$$

On voit que

$$s \in \Gamma \rightarrow N(s) = \bar{s}s \in \mathfrak{R}$$

On définit alors

$$Pin = \{s \in \Gamma \text{ tels que } |N(s)| = 1\}$$

$$Spin = Pin \cap C_0$$

$$Spin^\uparrow = \{s \in Spin \text{ tels que } N(s) = 1\}$$

La représentation  $\chi$  du groupe de Clifford est encore une représentation des groupes ci-dessus. Le lecteur pourra se convaincre du fait que

$$\chi(Spin) = L_+ \quad \text{et} \quad \chi(Spin^\uparrow) = L_+^\uparrow$$

Plus précisément, tout élément de  $Pin$  peut s'écrire comme un produit  $u_1 u_2 \dots u_k$  où les  $u_i$  sont des (co)-vecteurs de  $E$  :

$$k \text{ pair et } \bar{s}s > 0 \iff \chi(s) \in L_+^\uparrow$$

$$k \text{ pair et } \bar{s}s < 0 \iff \chi(s) \in L_+^\downarrow$$

$$k \text{ impair et } \bar{s}s > 0 \iff \chi(s) \in L_-^\uparrow$$

$$k \text{ impair et } \bar{s}s < 0 \iff \chi(s) \in L_-^\downarrow$$

Par ailleurs, si  $s \in Spin$ , alors  $-s \in Spin$ , et  $\chi(s) = \chi(-s)$ . En fait  $Ker(\chi) = \{-1, +1\}$  ce qui montre que  $Spin^\uparrow$  recouvre bien  $L_+^\uparrow$  avec un noyau  $\mathfrak{Z}_2$ .

On peut non seulement décrire le groupe  $Spin(p, q)$  comme un sous ensemble de l'algèbre de Clifford  $C(p, q)$  mais aussi l'algèbre de Lie correspondante. Soient  $x, y, z \in E$ , alors  $[xy, z] \in E$ . En effet,  $[xy, z] = xyz - zxy = 2(xg(y, z) - g(x, z)y)$ . En développant l'exponentielle, on obtient ainsi  $exp(txy) z exp(-txy) \in E$ , donc  $exp(txy)$  appartient au groupe de Clifford et  $xy$  appartient à l'algèbre de Lie du groupe de Clifford. On peut aussi, en développant l'exponentielle, montrer que  $exp(s) = exp(\bar{s})$ .

Ces remarques montrent que l'algèbre de Lie du groupe de Clifford est engendrée par 1 et les produits  $xy$  lorsque  $x, y \in E$ . Cette algèbre de Lie est un peu trop "grosse", celle de  $Spin^\uparrow$  est plus intéressante. En effet, soient  $x$  et  $y$  deux (co)-vecteurs, alors

$$\begin{aligned} exp(xy) \in Spin^\uparrow &\iff N(exp(xy)) = 1 \\ &\iff exp(\bar{xy})exp(xy) = 1 \\ &\iff exp(yx + xy) = 1 \iff xy + yx = 0 \\ &\iff g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $z \in C(p, q)$  appartient à  $Lie(Spin^\uparrow)$  si et seulement si il peut être écrit comme une combinaison linéaire de produits  $xy$  où  $x$  et  $y$  sont orthogonaux, c'est à dire par les produits  $\gamma^\mu \gamma^\nu$ . On retrouve bien le fait que  $dim(Lie(Spin(p, q)))|_{n=p+q} = n(n-1)/2$ .

Exemple. Prenons ( $p = 3, q = 1$ ). Le groupe des rotations correspondant est le groupe de Lorentz de la physique relativiste. Soit  $\beta$  un réel quelconque. Alors  $\frac{\beta}{2} \gamma^0 \gamma^1 \in Lie(Spin^\uparrow)$  et  $s = exp(\frac{\beta}{2} \gamma^0 \gamma^1) \in Spin^\uparrow$ . Un calcul facile (développer l'exponentielle) montre alors que

$$s = \cosh \frac{\beta}{2} + \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\beta}{2}$$

et que

$$\begin{aligned} s \gamma^0 s^{-1} &= \gamma^0 \cosh \beta + \gamma^1 \sinh \beta \\ s \gamma^1 s^{-1} &= \gamma^0 \sinh \beta + \gamma^1 \cosh \beta \\ s \gamma^i s^{-1} &= \gamma^i \text{ pour } i = 2, 3 \end{aligned}$$

Notons que  $s$  peut s'écrire aussi

$$s = \gamma^0 (-\gamma^0 \cosh \frac{\beta}{2} + \gamma^1 \sinh \frac{\beta}{2})$$

Ceci montre donc que la transformation de Lorentz  $\chi(s)$  est un "boost" (rotation hyperbolique) le long de l'axe des  $x$ . Plus généralement, si

$$s = exp(\frac{\beta}{2} \gamma^0 (\vec{v} \cdot \vec{\gamma}))$$

$\chi(s)$  désigne un boost de paramètre  $\beta$  le long de la direction  $\vec{v}$  et si

$$s = exp(\frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\gamma})$$

$\chi(s)$  désigne une rotation d'angle  $\theta$  autour de la direction  $\vec{n}$  avec ( $|\vec{n}|^2 = 1$ ).

Notons pour finir que  $Spin(p, q) \subset C_0(p, q) = C_0(q, p)$ , mais que  $C(p, q) \neq C(q, p)$  en général. L'inclusion est évidente au vu de la définition du groupe  $Spin$ . Les égalités (ou inégalités) entre ces ensembles résultent de l'étude générale qui suit.

### 2.7.3 Structure des algèbres de Clifford réelles

Pour voir si  $C$  ou  $C_0$  sont des algèbres simples, il faut voir si on peut, ou non, fabriquer un projecteur non trivial  $P$  ( $P^2 = P$ ) qui commute avec  $C$  (ou  $C_0$ ). Un tel projecteur peut, dans certains cas, se fabriquer à l'aide de  $\epsilon$ .

La discussion est très différente suivant que la dimension  $n$  est paire ou impaire ( $\epsilon$  appartiendra, suivant les cas, au centre de  $C$ , ou seulement au centre de  $C_0$ ).

**Cas  $n = p + q$  pair**

Dans ce cas, l'opérateur d'orientation  $\epsilon$  commute avec les éléments pairs de  $C$  mais anticommute avec les éléments impairs (démonstration immédiate en utilisant les relations de commutation des générateurs  $\gamma^\mu$ ). Le centre de  $C_0$  est en fait engendré, dans ce cas par 1 et par  $\epsilon$ .

La discussion dépend alors du carré de  $\epsilon$ . Si  $\epsilon^2 = 1$  on peut fabriquer deux projecteurs  $P_R = \frac{1+\epsilon}{2}$  et  $P_L = \frac{1-\epsilon}{2}$  permettant de "couper" la sous-algèbre  $C_0$  en deux composantes simples (on voit immédiatement que  $P_L^2 = P_L$  et  $P_R^2 = P_R$ ).

La discussion peut se résumer comme suit :

$C$  est une algèbre simple pour  $n$  pair.

$$\begin{aligned} C_0 \text{ est simple} &\Leftrightarrow \epsilon^2 = -1 \Leftrightarrow p - q = 2 \pmod{4} \Leftrightarrow Z_0 \sim \mathfrak{C} \\ C_0 \text{ n'est pas simple} &\Leftrightarrow \epsilon^2 = +1 \Leftrightarrow p - q = 0 \pmod{4} \Leftrightarrow Z_0 \sim \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R} \\ &\text{dans ce dernier cas } C_0 = P_L C_0 \oplus P_R C_0 \end{aligned}$$

Remarque : dans le cas de l'algèbre de Dirac (nom donné à l'algèbre de Clifford dans le cas  $(p = 3, q = 1)$ ),  $\epsilon^2 = -1$ . La sous algèbre paire  $C_0$  est simple. Pour pouvoir la casser en deux, il faut introduire le nombre complexe  $i$  et fabriquer un projecteur  $(1 \pm \gamma_5)/2$  à l'aide de  $\gamma_5 = i\epsilon$ , mais... cela ne peut évidemment se faire qu'en autorisant des coefficients complexes, c'est à dire en complexifiant l'algèbre  $C$ .

**Cas  $n = p + q$  impair**

Dans ce cas, l'opérateur d'orientation  $\epsilon$  commute avec les éléments impairs de  $C$  et commute aussi avec les éléments pairs (démonstration immédiate en utilisant les relations de commutation des générateurs  $\gamma^\mu$ ). Le centre de  $C$  est en fait engendré, dans ce cas par 1 et par  $\epsilon$ .

La discussion dépend encore alors, comme précédemment du carré de  $\epsilon$ . Si  $\epsilon^2 = 1$  on peut fabriquer deux projecteurs  $\frac{1+\epsilon}{2}$  et  $\frac{1-\epsilon}{2}$  permettant de "couper" l'algèbre de Clifford  $C$  en deux composantes simples.

La discussion peut se résumer comme suit :

$C_0$  est une algèbre simple.

$$\begin{aligned} C \text{ est simple} &\Leftrightarrow \epsilon^2 = -1 \Leftrightarrow p - q = 3 \pmod{4} \Leftrightarrow Z \sim \mathfrak{C} \\ C \text{ n'est pas simple} &\Leftrightarrow \epsilon^2 = +1 \Leftrightarrow p - q = 1 \pmod{4} \Leftrightarrow Z \sim \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R} \\ &\text{dans ce dernier cas } C = \frac{1-\epsilon}{2}C \oplus \frac{1+\epsilon}{2}C \end{aligned}$$

De plus,  $C = C_0 \oplus C_0\epsilon$ .

**Structure des algèbres de Clifford réelles et périodicité modulo 8**

La discussion qui précède pourrait laisser croire que la structure des algèbres de Clifford sur  $\mathfrak{R}$  dépend de  $(p - q)$  modulo 4. En fait une analyse plus fine montre qu'elle dépend de  $(p - q)$  modulo 8. L'idée est la suivante : on commence par étudier explicitement la structure de quelques algèbres de Clifford de basse dimension, puis on construit les autres par produits tensoriels.

**Un théorème de réduction dimensionnelle** Soit  $F$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $g$  et  $E \subset F$  un sous espace vectoriel de dimension paire tel que la restriction de  $g$  à  $E$  ne soit pas singulière. Soit  $E^\perp$  le complément orthogonal de  $E$  dans  $F$ . Alors

$$C(F, g) = C(E, g_E) \otimes C(E^\perp, \epsilon_E^2 g_{E^\perp})$$

où  $\epsilon_E$  est l'opérateur d'orientation de  $E$ . La démonstration est immédiate et s'appuie sur les relations suivantes. Soient  $\gamma^\mu$  les générateurs associés à  $(E, g_E)$  et  $\gamma^\alpha$  les générateurs associés à  $E^\perp$ . On fabrique alors les générateurs  $\Gamma^\alpha = \epsilon \otimes \gamma^\alpha$  et  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1$ . On vérifie que les générateurs  $\Gamma$  vérifient bien les relations de définitions pour  $C(F, g)$ .

Ce théorème permet d'obtenir immédiatement les résultats suivants : Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 2. Soit  $\epsilon = \gamma^1 \gamma^2$  son opérateur d'orientation.

- Si la signature est  $(2, 0)$  alors  $\epsilon^2 = -1$  et  $C(2, 0) \otimes C(p, q) = C(q + 2, p)$
- Si la signature est  $(0, 2)$  alors  $\epsilon^2 = -1$  et  $C(0, 2) \otimes C(p, q) = C(q, p + 2)$
- Si la signature est  $(1, 1)$  alors  $\epsilon^2 = +1$  et  $C(1, 1) \otimes C(p, q) = C(p + 1, p + 1)$

**Algèbres de Clifford de basse dimension** En regardant les relations de commutation des générateurs  $\gamma^\mu$  en basse dimension, on voit facilement que

$$C(1, 0) = \mathfrak{C}, C(0, 1) = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}, C(2, 0) = M(2, \mathfrak{R})$$

$$C(1, 1) = M(2, \mathfrak{R}) \text{ et } C(0, 2) = \mathfrak{H}$$

Dans ce dernier cas, on rappelle que les éléments du corps non commutatif des quaternions peuvent s'écrire  $\begin{pmatrix} a - id & ib + c \\ ib - c & a + id \end{pmatrix}$

**Produit tensoriel des algèbres  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{H}$**  On utilise ensuite les isomorphismes suivants (seuls ceux mettant en jeu les quaternions ne

sont pas évidents et on peut s'assurer du résultat en représentant les quaternions par des matrices  $2 \times 2$  complexes du type précédent et en effectuant des produits tensoriels de matrices).

$$\begin{aligned} M(n, \mathfrak{R}) \otimes M(m, \mathfrak{R}) &= M(nm, \mathfrak{R}) & \mathfrak{C} \otimes \mathfrak{C} &= \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C} \\ M(n, \mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{C} &= M(n, \mathfrak{C}) & \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{C} &= M(2, \mathfrak{C}) \\ M(n, \mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{H} &= M(n, \mathfrak{H}) & \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} &= M(4, \mathfrak{R}) \end{aligned}$$

**Le théorème de périodicité** Les résultats précédents impliquent immédiatement :

$$\begin{aligned} C(n+8, 0) &= C(2, 0) \otimes C(0, n+6) \\ &= C(2, 0) \otimes C(0, 2) \otimes C(n+4, 4) \\ &= C(2, 0) \otimes C(0, 2) \otimes C(2, 0) \otimes C(0, n+2) \\ &= C(2, 0) \otimes C(0, 2) \otimes C(2, 0) \otimes C(0, 2) \otimes C(n, 0) \\ &= M(2, \mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{H} \otimes M(2, \mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{H} \otimes C(n, 0) \\ &= M(4, \mathfrak{R}) \otimes M(4, \mathfrak{R}) \otimes C(n, 0) \\ &= M(16, \mathfrak{R}) \otimes C(n, 0) \end{aligned}$$

Le résultat final montre que l'algèbre  $C(n+8, 0)$  est de même type que  $C(n, 0)$ , les dimensions sont, bien sûr, différentes (il faut tensorialiser par les matrices réelles  $16 \times 16$ ) mais la structure est la même. De la même façon, nous obtenons (supposons  $q < p$ ) :

$$\begin{aligned} C(p, q) &= C(1, 1) \otimes C(p-1, q-1) \\ &= C(1, 1) \otimes C(1, 1) \otimes \dots \otimes C(p-q, 0) \\ &= M(2^q, \mathfrak{R}) \otimes C(p-q, 0) \end{aligned}$$

Les deux résultats

$$C(n+8, 0) = M(16, \mathfrak{R}) \otimes C(n, 0)$$

et

$$C(p, q) = M(2^q, \mathfrak{R}) \otimes C(p-q, 0)$$

montre qu'il suffit d'étudier le cas purement euclidien et que la classification ne dépend que de  $(p-q)$  modulo 8.

**La classification des  $C(p, q)$ .** Il suffit d'étudier la structure des huit premiers  $C(n, 0)$ . Cela se fait sans difficulté en utilisant les résultats rappelés plus haut sur les produits tensoriels de matrices dans les corps  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{H}$ . Par exemple,

$$\begin{aligned} C(5, 0) &= C(2, 0) \otimes C(0, 3) = C(2, 0) \otimes C(0, 2) \otimes C(1, 0) \\ &= M(2, \mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{H} \otimes (\mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}) = M(2, \mathfrak{H}) \oplus M(2, \mathfrak{H}) \end{aligned}$$

Les théorèmes de périodicité montrent alors que

$$C(p, q) = M(2^{\frac{n-1}{2}-1}) \oplus M(2^{\frac{n-1}{2}-1}) \text{ lorsque } p - q = 5 \pmod 8$$

On peut résumer tous les résultats dans la table suivante ( $n = p + q$ ).

$p - q \pmod 8$	0	1	2	3
$C(p, q)$	$M(2^{n/2}, \mathfrak{R})$	$M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathfrak{R}) \oplus M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathfrak{R})$	$M(2^{n/2}, \mathfrak{R})$	$M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathfrak{C})$
$p - q \pmod 8$	4	5	6	7
$C(p, q)$	$M(2^{\frac{n}{2}-1}, \mathfrak{H})$	$M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathfrak{H}) \oplus M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathfrak{H})$	$M(2^{\frac{n}{2}-1}, \mathfrak{H})$	$M(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathfrak{C})$

Le lecteur pourra faire usage des deux tables suivantes (qui se déduisent de la précédente) où on étudie explicitement le cas particulier d'une signature euclidienne  $(n, 0)$  ou  $(0, n)$  et d'une signature hyperbolique  $(n-1, 1)$  ou  $(1, n-1)$ , pour les huit cas  $n = 4 \dots 11$ .

Cas euclidien (de  $n = 4$  à  $n = 11$ ).

Pour réduire la taille de la table, on a noté  $M(d, K)$  sous la forme  $(d, K)$ .

$n$	$C^e$	$C(n, 0)$	$C(0, n)$	$C_0(n, 0)$	$\theta$
4	$(4, \mathfrak{C})$	$(2, \mathfrak{H})$	$(2, \mathfrak{H})$	$\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$	$\epsilon$
5	$(4, \mathfrak{C}) \oplus (4, \mathfrak{C})$	$(2, \mathfrak{H}) \oplus (2, \mathfrak{H})$	$(4, \mathfrak{C})$	$(2, \mathfrak{H})$	
6	$(8, \mathfrak{C})$	$(4, \mathfrak{H})$	$(8, \mathfrak{R})$	$(4, \mathfrak{C})$	$i\epsilon$
7	$(8, \mathfrak{C}) \oplus (8, \mathfrak{C})$	$(8, \mathfrak{C})$	$(8, \mathfrak{R}) \oplus (8, \mathfrak{R})$	$(8, \mathfrak{R})$	
8	$(16, \mathfrak{C})$	$(16, \mathfrak{R})$	$(16, \mathfrak{R})$	$(8, \mathfrak{R}) \oplus (8, \mathfrak{R})$	$\epsilon$
9	$(16, \mathfrak{C}) \oplus (16, \mathfrak{C})$	$(16, \mathfrak{R}) \oplus (16, \mathfrak{R})$	$(16, \mathfrak{C})$	$(16, \mathfrak{R})$	
10	$(32, \mathfrak{C})$	$(32, \mathfrak{R})$	$(16, \mathfrak{H})$	$(16, \mathfrak{C})$	$i\epsilon$
11	$(32, \mathfrak{C}) \oplus (32, \mathfrak{C})$	$(32, \mathfrak{C})$	$(16, \mathfrak{H}) \oplus (16, \mathfrak{H})$	$(16, \mathfrak{H})$	

Cas hyperbolique (de  $n = 4$  à  $n = 11$ ).

Pour réduire la taille de la table, on a noté  $M(d, K)$  sous la forme  $(d, K)$ .

$n$	$C^e$	$C(n-1, 1)$	$C(1, n-1)$	$C_0(n-1, 1)$	$\theta$
4	$(4, \mathfrak{C})$	$(4, \mathfrak{R})$	$(2, \mathfrak{H})$	$(2, \mathfrak{C})$	$i\epsilon$
5	$(4, \mathfrak{C}) \oplus (4, \mathfrak{C})$	$(4, \mathfrak{C})$	$(2, \mathfrak{H}) \oplus (2, \mathfrak{H})$	$(2, \mathfrak{H})$	
6	$(8, \mathfrak{C})$	$(4, \mathfrak{H})$	$(4, \mathfrak{H})$	$(2, \mathfrak{H}) \oplus (2, \mathfrak{H})$	$\epsilon$
7	$(8, \mathfrak{C}) \oplus (8, \mathfrak{C})$	$(4, \mathfrak{H}) \oplus (4, \mathfrak{H})$	$(8, \mathfrak{C})$	$(4, \mathfrak{H})$	
8	$(16, \mathfrak{C})$	$(8, \mathfrak{H})$	$(16, \mathfrak{R})$	$(8, \mathfrak{C})$	$i\epsilon$
9	$(16, \mathfrak{C}) \oplus (16, \mathfrak{C})$	$(16, \mathfrak{C})$	$(16, \mathfrak{R}) \oplus (16, \mathfrak{R})$	$(16, \mathfrak{R})$	
10	$(32, \mathfrak{C})$	$(32, \mathfrak{R})$	$(32, \mathfrak{R})$	$(16, \mathfrak{R}) \oplus (16, \mathfrak{R})$	$\epsilon$
11	$(32, \mathfrak{C}) \oplus (32, \mathfrak{C})$	$(32, \mathfrak{R}) \oplus (32, \mathfrak{R})$	$(32, \mathfrak{C})$	$(32, \mathfrak{R})$	

Remarque : en observant ces tables, on voit que

$$C(0, n) \neq C(n-1, 1) \text{ mais } C(n, 0) = C(1, n-1)$$

On voit aussi que

$$C_0(n, 0) = C_0(0, n) = C(0, n-1)$$

et que

$$C_0(n-1, 1) = C_0(1, n-1) = C(1, n-2)$$

Ces dernières égalités constituent un cas particulier de la relation générale (conséquence directe des relations de périodicité) :

$$C_0(p, q) = C(p, q-1) = C(q, p-1) = C_0(q, p)$$

On sait que le groupe  $Spin(p, q)$  est inclus dans la sous-algèbre de Clifford paire  $C_0(p, q)$ . Les tables ci-dessus permettent donc aussi de trouver les inclusions de  $Spin(p, q)$  dans les groupes  $SL(n, K)$  où  $K = \mathfrak{R}, \mathfrak{C}, \mathfrak{H}$ . Dans les cas de plus basse dimension, les inclusions peuvent être des égalités. Par exemple  $Spin(5) = SL(2, \mathfrak{H})$ ,  $Spin(10) \subset SL(16, \mathfrak{C})$ ,  $Spin(6, 1) \subset SL(4, \mathfrak{H})$  etc.

#### 2.7.4 La structure des algèbres de Clifford complexes

Si on complexifie l'algèbre de Clifford réelle  $C$ , c'est à dire si on autorise les scalaires de l'algèbre à appartenir au corps des nombres complexes, on peut alors toujours fabriquer, à l'aide de  $\epsilon$ , un opérateur de carré un. Cet opérateur est appelé *opérateur de chiralité* et noté traditionnellement  $\gamma_5$ . Si  $\epsilon$  est déjà de carré égal à 1, il n'y a plus rien à faire et on pose simplement  $\gamma_5 = \epsilon$ . Sinon, on le multiplie par  $i$  et on pose  $\gamma_5 = i\epsilon$ . A l'aide de cet opérateur de carré 1 on peut alors toujours fabriquer 2 projecteurs  $\frac{1 \pm \gamma_5}{2}$  à l'aide desquels on pourra décomposer  $C_0^{\mathfrak{C}}$  en deux composantes simples lorsque  $n$  est pair et  $C^{\mathfrak{C}}$  en deux composantes simples lorsque  $n$  est impair. La discussion se résume par :

$$\begin{array}{ll} \text{n pair} & C^{\mathfrak{C}} \text{ est simple} \\ & C_0^{\mathfrak{C}} = \frac{1 - \gamma_5}{2} C_0^{\mathfrak{C}} \oplus \frac{1 + \gamma_5}{2} C_0^{\mathfrak{C}} \text{ n'est pas simple} \\ \text{n impair} & C_0^{\mathfrak{C}} \text{ est simple} \\ & C^{\mathfrak{C}} = \frac{1 - \gamma_5}{2} C^{\mathfrak{C}} \oplus \frac{1 + \gamma_5}{2} C^{\mathfrak{C}} \text{ n'est pas simple} \end{array}$$

Remarque : Lorsque  $n$  est impair, on dit parfois que  $\gamma_5$  n'existe pas... Il faut préciser ce qu'on entend par là : l'opérateur que nous venons de définir et de noter  $\gamma_5$  existe dans tous les cas. Cela dit, dans le cas impair, il ne peut pas servir à décomposer  $C_0^{\mathbb{C}}$  en deux, précisément parce que, dans ce cas  $C_0^{\mathbb{C}}$  est simple ! En d'autres termes, lorsque  $n$  est impair, on ne peut pas écrire un spineur de Dirac comme somme de deux spineurs de Weyl (terminologie précisée un peu plus bas).

### 2.7.5 Type des représentations

On dit qu'une représentation d'une  $K$ -algèbre associative  $A$  sur le  $K$ -espace vectoriel  $V$  est de *type*  $F$  si l'ensemble des automorphismes de  $V$  qui commutent avec l'action de  $A$  est égal à  $F$ . On démontre que  $F = GL_A(V)$  est un corps et que  $K$  est un sous-corps de  $F$ . Lorsque la représentation est irréductible et  $K = \mathfrak{R}$ , les seules possibilités pour  $F$  sont  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathfrak{H}$ . Les tables qui précèdent illustrent ce phénomène. En effet, lorsqu'on écrit, par exemple  $C(1,3) = M(2,\mathfrak{H})$ , c'est qu'il existe, entre ces deux objets, un isomorphisme d'algèbre associative réelle. En d'autres termes, il existe une représentation fidèle  $\rho$  de la  $\mathfrak{R}$ -algèbre  $C(1,3)$  sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{H}^2$  considéré comme espace vectoriel réel de dimension 8. Les générateurs  $\gamma^\mu$  sont alors représentés par des matrices  $2 \times 2$  notées  $\rho(\gamma^\mu)$  à coefficients dans  $\mathfrak{H}$ . Il est évident que si  $\psi \in \mathfrak{H}^2$  et si  $k \in \mathfrak{H}$ , alors  $(\rho(\gamma^\mu)\psi)k = \rho(\gamma^\mu)(\psi k)$ , ce qui montre que le commutant de la représentation  $\rho$  est bien égal à  $\mathfrak{H}$  :  $\rho$  est de type  $\mathfrak{H}$ . Bien entendu, si on se donne explicitement la représentation  $\rho$  par la donnée de matrices  $\rho(\gamma^\mu)$ , on peut fabriquer une infinité de représentations équivalentes en changeant simplement de base. Attention, l'algèbre de Clifford  $C(p,q)$  est définie par des générateurs  $\gamma^\mu$  particuliers obéissant aux relations de Clifford, alors que ce n'est pas le cas *a priori* pour une algèbre de matrices donnée. Il est bon de garder à l'esprit la distinction entre ces algèbres de Clifford "abstraites" et les algèbres de matrices qui les représentent fidèlement, algèbres qui sont données par les tables précédentes. On parlera cependant abusivement du type de l'algèbre  $C(p,q)$ .

Dans le cas  $n$  pair, on voit, en consultant la table, que le type est toujours, soit réel, soit quaternionique.

Dans le cas  $n$  impair, les trois types peuvent exister mais on peut noter que si  $C(p,q)$  est de type complexe, alors  $C(q,p)$  est de type réel ou de type quaternionique (on n'a jamais deux types complexes en même temps pour des signatures opposées).

On peut aussi changer de point de vue et partir d'une représentation com-

plexe de l'algèbre de Clifford  $C(n)^{\mathfrak{C}}$  avec  $n = p + q$ . On veut alors retrouver les représentations des formes réelles  $C(p, q)$  à partir de celle(s) de  $C^{\mathfrak{C}}$  (cette dernière est d'ailleurs unique, à équivalence près, dans le cas pair, puisque l'algèbre est simple). De façon générale, à une forme réelle correspond une involution (une "étoile")  $*$  qui doit satisfaire aux relations  $*(ab) = *(b) * (a)$  et  $** = 1$ . Les éléments "réels" sont ceux qui sont hermitiens pour cette involution, c'est à dire, qui sont tels que  $*a = a$ . Ainsi, par exemple  $M(2, \mathfrak{H})$  est l'ensemble des éléments hermitiens de  $M(4, \mathfrak{C})$  pour une étoile particulière.

Au niveau de l'espace vectoriel support d'une représentation de l'algèbre complexifiée, l'existence des trois types de représentations est liée à l'existence, ou non, d'un opérateur  $c$ , appelé (en physique surtout) un *opérateur de conjugaison de charge*, qui est défini comme un opérateur antilinéaire de carré  $\pm 1$ , commutant avec les générateurs  $\gamma^\mu$  de  $C^{\mathfrak{C}}$ . En d'autres termes  $c$  doit être un  $C^{\mathfrak{C}}$ -isomorphisme de l'espace vectoriel complexe  $E_{Dirac}$  sur l'espace vectoriel conjugué  $\bar{E}_{Dirac}$  (le même espace vectoriel muni de la loi externe conjuguée). Il existe trois cas : Premier cas :  $c$  existe et  $c^2 = -1$ . Dans ce cas le type est quaternionique. L'opérateur  $c$  (qui n'est pas unique) correspond à la conjugaison complexe dans le commutant, suivie de la multiplication par un des trois générateurs quaternioniques. Deuxième cas : il n'existe pas de conjugaison de carré  $-1$  mais il existe une conjugaison  $c$  de carré 1. Dans ce cas, le type est réel et  $c$  correspond à la conjugaison complexe du commutant. Troisième cas : lorsqu'il n'existe pas de conjugaison, le type est complexe.

## 2.7.6 Spineurs

**Spineurs de Dirac** Les spineurs de Dirac sont les éléments d'un espace vectoriel complexe  $E_{Dirac}$  sur lequel est représenté, de façon irréductible, l'algèbre de Clifford complexifiée  $C^{\mathfrak{C}} = C(p, q)^{\mathfrak{C}}$ .

Si  $n = p + q$  est pair, il n'existe qu'une seule représentation de Dirac, puisque  $C^{\mathfrak{C}}$  est simple.

Si  $n$  est impair, nous en avons deux, puisque  $C^{\mathfrak{C}}$  est somme de deux algèbres simples, mais ces deux représentations ne sont pas fidèles (la somme des deux l'est).

Dans tous les cas,  $E_{Dirac} = \mathfrak{C}^f$  où  $f = 2^{[n/2]}$ ,  $[n/2]$  désignant la partie entière de  $n/2$ . Ceci résulte immédiatement du fait que  $\dim C = 2^n$ .

**Spineurs de Weyl** Si  $n$  est pair, la restriction de la représentation de Dirac à la sous algèbre paire  $C_0^{\mathfrak{C}}$  devient réductible :  $E_{Dirac} = E_{Weyl}^L \oplus E_{Weyl}^R$ . Les spineurs de Weyl gauche et droit sont définis par

$$E_{Weyl}^L = \{ \psi \in E_{Dirac} \mid (\frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \psi \Leftrightarrow \gamma_5 \psi = -\psi) \}$$

$$E_{Weyl}^R = \{\psi \in E_{Dirac} \mid (\frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \psi \Leftrightarrow \gamma_5\psi = \psi)\}$$

On peut donc toujours décomposer  $\psi \in E_{Dirac}$  :  $\psi = \psi_L + \psi_R$  avec  $\psi_L = (\frac{1-\gamma_5}{2})\psi$  et  $\psi_R = (\frac{1+\gamma_5}{2})\psi$ .

Si  $n$  est impair, la restriction de la représentation de Dirac à la sous algèbre  $C_0^{\mathbb{C}}$  reste irréductible puisque  $C_0^{\mathbb{C}}$  est simple. L'opérateur  $\gamma_5$  ne permet pas de décomposer un spineur de Dirac (on a déjà  $\gamma_5\psi = \pm 1$ ). Rappelons que  $Pin(p, q)$  et  $Spin(p, q)$  (le recouvrement de  $SO(p, q)$ ) sont respectivement obtenus comme sous-ensembles des algèbres  $C(p, q)$  et  $C_0(p, q)$ . Les spineurs de Dirac et de Weyl fournissent également des représentations irréductibles des groupes correspondants.

**Spineurs de Majorana** Etant donné une dimension  $n$  et un couple d'entiers  $(p, q)$  avec  $n = p + q$ , on dit qu'il existe des *spineurs de Majorana* si l'une des deux algèbres  $C(p, q)$  ou  $C(q, p)$  est de type réel.

L'existence de spineurs de Majorana se lit sur les tables précédentes : Dans le cas  $n$  pair, on a des spineurs de Majorana lorsque la signature  $(p, q)$  est telle que  $p - q = 0, 2$  ou  $6$  modulo 8. Exemple : En dimension 4, lorsque la signature est proprement euclidienne, on n'a pas de spineurs de Majorana. Par contre, toujours avec  $n = 4$ , on a des spineurs de Majorana, aussi bien lorsque la signature est hyperbolique (un seul temps) que dans le cas neutre (cas  $(2, 2)$ ).

Dans le cas impair, on a des spineurs de Majorana lorsque  $p - q = 1$  ou  $7$  modulo 8. Ces représentations (cas impair) ne sont pas fidèles.

Soit  $E_{Dirac}$  l'espace des spineurs de Dirac. Dans le cas  $n$  pair, il n'y a pas d'ambiguïté. Dans le cas impair, on peut supposer  $\epsilon^2 = 1$  (si ce n'est pas le cas, on remplace  $C(p, q)$  par  $C(q, p)$ ). Avec cette dernière hypothèse, on peut toujours trouver un opérateur antilinéaire  $c$ . Lorsque  $c^2 = 1$ , on définit l'espace vectoriel des spineurs de Majorana par

$$E_{Majorana} = \{\psi \in E_{Dirac} \mid c\psi = \psi\}$$

Il est bien évident qu'un opérateur pour lequel  $c^2 = -1$  ne peut pas avoir de vecteurs propres non nuls ( $c\psi = \psi$  implique  $c^2\psi = -\psi = \psi$ ).

**Spineurs de Weyl-Majorana** Dans le cas où  $n$  est pair et où on peut donc parler de spineurs de Weyl, on peut se demander si les deux conditions de Weyl et de Majorana peuvent être compatibles : peut-on avoir des spineurs qui sont à la fois réels et (par exemple) de chiralité gauche ? Pour cela il faut que  $\gamma_5$  et  $c$  commutent. Sachant que  $c$  est un opérateur antilinéaire, il est évident que  $c$  et  $\gamma_5$  commutent lorsque  $\gamma_5 = \epsilon$  mais anti-commutent lorsque  $\gamma_5 = i\epsilon$ .

Lorsque  $(p - q) = 0$  modulo 8,  $\gamma_5 c = c \gamma_5$ , on peut donc définir les spineurs de Weyl-Majorana de chiralités gauche et droite :

$$E_{Majorana}^L = \{\psi \in E_{Weyl}^L \mid c\psi = \psi\}$$

$$E_{Majorana}^R = \{\psi \in E_{Weyl}^R \mid c\psi = \psi\}$$

On peut alors décomposer un spineur de Majorana quelconque en une partie droite et une partie gauche :  $E_{Majorana} = E_{Majorana}^L \oplus E_{Majorana}^R$ . Cela se produit donc, avec une signature proprement euclidienne, lorsque  $n = 8, 16, 24 \dots$  et, avec une signature hyperbolique, lorsque  $n = 2, 10, 18 \dots$

Lorsque cette décomposition est impossible, c'est à dire lorsque  $\gamma_5 c = -c \gamma_5$ , il faut noter que si  $\psi \in E_{Weyl}^L$ , alors  $c(\psi) \in E_{Weyl}^R$

**Remarques** Il existe de nombreuses façons d'écrire les générateurs  $\gamma^\mu$  de  $C(p, q)$  sous forme matricielle. En général il n'est pas indispensable d'effectuer un choix quelconque pour faire des calculs : la manipulation formelle des générateurs suffit. Si on tient absolument à utiliser des matrices, il faut noter que l'expression de l'opérateur  $c$ , lorsque ce dernier existe, dépend elle aussi de la représentation choisie. Cet opérateur, étant antilinéaire, s'écrira toujours comme la composée de la conjugaison complexe, dont la définition dépend de la représentation, et d'une matrice généralement notée  $C$ , dont l'expression dépend aussi de la représentation choisie.

En physique des particules, les spineurs décrivent les particules élémentaires fermioniques les plus "fondamentales" : celles de spin 1/2. Les spineurs de Dirac décrivent les particules chargées (type électron). L'opérateur de conjugaison de charge associe, à toute particule décrite par le spineur  $\psi$ , une autre particule (l'anti-particule de la première) décrite par le spineur  $c(\psi)$ . Dans le cadre du modèle standard des interactions électrofaibles, les neutrinos sont décrits par des spineurs de Weyl de chiralité gauche (et les anti-neutrinos, bien évidemment, par des spineurs de Weyl de chiralité droite). La nature n'est pas invariante par parité : les neutrinos droits ne semblent pas exister (et, même s'ils existent, ils ont des propriétés très différentes de leurs homologues gauches). Rappelons qu'il n'existe pas de spineurs de Weyl-Majorana en dimension 4 lorsque la signature est euclidienne ou hyperbolique. Il faudrait utiliser une signature  $(2, 2) \dots$  ! Par ailleurs, bien que les spineurs de Majorana soient mathématiquement disponibles en dimension  $(3, 1)$ , ils n'entrent pas dans la formulation du modèle standard décrivant les particules fondamentales connues.

# Chapitre 3

## Espaces Fibrés

### 3.1 Généralités

#### 3.1.1 Le langage des fibrés

Avant d'introduire la notion d'espace fibré, nous allons montrer comment "le langage des fibrés" permet d'analyser de manière originale un aspect bien connu de la théorie des ensembles, à savoir la notion d'application d'un ensemble dans un autre, tout en y apportant un nouvel éclairage.

Soit  $\pi$  une application quelconque de  $P$  (espace de départ) dans  $M$  (espace d'arrivée). L'application  $\pi$  n'ayant aucune raison d'être injective, notons  $F_x = \pi^{-1}(x)$  l'ensemble des antécédents de  $x \in M$  par  $\pi$ . Lorsque  $x$  décrit  $M$ , les ensembles  $F_x$  sont, bien entendu, distincts, puisque  $\pi$  est une application (il n'en serait pas nécessairement ainsi dans le cas où  $\pi$  serait une simple correspondance). En général aussi, la cardinalité de  $F_x$ , ou même sa structure topologique peut varier avec  $x$ .

Utiliser "le langage des fibrés" consiste à effectuer le changement de vocabulaire suivant :

Espace de départ $P$	$\longrightarrow$	Espace total $P$
Espace d'arrivée $M$	$\longrightarrow$	Base $M$
Application $\pi$	$\longrightarrow$	Projection $\pi$
Ensemble $F_x$ des antécédents de $x$	$\longrightarrow$	Fibre $F_x$ au dessus de $x$

et schématiser la situation par le dessin 3.1.

On peut toujours supposer  $\pi$  surjective, au besoin en dégonflant l'espace d'arrivée  $M$ , mais  $\pi$  ne sera pas, en général, injective (en d'autres termes,  $\text{card}(F_x)$  est, en général, plus grand que 1). Choisissons donc, pour chaque  $x$  de  $M$ , un certain antécédent, c'est à dire un élément de  $F_x$ . Nous noterons  $\sigma(x)$  l'antécédent choisi. Par construction,  $\sigma$  est une application de  $M$  dans  $P$  telle que  $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}$ , où le  $\mathbb{1}$  du membre de droite désigne l'application identique

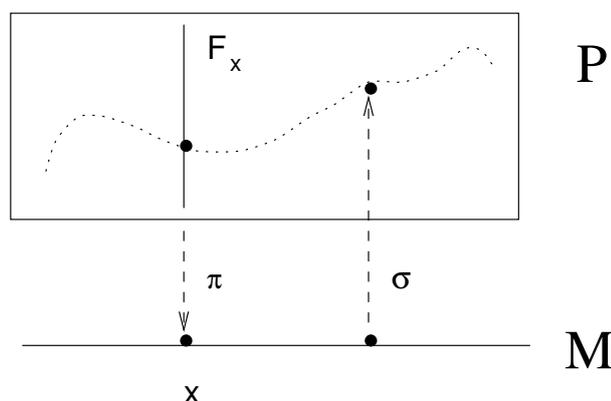


FIGURE 3.1 – Un espace fibré

de  $M$ . Une telle application  $\sigma$  est, par définition, une *section* de l'application  $P \xrightarrow{\pi} M$ . Le mot “section” vient du fait qu'intuitivement, on définit  $\sigma$  en découpant avec des ciseaux la figure 3.1 le long du pointillé. Le fait que  $\pi$  ne soit pas injective montre qu'il existe généralement de nombreuses sections  $\sigma$  différentes (notons que nous n'avons, pour le moment, rien imposé sur l'application  $\sigma$ ). Chacune de ces sections définit donc un inverse (à droite) pour l'application  $\pi$ ; encore une fois, il nous faut insister sur le fait qu'il existe en général plusieurs sections et que le choix d'une telle section résulte ... d'un choix! Lorsque  $M$  est muni d'une topologie, le choix d'une section au dessus d'un ouvert  $U \subset M$  est désigné sous le nom de “choix d'une *section locale* pour l'application  $\pi$ ”.

Le vocabulaire précédent est tellement général qu'il est utilisable pour des applications entre ensembles quelconques. Le lecteur pourra donc s'amuser à “repenser”, en ces termes, certaines de ses applications favorites.

Considérons, à titre d'exemple, l'application suivante qui, à tout point de la sphère unité, associe sa projection sur l'axe  $Oz$  :

**Espace de départ** (espace total)  $P$  : la sphère  $S^2$  de centre  $O$  et de rayon 1 incluse dans  $\mathfrak{R}^3$ .

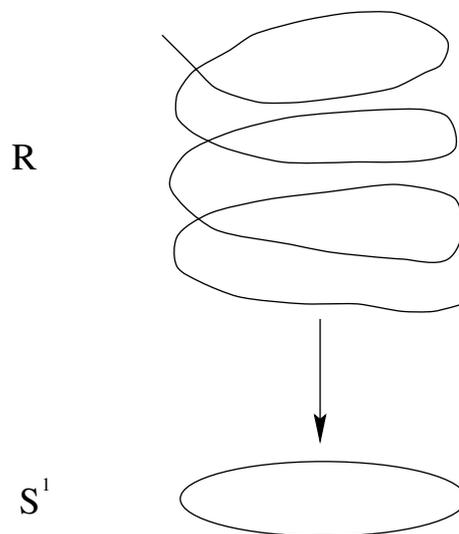
**Espace d'arrivée** (base)  $M$  : le segment  $\{(0, 0, z) \text{ tel que } z \in [-1, +1]\}$

**Application**  $\pi : (x, y, z) \in S^2 \mapsto (0, 0, z) \in M$

La fibre au dessus d'un point quelconque intérieur au segment  $M$  est un cercle de  $S^2$  parallèle à l'équateur  $xOy$ . Lorsque le point de  $M$  choisi coïncide avec l'un des deux pôles  $\{0, 0, \pm 1\}$ , la fibre correspondante se réduit à un point (cercle de rayon nul).

De la même façon, l'analyse de la fonction exponentielle  $i\theta \in P = i\mathfrak{R} \mapsto e^{i\theta} \in M = S^1$  en utilisant le langage des fibrés revient à “regarder” la figure

3.2

FIGURE 3.2 – La fonction exponentielle  $e^{i\theta}$ 

Dans le cas présent, la fibre au dessus de n'importe quel point  $x_\theta = e^{i\theta}$  du cercle  $S^1$  est un ensemble  $F_\theta = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  qu'on peut mettre en bijection avec l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}$ . Toute section définit un inverse pour l'exponentielle, c'est à dire une détermination du logarithme :  $\exp \operatorname{Log} e^{i\theta} = e^{i\theta}$ ; en pratique, on veut que ces déterminations soient des fonctions continues, ce qui impose des conditions supplémentaires sur les sections correspondantes.

### 3.1.2 Fibrations. Fibrés différentiables localement triviaux

#### Fibration

Comme nous venons de le voir, toute application peut être décrite dans le “langage des fibrés”, mais toute application n'est pas une fibration : dans le cadre de cet ouvrage, nous travaillons dans la catégorie des variétés différentiables et nous dirons qu'une application  $\pi : P \rightarrow M$  est une *fibration* si toutes les fibres  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in M$  sont difféomorphes (on suppose ici que  $P$  et  $M$  sont des variétés et que  $\pi$  est différentiable). Plus généralement, même dans le cas où les fibres sont discrètes, on dira qu'on a affaire à une fibration si toutes les fibres ont même cardinalité.

Puisque toutes les fibres sont difféomorphes, on dira que *la fibre type* est  $F$  lorsque toutes les fibres sont “de type  $F$ ”, ce qui signifie : difféomorphes à  $F$ .

### Fibré localement trivial

Soit  $P \rightarrow M$  une fibration et  $U \subset M$  un ouvert de  $M$  appartenant à l’atlas définissant la structure différentiable de  $M$ . On a envie, intuitivement, de se représenter l’ensemble des antécédents  $\pi^{-1}(U)$  comme un cylindre “au dessus de  $U$ ” (voir figure 3.3).

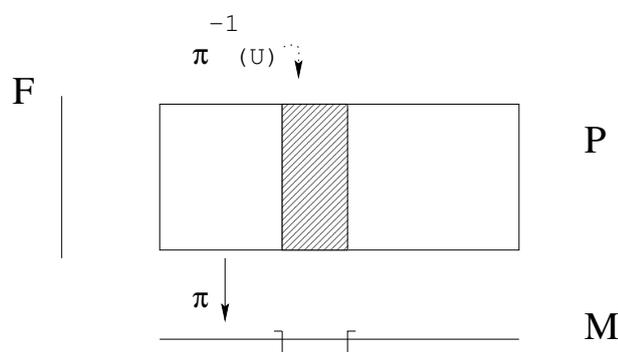


FIGURE 3.3 – Les points au dessus de l’ouvert  $U$

On appelle *espace fibré localement trivial* la donnée d’une fibration  $(P, M, \pi)$  telle que, pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , l’ensemble  $\pi^{-1}(U)$  soit difféomorphe à  $U \times F$  où  $F$  est la fibre type de la fibration. La condition de trivialité locale est souvent sous-entendue, et on parle alors simplement d’*espace fibré*.

### Remarques

- En anglais, les deux expressions “*fibred space*” et “*fiber bundle*” correspondent respectivement aux termes “fibrations” et “espace fibré localement trivial”, tout au moins, en général.
- Dans la suite de cet ouvrage, nous ne considérerons que des espaces fibrés localement triviaux, sauf mention explicite du contraire. Pour cette raison, nous utiliserons souvent les deux expressions “fibration” et “fibré localement trivial” de façon équivalente et donc sans faire explicitement mention de la propriété de trivialité locale.
- Comme on l’a écrit plus haut, un espace fibré est défini par un triplet  $(P, M, \pi)$  car il peut, en effet, exister plusieurs fibrations différentes  $(P, M', \pi')$  et  $(P, M, \pi)$  du même espace total  $P$ . Par abus de langage,

et dans le cas où l'on s'intéresse à une seule fibration pour un espace total  $P$  donné, on pourra dire que  $P$  lui-même est un espace fibré.

- Intuitivement, dire que  $P$  est un espace fibré revient à dire que  $P$  est une collection de fibres de même type et “collées” ensemble. L'ensemble des fibres (l'ensemble dont les différents éléments sont les fibres) est, par définition, l'espace de base  $M$  et l'application  $\pi$  est celle qui associe à tout point  $z$  de  $P$  la fibre à laquelle il appartient. On dira également que  $P$  est un espace qui peut être fibré en espaces  $F$  au dessus de  $M$  (voir la figure 3.3).

### Fibré trivial

Dire que  $(P, M, \pi)$  est localement trivial consiste à affirmer, comme nous l'avons vu, que *localement*, l'espace total  $P$  ressemble à un produit : c'est la propriété  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ . Cependant, le fait que  $P \simeq M \times F$  n'est pas une propriété imposée. Lorsque tel est le cas, on dit que  $P$  est un fibré trivial. Bien qu'utilisable en toute généralité, la théorie des espaces fibrés est surtout intéressante lorsque  $P$  est seulement localement trivial, mais n'est pas trivial. Nous rencontrerons une multitude de tels exemples dans ce qui suit.

### Trivialisations locales

Lorsque  $U$  est un ouvert de  $M$ , dire que  $\pi^{-1}(U)$  est diffeomorphe à  $U \times F$  revient à dire qu'il existe un diffeomorphisme  $\psi_U$  entre les deux ensembles :

$$z \in \pi^{-1}(U) \subset P \mapsto \psi_U(z) = (x, g) \in U \times F \quad \text{avec} \quad x = \pi(z)$$

L'application  $\psi_U$  prend le nom de *trivialisat on locale relative   l'ouvert  $U$* . Bien entendu, une telle trivialisat on est loin d'être unique puisque la compos e  $(\mathbb{1}_M \times \phi) \circ \psi_U$  de  $\psi_U$  avec  $(\mathbb{1}_M \times \phi)$ ,  $\phi$  désignant un diffeomorphisme quelconque de la fibre type  $F$ , fournit une autre trivialisat on.

La trivialisat on  $\psi_U(z) = (x = \pi(z), g)$  est parfaitement caract ris e par l'application  $g_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow F$  définie par  $g_U(z) = g$ ; en d'autres termes, le point  $z$  de  $P$  est caractérisé par le point  $x = \pi(z)$  sur  $M$  et le point  $g = g_U(z)$  sur  $F$ . Seul le point  $x$  est canoniquement défini par la fibration; l'élément  $g$  de  $F$ , au contraire, résulte du choix d'une trivialisat on locale. Pour que ces deux composantes (les deux points  $(x, g) \in M \times F$ ) deviennent des coordonnées (des nombres), il suffit de choisir un repère local sur  $M$  et sur  $F$ . On pourra schématiser la situation par la figure 3.4.

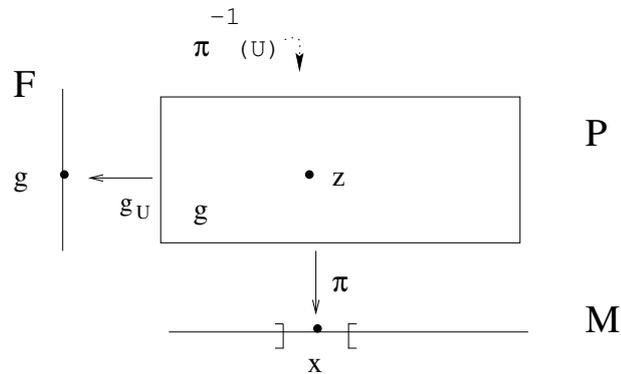


FIGURE 3.4 – Trivialisation locale d'un espace fibré

### Sous-fibrés

Soient  $(P, M, \pi)$  et  $(P', M', \pi')$  deux espaces fibrés. On dira que le premier est un sous-fibré du second si  $P$  (respectivement  $M$ ) est une sous-variété de  $P'$  (respectivement  $M'$ ) et si  $\pi$  coïncide avec la restriction correspondante de  $\pi'$ .

## 3.2 Espaces fibrés principaux

### 3.2.1 La structure d'espace fibré principal

Une fibration  $(P, M, \pi)$  est un espace fibré principal lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $(P, M, \pi)$  est un espace fibré localement trivial.
2. Un groupe de Lie  $G$  agit (à droite) sur  $P$ , et ce, de façon transitive dans chaque fibre.
3. Toutes les fibres sont homéomorphes à  $G$ .

Les trois conditions ci-dessus sont obligatoires pour qu'on puisse parler de fibré principal car nous verrons un peu plus loin des exemples où (1) et (2) sont vérifiées (mais pas (3)) et des exemples où (1) et (3) sont vérifiées (mais pas (2)).

En général, on considère des espaces fibrés principaux à droite, comme ci-dessus, mais il est bien évident qu'on peut également considérer des espaces fibrés principaux à gauche.

Le groupe  $G$  (la fibre type) est généralement désigné sous le nom de *groupe structural* du fibré considéré. Afin d'alléger les notations, nous noterons très simplement l'action de  $G$  sur  $P$  : Soient  $z_1 \in P$  et  $g \in G$ , l'image  $z_2$

de  $z_1$  sous l'action de  $g$  sera notée  $z_2 = z_1g$ , ce qui peut être décrit, de façon imagée, par la figure 3.5.

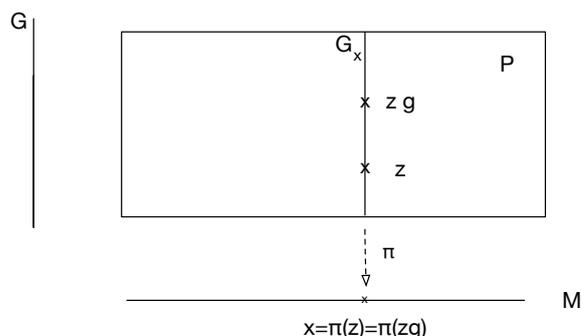


FIGURE 3.5 – Action du groupe structural sur un espace fibré principal

Attention : Parce que  $G$  agit sur  $P$ , de nombreux physiciens désignent ces transformations de  $P$  dans  $P$  (du type  $z \in P \mapsto z' = zg, g \in G$ ) sous le nom de *transformations de jauge globales* et désignent également  $G$  lui-même sous le nom de *groupe de jauge* ; cependant nous réserverons ce dernier vocable (groupe de jauge) pour le *groupe des transformations de jauge locales* que nous définirons un peu plus loin.

La relation  $z_2 = z_1g$  est formellement très semblable à la relation élémentaire  $A_2 = A_1 + \vec{V}$  où  $A_1$  et  $A_2$  désignent deux points d'un espace affine et où  $\vec{V}$  désigne un vecteur de l'espace vectoriel sous-jacent. Les élèves de nos lycées savent bien qu'on peut "soustraire" deux points en écrivant  $\vec{V} = A_2 - A_1$  (on n'a pas le droit d'"additionner" deux points!). De la même façon, on pourra écrire ici  $g = z_1^{-1}z_2$ , puisque  $z_1g = z_2$  et que  $g$  est bien déterminé par la donnée de  $z_1$  et de  $z_2$ . Notons enfin que l'analogie de la célèbre "relation de Chasles" s'écrit  $z_1^{-1}z_2 = (z_1^{-1}z_3)(z_3^{-1}z_2)$ .

### 3.2.2 Sections locales et trivialisations locales

Dans le cas d'un fibré principal, chaque fibre  $G_x$  au dessus de  $x$ , élément de  $M$  est une "copie" du groupe  $G$ , mais il s'agit d'une copie au sens topologique (ou différentiable) du terme car l'origine du groupe  $G$  (l'élément neutre) est connue mais celle de la fibre  $G_x$  ne l'est pas ! Afin de mieux faire sentir le sens de cette importante remarque, considérons l'exemple suivant 3.6

Dans le cas présent,  $P$  est un cylindre fini  $P = M \times S^1$  où  $M$  est un intervalle et  $S^1$  désigne le cercle de rayon 1 ; la fibre au dessus de  $x$  est un cercle, et ce cercle, comme tous les cercles, est homéomorphe au groupe

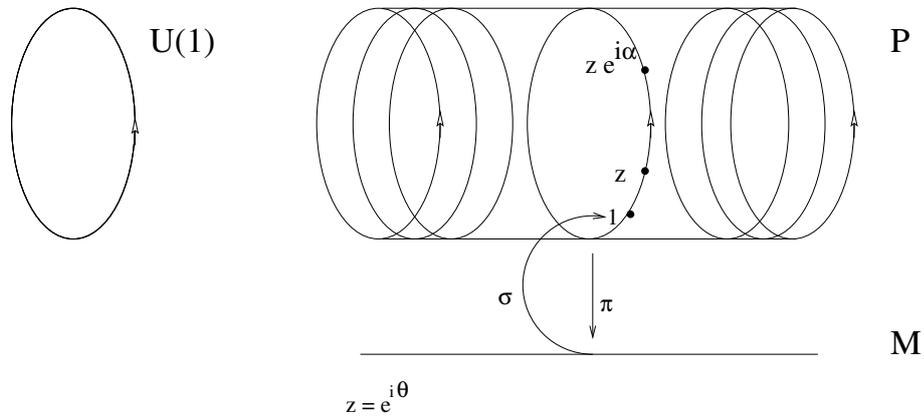


FIGURE 3.6 – L’origine de la fibre (copie du cercle  $U(1)$ ) au dessus de  $x$  est marquée par la section  $\sigma$

$U(1)$ . Sur ce cercle, tous les points “se valent” et on ne sait pas multiplier un point par un autre. Par contre, si le cercle est marqué par une origine, il devient isomorphe au groupe  $U(1)$  et on sait alors multiplier les points ( $e^{i\theta}e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$ ). Le groupe  $U(1)$  agit bien sur l’ensemble  $P$  ci-dessus en faisant tourner un point quelconque  $z \in P$  d’un angle  $\theta$ .

Revenons au cas général d’un fibré principal  $(P, M, \pi)$  de groupe structural  $G$ . Le choix d’une section locale  $x \in U \subset M \mapsto \sigma(x) \in P$  permet de “marquer une origine” sur chacune des fibres  $G_x$  situées au dessus de l’ouvert  $U$ . En d’autres termes, le choix d’une section locale  $\sigma$  permet d’identifier la fibre  $G_x$  avec le groupe  $G$  lui-même. La façon la plus simple d’exprimer ceci de façon algébrique consiste à montrer qu’à la section locale  $\sigma$  on peut associer une trivialisat ion locale  $\psi_U$  définie comme suit : soit  $z \in P$ , alors  $\psi_U(z) = (x; g_\sigma)$  où  $x = \pi(z)$  et où  $g_\sigma$  désigne l’unique élément de  $G$  défini par  $z = \sigma(x)g_\sigma$ . En effet,  $z$  et  $\sigma(x)$  étant dans la même fibre, il existe un et un seul élément  $g_\sigma$  de  $G$  permettant de passer de  $\sigma(x)$  à  $z$ ; l’existence et l’unicité de cet élément  $g_\sigma$  résulte des axiomes (2) et (3) de la structure de fibré principal. Une section locale  $\sigma$  définit donc également une application — que nous noterons encore  $g_\sigma$  — de  $P$  dans  $G$ ; en d’autres termes, les “composantes” de  $z \in P$  sont  $x = \pi(z) \in M$  et  $g_\sigma = g_\sigma(z) \in G$ . La composante  $x$  est canoniquement définie par la structure fibrée et la composante  $g_\sigma$  résulte du choix d’une section locale  $\sigma$ .

Il faut enfin noter que le choix d’une section locale permet de définir *localement* l’action à gauche du groupe  $G$  sur  $P$ ; en effet, en plus de l’action à droite  $z \in P, k \in G \rightarrow zk = (x; g_\sigma)k = (x; g_\sigma k) \in P$  qui ne dépend pas de  $\sigma$  et qui est globalement définie puisqu’elle résulte de la structure d’espace

fibré principal, on peut définir localement une action à gauche  $z \in P, k \in G \rightarrow (kz)_\sigma = (x; kg_\sigma) \in P$ , qui dépend de  $\sigma$ .

Supposons que nous ayons fait le choix d'une section locale  $\sigma$  au dessus de l'ouvert  $U$  et d'une section locale  $\tau$  au dessus de l'ouvert  $V$ ; si on fait un choix de  $z \in P$  tel que la projection  $\pi(z)$  appartienne à l'intersection  $U \cap V$ , on peut écrire aussi bien  $z \stackrel{\sigma}{=} (x; g_\sigma)$  que  $z \stackrel{\tau}{=} (x; g_\tau)$ . Il existe donc un élément  $g_{\sigma\tau}$  du groupe  $G$  (et en fait une fonction  $g_{\sigma\tau}(x)$  définie sur  $U \cap V$ ) tel que  $g_\sigma = g_{\sigma\tau}g_\tau$ . Cette fonction porte le nom de *fonction de transition*. Ces fonctions de transition permettent en fait de reconstruire le fibré principal lui-même. On montre qu'étant donné un atlas de  $M$  et une famille de fonctions de transition obéissant à une certaine propriété (dite de cocycle) sur les triples intersections, il est possible de reconstruire l'espace fibré dont on est parti.

### 3.2.3 Exemple fondamental : le fibré des repères linéaires

L'exemple qui suit est fondamental, non seulement parce qu'il est mathématiquement important — il est d'ailleurs à l'origine de toute la théorie des espaces fibrés — mais aussi parce qu'il permet de fournir un support à notre intuition géométrique, en particulier dans le cas où l'on s'intéresse à des fibrés principaux  $(P, M, \pi)$  quelconques. L'exemple fondamental étudié ici nous permettra de développer les analogies suivantes :

- Considérer l'espace total  $P$  comme un ensemble de repères généralisés sur la base  $M$ .
- Considérer le groupe structural  $G$  comme groupe de transformations de repères.
- Considérer un élément quelconque  $z$  de  $P$  comme un repère (généralisé) situé au point  $x$  de  $M$  (avec  $x = \pi(z)$ ).
- Considérer toute section locale  $\sigma(x)$  comme un repère mobile (généralisé) dans l'ouvert  $U$ .
- Considérer les fonctions de transition  $g_{\sigma\tau}$  comme décrivant des changements de repère mobile.
- etc

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . En chaque point  $x$  de  $M$  nous avons un espace tangent  $T(M, x)$  et nous pouvons considérer l'ensemble  $G_x$  de tous les repères en  $x$ . Un point  $z$  de  $G_x$  est donc un repère en  $x$ , c'est à dire la donnée de  $n$  vecteurs indépendants de  $T(M, x)$ . Soit  $P = \bigcup_{x \in M} G_x$  l'ensemble de tous les repères de  $M$ . Notons  $\pi$  l'application qui, à un repère centré sur  $x$ , associe l'origine  $x$  elle-même; il est facile de voir que  $(P, M, \pi)$  est un espace fibré principal de groupe structural  $GL(n)$ . Il est clair, en effet, que le groupe linéaire  $GL(n)$  agit transitivement sur chaque fibre de  $P$  : la fibre  $G_x$  au dessus de  $x$  n'est autre que l'ensemble

des repères en  $x$  et il est bien évident qu'on peut toujours passer d'un repère  $z = (z_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$  à un repère  $z' = (z'_j)$  au même point  $x$  à l'aide d'un élément  $g = (g_j^i)$  de  $GL(n) : (z'_j = z_i g_j^i)$ . Par ailleurs, le fait que l'ensemble  $G_x$  des repères en  $x$  soit homéomorphe à  $GL(n)$  peut se voir de la façon suivante : marquons (choisissons) un repère de référence  $\sigma = (\sigma_i)$  en  $x$ ; alors, tout élément  $g$  de  $GL(n)$  définit un nouveau repère  $z = \sigma g$  au même point, mais réciproquement, tout nouveau repère  $z$  détermine un et un seul élément  $g$  de  $GL(n)$  tel que  $z = \sigma g$ . On obtient donc une correspondance bi-univoque entre repères en  $x$  et éléments de  $GL(n)$ ; bien entendu, cette correspondance dépend du choix du repère de référence  $\sigma$ . Il resterait à montrer que cette application est bel et bien continue et à vérifier les conditions de trivialité locale. Le fibré principal  $P$  ainsi construit se note parfois  $FM$  (pour "*Frame bundle of M*") et s'appelle le *fibré des repères linéaires* sur  $M$ . Nous invitons le lecteur à relire la sous-section précédente avec cet exemple en tête; il est alors clair qu'une section locale n'est autre qu'un repère mobile choisi dans le domaine d'un ouvert et qu'une fonction de transition n'est autre qu'un changement de repère mobile.

### 3.2.4 Sous-espace des vecteurs verticaux en un point $z$ d'un espace fibré

- Soit  $P$  un espace fibré principal et  $z$  un élément de  $P$ .  $P$  est, en particulier, une variété, et toutes les constructions étudiées dans le contexte des variétés différentiables peuvent être effectuées et on peut donc considérer l'espace tangent à  $P$  en  $z$  que l'on notera  $T(P, z)$ . Cet espace vectoriel est évidemment de dimension  $m + n$  lorsque  $\dim M = m$  et  $\dim G = n$ ,  $M$  et  $G$  désignant respectivement la base et la fibre type de  $P$ .
- Plutôt que de considérer l'espace tangent à *tout* l'espace  $P$  en  $z$ , nous pouvons considérer l'espace tangent à la fibre  $F_x$  de  $P$  qui passe par  $z$  (c'est à dire  $x = \pi(z)$ ); cet espace vectoriel  $V_z = T(F_x, z)$  est naturellement un sous-espace vectoriel de  $T(P, z)$ . Sa dimension est égale à  $n$  puisque toutes les fibres ont dimension  $n$ . Le sous-espace  $V_z$  s'appelle *espace tangent vertical* au point  $z$ .
- Intuitivement, un vecteur est un petit déplacement (une flèche!). Un vecteur de l'espace tangent  $T(P, z)$  est donc un déplacement infinitésimal d'un "repère" (nous pensons intuitivement à  $z$  comme étant une sorte de repère généralisé). Un déplacement infinitésimal dans l'ensemble des repères peut s'analyser à l'aide de deux mouvements très différents : on peut faire tourner le repère (sans bouger l'origine)

mais on peut également déplacer l'origine du repère. Les déplacements verticaux du point  $z$  correspondent à des mouvements de  $z$  dans sa fibre : on ne déplace pas le point de base  $x = \pi(z)$  ; ainsi, les vecteurs de  $V_z$  (les vecteurs verticaux en  $z$ ) correspondent à des déplacements infinitésimaux du repère  $z$  qui n'entraînent aucun déplacement de l'origine  $x$  : on se contente de “faire tourner” infinitésimalement (à l'aide d'une “petite transformation” du groupe  $G$ ) le repère  $z$  en  $x$ .

- Le lecteur pourra s'étonner de ne trouver, dans ce chapitre, aucun paragraphe intitulé “sous-espace horizontal” ; il y a, à cela, une excellente raison : alors que la notion de sous-espace vertical peut se définir canoniquement, comme on vient de le voir, pour tout fibré principal, il n'est par contre pas possible de définir canoniquement, tout au moins en général, la notion de déplacement horizontal ; une telle notion est tributaire d'un choix. L'étude des choix possibles —pour un fibré principal donné— définit, en quelque sorte, la théorie des connexions et fait l'objet du chapitre suivant.
- Le groupe  $G$  agissant (à droite) sur l'espace  $P$ , on peut définir, comme d'habitude (voir le chapitre sur les groupes) des champs fondamentaux  $\epsilon_\alpha$  associés aux éléments  $X_\alpha$  de l'algèbre  $Lie(G)$ . Par construction,  $\epsilon_\alpha(z)$  est un vecteur vertical au point  $z$  et l'ensemble  $\{\epsilon_\alpha(z)\}_{\alpha \in \{1 \dots n\}}$  constitue une base de l'espace vectoriel  $V_z$ .  
Si  $z' = zg$  désigne le repère issu de  $z$  par une “rotation” finie  $g$ , on pourra écrire  $\epsilon_\alpha(z) = zX_\alpha$  et interpréter  $\epsilon_\alpha(z)$  comme un déplacement infinitésimal du “repère”  $z$  à l'aide de la “rotation infinitésimale”  $X_\alpha$ . Pour ne pas alourdir le texte, nous supprimerons les guillemets autour des mots “repère” et “rotation” dans la suite du texte, mais le lecteur devra se souvenir que ces mots désignent respectivement les éléments du fibré principal considéré (qui ne sont pas nécessairement des repères au sens usuel du terme) et les éléments du groupe structural (qui n'est pas nécessairement un groupe de rotations).
- Les champs  $z \rightarrow \epsilon_\alpha(z)$  sont des champs fondamentaux à droite puisque  $P$  est —comme d'habitude— un fibré principal muni d'une action à droite. A moins que  $P$  ne soit trivial (voir section suivante) il n'existe pas d'action de  $G$  à gauche de  $P$ , en tous cas, pas d'action qui soit canoniquement définie. Par contre, on peut toujours trivialisier  $P$  localement en choisissant une section (locale)  $x \in M \mapsto \sigma(x) \in P$  ; on a vu qu'une telle section permettait d'identifier la fibre  $F_x$  avec  $G$  lui-même en associant au point  $z \in F_x$  l'élément  $g_\sigma$  de  $G$  défini par l'équation  $z = \sigma(x)g_\sigma$ . On a alors non seulement une action de  $G$  à droite mais également une action de  $G$  à gauche définie par  $k \in G, z = (x, g_\sigma) \in P \mapsto z' = (x, kg_\sigma) \in P$ . Cette action dépend

de la section  $\sigma$  et permet de définir localement des champs fondamentaux à gauche  $e_\alpha(z)$ ; ces champs dépendent donc également du choix de la section  $\sigma$  et, si la chose est nécessaire, on pourra les noter  ${}^\sigma e_\alpha$ .

- Pour résumer, on pourra dire que la fibre  $F_x$  au dessus de  $x$  apparaît comme une copie du groupe  $G$ , le choix d'une section locale  $\sigma(x)$  permet de marquer l'origine (l'identité du groupe) sur la fibre  $F_x$ . On peut ainsi identifier  $G$  avec  $F_x$  et l'algèbre de Lie de  $G$  avec l'espace vertical  $T(F_x, \sigma(x))$  au point  $\sigma(x)$ . Le groupe  $G$  agit sur lui-même par multiplications à gauche et à droite, il agit canoniquement sur  $F_x$ , du côté droit, puisqu'on a affaire à un fibré principal, mais on peut aussi le faire agir à gauche dès qu'on a identifié  $G$  avec  $F_x$ , c'est à dire dès qu'on a choisi une section  $\sigma(x)$ . Le choix de  $\sigma$  permettant d'identifier  $G$  avec  $F_x$  permet donc également de définir une forme de Maurer-Cartan  ${}^\sigma\theta(x)$  pour la fibre  $F_x$ . Cette forme "ramène" donc à l'origine  $\sigma(x)$  les vecteurs verticaux appartenant à  $V_{\sigma(x)g}$ .

### 3.2.5 Fibré principal trivial

Un fibré principal  $(P, M, \pi)$  de groupe structural  $G$  est trivial si, par définition,  $P$  est homéomorphe au produit cartésien  $M \times G$  (la projection  $\pi$  étant la projection sur le premier facteur). dans ce cas, il existe plusieurs (en général une infinité de) sections globales puisque toute application différentiable de  $M$  dans  $G$  définit une section globale : considérer par exemple l'application constante qui, à tout point de  $M$  associe l'identité de  $G$ . Réciproquement, supposons qu'un fibré principal possède une section globale  $\sigma$ , on peut alors considérer l'application de  $P$  dans  $M \times G$  définie par  $z \rightarrow (x, g)$  avec  $x = \pi(z)$  et  $g$  tel que  $z = \sigma(x)g$ ; on fabrique ainsi un homéomorphisme entre  $P$  et  $M \times G$ .

En conclusion, un fibré principal est trivial si et seulement s'il possède une section globale. Lorsque  $P$  est trivial, son identification avec  $M \times G$  résulte, comme on vient de le voir, du choix de la section globale  $\sigma$ ; on écrira simplement  $P = M \times G$  si cela ne prête pas à confusion. Noter que, dans un tel cas, les champs fondamentaux à droite  $\epsilon_\alpha$  et à gauche  ${}^\sigma e_\alpha$  sont tous deux globalement définis.

Attention : pour des fibrés non principaux (voir plus loin), le fait de posséder une section globale n'est pas suffisant pour assurer la trivialité.

Nous n'aborderons pas le problème de la classification des espaces fibrés, le lecteur intéressé devrait consulter [8].

### 3.2.6 Formes basiques, invariantes et horizontales

**Formes basiques** L'existence de l'application de projection  $\pi : P \mapsto M$  permet, comme nous le savons, de projeter les vecteurs de  $TP$  sur les vecteurs de  $TM$ , en utilisant l'application tangente  $\pi_*$ ; l'application cotangente,  $\pi^*$ , permet, quant à elle, de faire voyager les formes dans l'autre sens. L'image, par  $\pi^*$  d'une forme différentielle sur  $M$  est une forme particulière sur  $P$  qu'on appelle une *forme basique*. On obtient un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles

$$\pi^* : \Omega(M) \mapsto \Omega(P)$$

On peut donc identifier l'algèbre  $\Omega(M)$  avec la sous-algèbre des formes basiques  $\pi^*(\Omega(M)) \subset \Omega(P)$ .

**Formes horizontales** Une forme sur  $P$  est horizontale, par définition, si elle s'annule sur les vecteurs verticaux. Etant donné que l'espace tangent vertical en un point  $z$  de  $P$  est engendré par les champs de vecteurs fondamentaux  $X_\alpha(z)$ , avec  $X_\alpha \in \text{Lie}(G)$ , il suffit de tester l'annulation sur les champs en question. En d'autres termes, soit  $X \in \text{Lie}(G)$  et désignons  $i_X$  le produit intérieur d'une forme par le champ  $X(z)$ ; la forme  $\omega \in \Omega(P)$  est donc une *forme horizontale* si et seulement si, pour tout  $X$ ,

$$i_X \omega = 0$$

**Formes invariantes** Puisque le groupe  $G$  agit sur  $P$ , on peut s'intéresser à son action infinitésimale sur les formes décrite par la dérivée de Lie  $L_X = di_X + i_X d$ . On dit qu'une forme  $\omega$  est une *forme invariante* si et seulement si, pour tout  $X$ ,

$$L_X \omega = 0$$

**Formes basiques (bis)** Le fait qu'une forme basique soit à la fois invariante et horizontale est assez intuitif. Formellement cette propriété découle immédiatement de l'invariance  $\pi(zg) = \pi(z)$  lorsque  $g \in G$ . Retenons : La forme  $\omega$  est une *forme basique* si et seulement si, pour tout  $X$ ,

$$L_X \omega = 0 \text{ et } i_X \omega = 0$$

c'est à dire si et seulement si  $\omega$  et  $d\omega$  sont horizontales.

**Remarque : Opération de Cartan** Nous nous servirons assez peu de ces notions de formes basiques, de formes invariantes ou de formes horizontales, dans la suite de cet ouvrage. Cela dit, il faut bien noter que

les notions qui viennent d'être discutées fournissent une formulation algébrique assez compacte de la notion d'espace fibré principal (nous n'avons rien utilisé d'autre!) On peut, de fait, utiliser ces propriétés pour définir la notion d'opération (de Cartan) d'une algèbre de Lie,  $\mathfrak{g}$ , sur une algèbre différentielle commutative graduée  $\Omega$  (c'est bien le cas de l'algèbre des formes différentielles sur une variété). On dit qu'on a une *opération de Cartan* lorsqu'à tout  $X \in \mathfrak{G}$ , on associe une anti-dérivation  $i_X$  (de degré  $-1$ ) et une dérivation  $L_X = di_X + i_X d$  (de degré  $0$ ) telles que,  $\forall X, Y \in \mathfrak{G}$ , on ait  $L_{[X, Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$  et  $i_{[X, Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$ . La donnée d'un fibré principal  $P$  fournit automatiquement une opération de Cartan de  $Lie(G)$  sur  $\Omega(P)$  mais il est certain que la notion d'opération de Cartan est plus générale. Dans ce cadre plus général, on définit encore les sous espaces  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{I}$  et  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{I}$  des formes horizontales, invariantes et basiques, et on montre aisément que ces trois sous-espaces de  $\Omega$  sont des sous-algèbres différentielles graduées de  $\Omega$ .

**Remarque : Champs de vecteurs projetables** Nous rappelons ici la définition des champs de vecteurs projetables par une application différentiable (dans ce cas, il s'agit de la projection  $\pi : P \mapsto M$  du fibré considéré), notion générale déjà introduite au chapitre 1. Ici l'ensemble des antécédents de  $x \in M$  par  $\pi$  n'est autre que la fibre au dessus du point  $x$ . Un champ de vecteurs  $V \in \Gamma TP$  est donc dit projectable si et seulement si  $\pi_* V_z = \pi_* V_{zg}$  pour tout  $g \in G$ .

Plusieurs propriétés des espaces fibrés (et des connexions) pourraient s'énoncer en utilisant cette notion, que nous n'utiliserons pas explicitement dans la suite.

### 3.2.7 Exemples

#### Le fibré des repères linéaires

Nous avons déjà étudié cet exemple en détail en 3.2.3 et nous verrons un peu plus loin divers exemples analogues.

#### Fibration d'un groupe $G$ en sous groupes $H$ au dessus de $G/H$

- Notre premier exemple sera à la fois élémentaire et discret : notre espace total  $P = \mathfrak{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs et la projection  $\pi$  est celle qui, à un entier, associe sa classe modulo  $p$  ( $p$  désignant un entier quelconque choisi une fois pour toutes). Le groupe structural

est alors le sous-groupe  $p\mathfrak{Z}$  de  $\mathfrak{Z}$ . Illustrons ceci, dans le cas  $p = 3$  par la figure 3.7

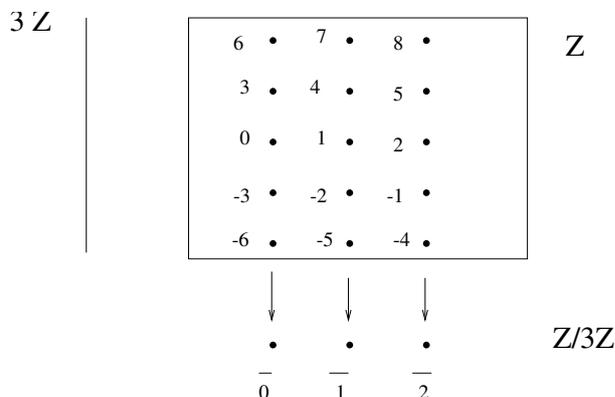
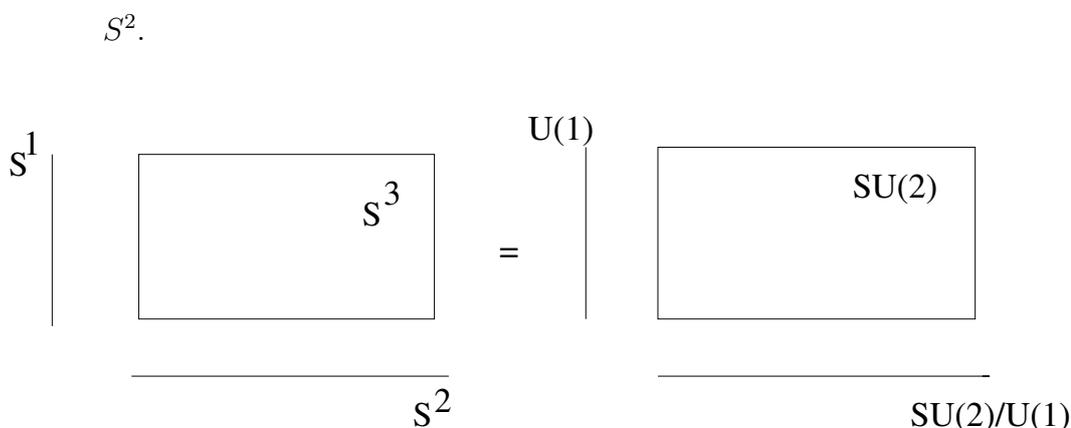


FIGURE 3.7 – Les entiers modulo 3

L'espace total  $\mathfrak{Z}$  s'écrit donc ici comme réunion de trois fibres. La fibre type est le groupe additif des multiples de 3, noté  $3\mathfrak{Z}$  et l'espace des fibres —la base— possède trois points :  $\mathfrak{Z}/3\mathfrak{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$  et est un quotient de  $\mathfrak{Z}$ . La notation adoptée, pour l'action du groupe structural sur l'espace total  $\mathfrak{Z}$  est ici une notation additive et non pas une notation multiplicative (mais cela devrait être assez clair!), ainsi, l'élément 11 de la fibre  $\overline{2}$  peut s'obtenir à partir de l'élément  $-1$  de la même fibre sous l'action de  $3\mathfrak{Z}$  en écrivant  $11 = -1 + 3 \times 4$ .

- Après cet exemple discret et extrêmement élémentaire (l'art de reconsidérer des choses bien connues avec un éclairage différent ...!) passons à un autre exemple, presque aussi élémentaire, mais "continu". L'espace total, comme dans l'exemple précédent, est un groupe, ici le groupe  $SU(2)$ . Rappelons, que  $SU(2)$  est topologiquement identifiable à la sphère  $S^3$ . Nous choisissons un sous-groupe  $U(1)$ , c'est à dire un grand cercle passant par l'origine et effectuons une décomposition en classes de  $SU(2)$  par rapport à cet  $U(1)$  : soit  $g$  un élément de  $SU(2)$  qui n'appartienne pas au  $U(1)$  choisi, on construit alors l'ensemble  $\overline{g} = gU(1) = \{gh|h \in U(1)\}$ . Ensuite, on choisit un élément  $k$  qui n'appartienne ni au  $U(1)$  choisi, ni à  $\overline{g}$ . On construit alors  $\overline{k} = kU(1)$  et on continue ... On écrit ainsi le groupe  $SU(2)$  comme une réunion (infinie) de classes du type  $\overline{g} = gU(1)$ , l'ensemble de ces classes étant par définition, l'ensemble quotient  $SU(2)/U(1)$  qu'on identifie (voir le chapitre sur les groupes et espaces homogènes) avec la sphère  $S^2$ . Le groupe  $SU(2)$  —c'est à dire la sphère  $S^3$ — peut donc être considéré comme réunion d'une infinité de cercles  $S^1$  paramétrée par la sphère

FIGURE 3.8 – La fibration de Hopf pour  $S^3$ 

Bien évidemment, le groupe  $U(1)$  agit, par multiplication à droite, sur l'espace total  $SU(2)$  (dans la construction précédente on a choisi  $U(1)$  comme sous-groupe de  $SU(2)$ ). Cette fibration en cercles de  $S^3$  est souvent utilisée et porte le nom de “fibration de Hopf” (pour  $S^3$ ).

Avant de généraliser cet exemple, notons que la sphère  $S^3$  n'est, en aucun cas homéomorphe au produit cartésien  $S^2 \times S^1$ , ce qui ne l'empêche pas d'être un fibré en cercles au dessus de  $S^2$ . En d'autres termes, les deux espaces fibrés principaux  $S^3 \mapsto S^2$  et  $S^2 \times S^1 \mapsto S^2$  (avec projection canonique évidente) ont même structure locale — ils sont tous deux fibrés en cercles au dessus de  $S^2$  — mais le second est trivial alors que le premier ne l'est pas.

- Passons maintenant à la généralisation de l'exemple qui précède. Soit  $G$  un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe de Lie, qu'on supposera fermé dans  $G$  pour que la topologie du quotient soit séparée. On considère la relation définissant les classes à gauche de  $H$  :  $g$  et  $k$  sont reliés si  $k$  appartient à l'ensemble  $gH$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence et on peut écrire  $G$  comme réunion de ses classes  $gH$  ; l'ensemble des classes étant, par définition, l'ensemble quotient  $G/H$ . Il est évident que  $H$  agit (à droite) sur  $G$  et que l'application  $G \mapsto G/H$  qui, à tout élément associe sa classe  $\bar{g} = gH$ , définit une fibration principale. Tout groupe  $G$  est donc ainsi un espace fibré principal au dessus de  $G/H$ , le groupe structural étant  $H$ . Notons que l'espace quotient (la base du fibré)  $G/H$  n'est généralement pas un groupe, à moins que  $H$  ne soit un sous groupe distingué de  $G$ , c'est à dire à moins que les classes à gauche et à droite ne coïncident. La propriété qui précède est illustrée par la figure 3.9 et est à l'origine d'une multitude d'exemples

que le lecteur pourra construire en utilisant les données “zoologiques” concernant les groupes de Lie et les espaces homogènes (voir chapitre précédent).

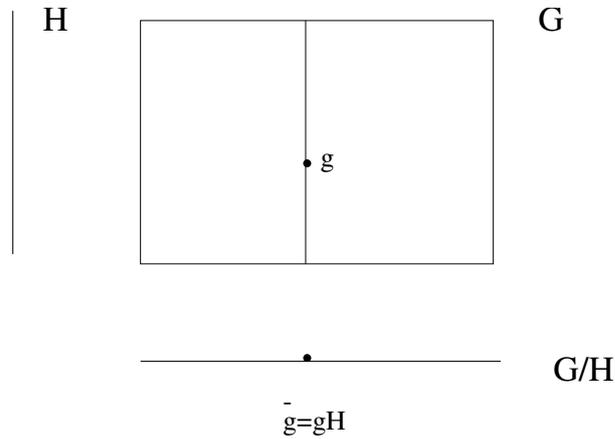


FIGURE 3.9 – Fibration principale d’un groupe au dessus d’un espace homogène

- Indiquons simplement ci-dessous quelques familles de fibrations principales, basées sur la construction précédente. Nous utilisons la notation  $H \rightarrow G \rightarrow G/H$  pour caractériser une telle fibration de  $G$  au dessus de  $G/H$ . Le nom figurant en titre est celui donné à l’espace quotient.

**Variétés de Stiefel réelles**

$$SO(m) \rightarrow SO(n) \rightarrow V_{n-m}(\mathfrak{R}^n) = SO(n)/SO(m) = O(n)/O(m)$$

**Variétés de Stiefel complexes**

$$SU(m) \rightarrow SU(n) \rightarrow V_{n-m}(\mathfrak{C}^n) = SU(n)/SU(m) = U(n)/U(m)$$

**Variétés de Stiefel quaternioniques**

$$Sp(m) \rightarrow Sp(n) \rightarrow V_{n-m}(\mathfrak{H}^n) = Sp(n)/Sp(m)$$

Si  $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in \mathfrak{H}$ , alors  $\bar{x} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$ , et  $(x|y) = \sum x_i \bar{y}_i$ . Comme dans le chapitre précédent, la notation  $Sp(n)$  désigne le groupe de Lie compact simplement connexe correspondant à la forme réelle compacte de l’algèbre de Lie complexe  $C_n$ . Avec d’autres notations :  $Sp(n) = U(n, \mathfrak{H}) = \{u \in GL(\mathfrak{H}) | (u(x)|u(y)) = (x|y)\}$ . Le groupe symplectique (non compact) usuel correspondant à la même algèbre de Lie  $C_n$  sera généralement plutôt désigné par la notation  $Sp(2n, \mathfrak{R})$ .

Le cas  $m = n - 1$  mérite une attention particulière puisque nous obtenons les sphères de cette façon.

$$\begin{aligned} S^{n-1} &= SO(n)/SO(n-1) = O(n)/O(n-1) \\ S^{2n-1} &= SU(n)/SU(n-1) = U(n)/U(n-1) \\ S^{4n-1} &= Sp(n)/Sp(n-1) \end{aligned}$$

Noter que la même sphère peut être obtenue comme base de plusieurs fibrations différentes de groupes de Lie (trois possibilités si elle est de dimension  $4n-1$ , deux possibilités si elle est de dimension  $2n-1$  et une seule possibilité si elle est de dimension paire). Il existe encore quelques autres possibilités dites “exceptionnelles” et nous y reviendrons plus loin.

Si nous divisons les groupes orthogonaux  $O(n)$  ou  $SO(n)$  — ou leurs analogues complexes ou quaternioniques — par un sous groupe maximal quelconque, nous obtenons plus généralement les variétés de Grassmann et les fibrations principales correspondantes :

#### Grassmaniennes réelles orientées

$$SO(m) \times SO(n-m) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow SG_m(\mathfrak{R}^n) = SO(n)/SO(m) \times SO(n-m)$$

#### Grassmaniennes complexes orientées

$$SU(m) \times SU(n-m) \longrightarrow SU(n) \longrightarrow SG_m(\mathfrak{C}^n) = SU(n)/SU(m) \times SU(n-m)$$

#### Grassmaniennes quaternioniques

$$Sp(m) \times Sp(n-m) \longrightarrow Sp(n) \longrightarrow G_m(\mathfrak{H}^n) = Sp(n)/Sp(m) \times Sp(n-m)$$

Les Grassmaniennes non orientées réelles et complexes sont

$$G_m(\mathfrak{R}^n) = O(n)/O(m) \times O(n-m) \text{ et } G_m(\mathfrak{C}^n) = U(n)/U(m) \times U(n-m)$$

Le cas  $m = n - 1$  mérite également une mention particulière puisque nous obtenons ainsi les espaces projectifs réels ( $\mathfrak{R}P^n$ ), complexes ( $\mathfrak{C}P^n$ ) et quaternioniques ( $\mathfrak{H}P^n$ ).

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}P^n &= SO(n)/SO(n-1) \times \mathfrak{Z}_2 \\ \mathfrak{C}P^n &= SU(n)/S(U(n-1) \times U(1)) \\ \mathfrak{H}P^n &= Sp(n)/S(Sp(n-1) \times SU(2)) \end{aligned}$$

Le lecteur devrait également connaître l’existence des difféomorphismes exceptionnels suivants :  $\mathfrak{C}P^1 \sim S^2$  et  $\mathfrak{H}P^1 \sim S^4$ . Une remarque sur les

notations :  $H = S(U(n-1) \times U(1))$  désigne un sous groupe maximal de  $SU(n)$  ; on écrit quelquefois  $SU(n-1) \times U(1)$  pour désigner ce même sous groupe  $H$  mais une telle notation est un peu abusive puisque  $H$  est en fait en quotient du produit direct de ces deux groupes par un groupe discret (il ne faut pas compter l'unité deux fois !). Les deux objets ont bien évidemment la même algèbre de Lie. Une remarque analogue s'applique au cas symplectique (par ailleurs on se rappelle que  $Sp(1)$  et  $SU(2)$  sont isomorphes, ce qui explique l'apparition de ce dernier dans le tableau précédent).

- Nous venons de voir que  $G$  peut être considéré comme espace fibré principal à droite au dessus de  $G/H = \{gH | g \in G\}$  mais il peut être également considéré comme fibré principal à gauche au dessus de  $H \backslash G = \{Hg | g \in G\}$ . L'étude de ce cas est évidemment tout à fait semblable à celle que l'on vient de mener.
- Voici un autre cas particulier de la construction précédente. On part du groupe  $G \times G$  (produit direct du groupe  $G$  avec lui même). On considère le sous-groupe diagonal  $G_\Delta = \{(g, g) \in G \times G | g \in G\}$  qui est d'ailleurs isomorphe à  $G$  et on fabrique le quotient. En résumé, on a un fibré principal d'espace total  $G \times G$ , de fibre type  $G_\Delta \sim G$  et de base  $\frac{G \times G}{G_\Delta} \sim G$ . La base est elle-même, en tant que variété, difféomorphe avec  $G$ , mais la structure de groupe ne passe pas au quotient puisque  $G_\Delta$  n'a aucune raison d'être distingué dans  $G \times G$ . Posant  $G_L = G \times 1$  et  $G_R = 1 \times G$ , on voit qu'on peut écrire  $G \sim G_L G_R / G_\Delta$ . Cet exemple d'apparence innocent est assez subtil à analyser et pourra servir, dans la suite, pour discuter de connexions (ou de métriques) particulières sur les groupes de Lie. On peut aussi considérer les projections  $G_L G_R \mapsto G_L \sim G$  et  $G_L G_R \mapsto G_R \sim G$  qui définissent deux autres fibrés principaux (cette fois-ci, la structure de groupe passe au quotient).
- Finalement, considérons le cas d'un sous groupe  $G$  qui n'est pas simplement connexe. On sait qu'il admet un revêtement universel simplement connexe  $\widehat{G}$  et que  $G$  est isomorphe au groupe quotient  $\widehat{G}/H$  où  $H$  est un sous groupe discret (distingué) du centre de  $G$  isomorphe au groupe d'homotopie  $\pi_1(G)$ . On se retrouve donc dans la situation considérée précédemment d'une fibration de  $\widehat{G}$  au dessus de  $G = \widehat{G}/H$  avec groupe structural (fibre type)  $H$ , à ceci près que le groupe  $H$  est ici un groupe discret admettant une interprétation topologique particulière et que le quotient  $G$  est non seulement un espace homogène, mais est lui-même un groupe. Plus généralement d'ailleurs, tout sous groupe  $K \subset H \sim \pi_1(G)$  définit un revêtement  $\widehat{G}/K$  qui est un fibré

principal au dessus de  $G = \widehat{G}/H$  avec fibres  $H|K$  (c'est bien un groupe puisque  $H$  est abélien); ce revêtement n'est pas universel puisque son  $\pi_1$  est égal à  $K$ . Tout ceci est presque intuitif si on se représente ces fibrations par des figures telles que 3.10.

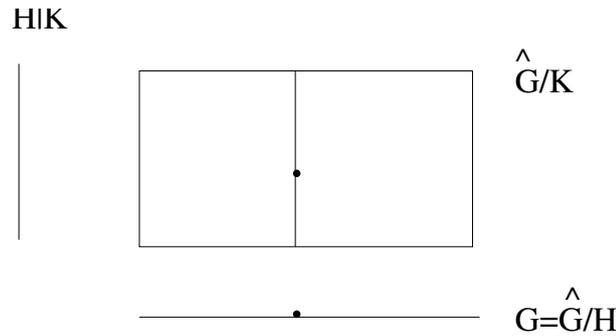


FIGURE 3.10 – Revêtements

### Fibration d'un espace homogène $G/H_1$ en groupes $H_2$ au dessus de $G/(H_1 \times H_2)$

Soit  $H$  un sous groupe de Lie d'un groupe de Lie  $G$  et supposons que  $H$  soit isomorphe au produit  $H_1 \times H_2$  de deux groupes de Lie. On peut alors considérer  $H_1$  (en fait  $H_1 \times \text{Identité}$ ) comme sous groupe de  $G$  et on a une projection  $G/H_1 \mapsto G/(H_1 \times H_2)$  de fibre  $H_2$ . L'action de  $H_2$  (à droite) sur  $G/H_1$  est bien définie car  $H_1$  et  $H_2$  commutent, et donc  $(gH_1)h_2 = (gh_2)H_1$  lorsque  $h_2$  appartient à  $H_2$ . Vu la diversité des cas à considérer nous n'énoncerons aucun résultat précis dans ce cas. Néanmoins nous énoncerons les trois remarques suivantes :

1. "En général" la situation précédente conduit à un fibré principal  $H_2 \longrightarrow G/H_1 \longrightarrow G/(H_1 \times H_2)$  de groupe structural  $H_2$ .
2. Bien souvent, et en particulier lorsque  $G$  est un groupe simple, le sous groupe  $H$  considéré n'est pas isomorphe au produit  $H_1 \times H_2$  de deux groupes de Lie, mais au quotient d'un tel produit par un groupe discret (on a donc  $\text{Lie}H = \text{Lie}H_1 \oplus \text{Lie}H_2$  au niveau des algèbres de Lie). Dans ce cas, le résultat "général" précédent est valable à condition de quotienter correctement par le groupe discret approprié.
3. Le lecteur pourrait être également tenté de considérer des doubles classes  $K \backslash G/H$  où  $H$  et  $K$  sont deux sous groupes de  $G$ . Attention : la projection  $G/H \mapsto K \backslash G/H$  ne définit en général pas une fibration

principale, ni même une fibration, car le type topologique des fibres (ou même la cardinalité) peut varier d'un point à l'autre de la base.

Afin de conclure cette sous section consacrée aux exemples par un théorème précis concernant les fibrations principales d'espaces homogènes, nous considérons maintenant le cas suivant.

**Fibration principale de  $G/H$  en groupes  $N|H$  au dessus de  $G/N$ ,  $N$  étant le normalisateur de  $H$  dans  $G$**

Soit  $H$  un sous groupe de Lie du groupe de Lie  $G$  et soit  $N$  son normalisateur dans  $G$ . On rappelle que  $N = \{n \in G | nH = Hn\}$ ; en d'autres termes,  $N$  est le plus grand sous groupe de  $G$  dans lequel  $H$  est un sous groupe normal (on dit aussi sous groupe distingué).  $H$  étant normal dans  $N$ , il s'ensuit que les classes à gauche et à droite de  $N$  par rapport à  $H$  coïncident (voir ci-dessus la définition de  $N$ ) et que l'espace homogène  $N|H = N/H = H \setminus N$  possède une structure de groupe. Par ailleurs,  $N$  agit à droite sur  $G/H$ : soit  $gH \in G/H$  et  $n \in N$ ; alors  $gHn = gnH \in G/H$ . Cette action n'est pas fidèle car les éléments de  $H$  lui-même n'agissent pas: si  $h \in H$ , alors  $gHh = gH$ . Le fait de quotienter  $N$  par  $H$  rend précisément cette action fidèle. On peut se représenter les actions de  $G$  à gauche de  $G/H$  et de  $N|H$ , à droite de  $G/H$  par le schéma :

$$G \longrightarrow G/H \longleftarrow N|H$$

En utilisant seulement l'action à droite, on obtient ainsi une fibration principale dont l'espace total est  $G/H$  et le groupe structural est  $N|H$ , il est facile de voir que la base de la fibration est l'espace homogène  $G/N$  (voir figure 3.11).

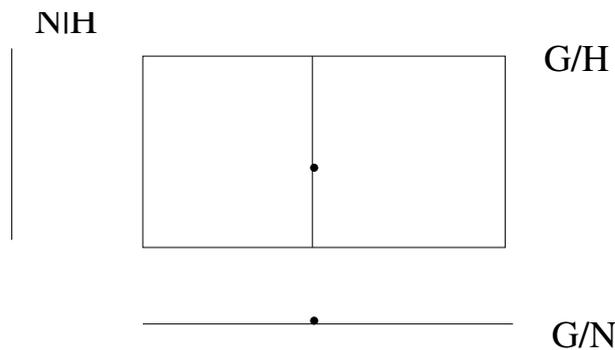


FIGURE 3.11 – Fibration principale associée à l'action du groupe  $N|H$  sur l'espace homogène  $G/H$

Ce type de fibration principale est également à l'origine d'une multitude d'exemples. Les fibrations de Hopf des sphères au dessus des espaces projectifs réels, complexes ou quaternioniques sont d'ailleurs de ce type. En effet, on a

$$\begin{aligned}
 G = SO(n) \quad H = SO(n-1) \quad N = SO(n-1) \times \mathfrak{Z}_2 \quad N|H = \mathfrak{Z}_2 \\
 G/H = S^{n-1} \quad G/N = \mathfrak{R}P^n \\
 G = SU(n) \quad H = SU(n-1) \quad N = SU(n-1) \times U(1) \quad N|H = U(1) \\
 G/H = S^{2n-1} \quad G/N = \mathfrak{C}P^{n-1} \\
 G = Sp(n) \quad H = Sp(n-1) \quad N = Sp(n-1) \times SU(2) \quad N|H = SU(2) \\
 G/H = S^{4n-1} \quad G/N = \mathfrak{H}P^n
 \end{aligned}$$

et on peut illustrer les fibrations correspondantes par la figure 3.12

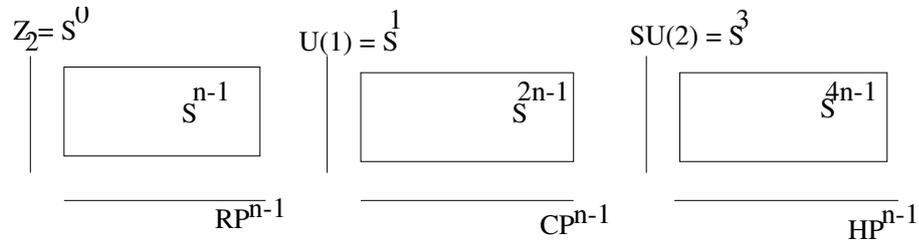


FIGURE 3.12 – Fibrations de Hopf des sphères

On se souvient aussi que  $Z_2 \equiv S^0$ ,  $U(1) \equiv S^1$  et  $SU(2) \equiv S^3$ ; ainsi les trois fibres types représentées sur la figure 3.12 sont non seulement des groupes, mais aussi des sphères.

Le lecteur pourra fabriquer aisément d'autres exemples de ce type en choisissant, pour tout groupe  $G$  donné, un sous groupe  $H$  qui ne soit pas trop "gros" (de façon à ce que  $N|H$  ne soit pas trop trivial). Voici un dernier exemple de ce type qui utilise les groupes de Lie exceptionnels :  $G = E_8$ ,  $H = E_6$ ,  $N = (E_6 \times SU(3))/\mathfrak{Z}_3$ ,  $N|H = SU(3)/\mathfrak{Z}_3$ .

### Fibrations exceptionnelles des sphères et des espaces projectifs

Il existe des fibrations exceptionnelles des sphères et des espaces projectifs qui ne sont pas liées aux inclusions de groupes unitaires, orthogonaux ou symplectiques (forme compacte) c'est à dire aux structures réelles, complexes ou quaternioniques. Certaines de ces fibrations sont liées à l'existence de l'"algèbre" non-associative des octaves de Cayley  $\mathcal{O}$  (*octonions*). On sait que pour  $n = 1, 2, 4, 8$  (et ce sont les seules valeurs possibles), il existe une opération bilinéaire  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$  sans diviseurs de zéro (c'est à dire que

$a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$ ), conduisant à la définition des corps  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{H}$  et des octaves  $\mathcal{O}$ .

Certaines des fibrations mentionnées ici ne sont pas des fibrations principales (en particulier la fibre type n'est pas un groupe) mais elles y ressemblent beaucoup (on sait que la sphère  $S^7$ , par exemple, est presque un groupe. . .) Nous donnons ici une liste de fibrations qui sont à la fois intéressantes et célèbres (la fibration de Hopf exceptionnelle de  $S^{15}$  !) bien qu'elles ne s'inscrivent pas logiquement toutes dans cette section puisqu'il ne s'agit pas toujours de fibrations principales. Nous ne les utiliserons pas dans la suite et ne les mentionnons que pour des raisons culturelles, en espérant que le lecteur pourra y retourner (soit-dit en passant, il reste à étudier de nombreux problèmes intéressants concernant ces objets).

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{fibre} & \longrightarrow & \text{espace total} & \longrightarrow & \text{base} \\
 \\
 S^7 & \longrightarrow & S^{15} & \longrightarrow & S^8 \\
 Spin(7) & \longrightarrow & Spin(9) & \longrightarrow & S^{15} \\
 SU(3) & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & S^6 \\
 \mathfrak{C}P^1 = S^2 & \longrightarrow & \mathfrak{C}P^{2n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{H}P^n \\
 Spin(9) & \longrightarrow & F_4 & \longrightarrow & OP^2
 \end{array}$$

## 3.3 Fibrés associés

### 3.3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, à une variété différentiable donnée, on peut attacher l'ensemble de tous les repères, et cet ensemble, qu'on désigne sous le nom de *fibré des repères* possède une structure d'espace fibré principal. Il est d'autres ensembles qu'on peut attacher à une variété donnée, par exemple, l'ensemble de tous ses vecteurs tangents, ou l'ensemble de tous ses tenseurs de type donné. Ces différents ensembles sont, d'une façon que nous allons rendre précise, "associés" au fibré des repères, en ce sens que le groupe structural — le groupe linéaire dans ce cas — agit également sur les composantes des vecteurs, tenseurs etc

Plus généralement, nous allons définir des fibrés associés en "remplaçant" le groupe structural d'un fibré principal par un ensemble sur lequel ce groupe opère. D'un certain point de vue, on peut dire que les groupes eux-mêmes n'ont un intérêt que parce qu'ils agissent (opèrent) sur des ensembles bien choisis et cette théorie des actions de groupe — que nous avons sommairement décrite dans la deuxième partie de cet ouvrage — est particulièrement riche lorsqu'il s'agit d'une action linéaire sur un espace vectoriel (théorie des

représentations). Les groupes sont donc des “machines à agir sur des espaces”. D’une façon analogue, nous allons considérer les fibrés principaux comme des “machines à fabriquer des fibrés associés” et la théorie sera particulièrement riche lorsque ces fibrés associés seront fabriqués à l’aide d’une représentation de groupe sur un espace vectoriel (théorie des fibrés vectoriels).

### 3.3.2 Espaces fibrés associés généraux

Soit  $P \xrightarrow{\pi} M$  un espace fibré principal (à droite), de groupe structural  $G$ , et soit  $\rho$  une action (à gauche) de  $G$  sur un ensemble  $F$ . On obtient alors une relation d’équivalence sur  $P \times F$  en disant que  $(z, f) \in P \times F$  est équivalent à  $(z', f') \in P \times F$  s’il existe un élément  $g$  de  $G$  qui soit tel que  $z' = zg$  et  $f' = \rho(g^{-1})f$ . L’ensemble quotient  $E = P \times_G F$  prend le nom de fibré associé à  $P$  via l’action de  $G$  sur  $F$ . En d’autres termes, on identifie  $(z, f)$  avec  $(zg, \rho(g^{-1})f)$ . Cette définition un peu abstraite ne devrait pas rebuter le lecteur, en effet elle correspond à une situation bien connue : supposons l’action  $\rho$  fixée une fois pour toutes et notons  $g^{-1}.f$  l’objet que nous notons un peu plus haut  $\rho(g^{-1})f$  ; par ailleurs, désignons par  $z.f$  la classe de  $(z, f)$  ; l’élément  $u = z.f$  de  $E$  n’est donc rien d’autre que l’objet géométrique qui possède les “composantes”  $f$  dans le “repère”  $z$  et les “composantes”  $g^{-1}.f$  dans le “repère”  $zg$ , en effet,  $u = z.f = zg.g^{-1}.f$ . On voit donc ici que  $u$  généralise la notion classique et élémentaire de “vecteur”. Nous verrons un peu plus loin comment récupérer la notion déjà introduite de vecteur tangent à une variété par cette construction.

L’espace  $E$  est bien un espace fibré et on a une projection, encore notée  $\pi$ , de  $E$  sur  $M$ , définie par  $\pi(z.f) = \pi(z)$  où le  $\pi$  du membre de droite se réfère à la projection dans le fibré principal correspondant. Il est bien clair que cette définition ne dépend pas du choix du représentant choisi (puisque les différents  $z$  possibles sont tous dans la même fibre!) On se souvient, par ailleurs, qu’il est parfaitement légitime et non ambigu de noter le point  $x = \pi(z)$  de  $M$  sous la forme  $x = zG$  puisqu’il existe une correspondance bi-univoque entre points de  $M$  et fibres de  $P$ . Par ailleurs, la fibre de la nouvelle projection  $\pi$  (dans  $E$ ) étant, par construction, homéomorphe à  $F$ , on a donc, de fait, “remplacé”  $G$  par  $F$ , ce qui justifie de représenter cette construction, associant  $E$  à  $P$ , par la figure suivante (fig. 3.13) :

On dit que  $G$  est le groupe structural du fibré associé  $E$  (attention, dans le cas des fibrés associés, le groupe structural  $G$  n’a aucune raison d’être difféomorphe à la fibre type  $F$ ). Notons enfin que  $\dim E = \dim M + \dim F$ .

Avant de donner quelques exemples de tels espaces, il importe de noter que, sauf exceptions, le groupe structural  $G$  n’agit pas sur le fibré associé  $E$  puisque  $E$  est précisément obtenu via un quotient de l’action simultanée de  $G$

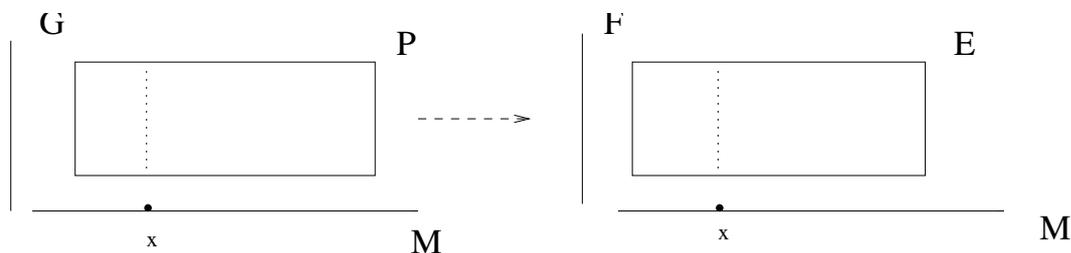


FIGURE 3.13 – Passage d'un fibré principal à un fibré associé

sur  $P$  (c'est à dire sur les “repères”) et sur  $F$  (c'est à dire les “composantes”).

Une situation familière, bien connue du lecteur, nous est fournie par l'exemple des espaces vectoriels :

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ; les éléments de  $E$  sont nos vecteurs familiers ; il faut bien voir que le groupe linéaire  $GL(n, \mathfrak{R})$ , défini comme groupe de matrices, ne sait pas comment agir sur les vecteurs si aucune base n'a été choisie. Par contre, il sait agir sur les bases de  $E$  (il fait passer d'une base à l'autre) et, une base étant choisie, il sait également agir sur les composantes des vecteurs de  $E$ . Il existe bien un groupe qui sait agir sur les vecteurs eux-mêmes, c'est le groupe  $Aut E$  des automorphismes de  $E$ , mais ce groupe ne peut s'identifier à  $GL(n, \mathfrak{R})$  que moyennant le choix d'une base. Un espace vectoriel usuel n'est autre chose qu'un espace fibré sur un point (la base est un point et la fibre s'identifie à l'espace vectoriel lui-même). Après quelques moments de réflexion passés à examiner ce cas assez trivial, mais instructif, le lecteur pourra sans doute se demander quel est l'objet généralisant  $Aut E$  lorsqu'on passe de la situation bien connue évoquée ci-dessus au cas des espaces fibrés plus généraux où la base est, en général, une variété. Il se trouve que ce groupe  $Aut E$  admet une généralisation, c'est à dire qu'il existe bien un groupe qui agit sur  $E$  : c'est un objet désigné sous le nom de *groupe de jauge* et son étude fera l'objet de la section 3.6.2. Nous verrons qu'il est, en général, de dimension infinie.

Une des conclusions que nous voulons tirer de la présente discussion est la suivante : le groupe structural  $G$  d'un fibré associé n'agit pas sur l'espace fibré associé en question ; il y a bien un groupe  $Aut E$  qui agit sur  $E$ , mais ce groupe ne coïncide pas avec  $G$ .

### 3.3.3 Espaces fibrés en espaces homogènes, associés à un fibré principal de groupe structural $G$

Soit  $P = P(M, G)$  un fibré principal et  $H$  un sous groupe de Lie du groupe structural  $G$ . On considère l'action à gauche de  $G$  sur l'espace homogène  $F = G/H$  et on construit, en suivant la méthode de construction générale des fibrés associés, l'ensemble  $E = P \times_G G/H$ . Les fibres de  $E$  sont difféomorphes à l'espace homogène  $G/H$  et la base est toujours  $M$ . La dimension de  $E$  est donc égale à  $\dim M + \dim G/H = \dim M + \dim G - \dim H$  et on peut représenter  $E$  à l'aide de la figure suivante (fig. 3.14) :

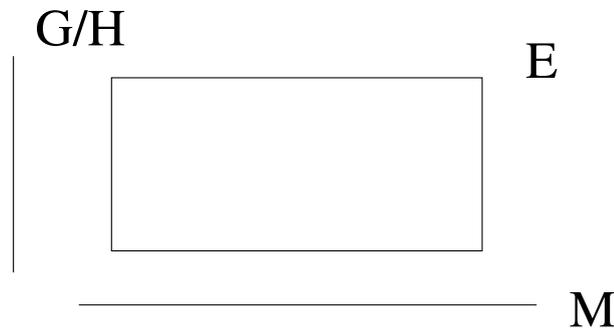


FIGURE 3.14 – Fibré associé en espaces homogènes

On peut noter  $E = P \bmod H$  ou simplement  $E = P/H$ .

A l'aide de cette méthode générale et des exemples de fibrés principaux donnés précédemment, on peut ainsi fabriquer une foule de nouveaux espaces. En voici quelques exemples :

### 3.3.4 Fibration principale relative à un fibré quotient

La figure ci-dessous (3.16), le fait que  $\dim P = \dim E + \dim H$  et le fait que  $G$  soit lui-même un  $H$ -fibré principal au dessus de  $G/H$ , suggèrent que l'espace total  $P$  du fibré principal  $P(M, G)$  dont on est parti peut également être considéré comme fibré principal  $P(E, H)$  de fibre  $H$  au-dessus du fibré associé  $E = P \times_G G/H$ . Il en est effectivement ainsi.

Soit  $z \in P(M, G)$ , on considère l'application  $p : P \mapsto E = P \times_G G/H = P \bmod H$  définie par  $p(z) = (z, eH)$ , où  $e$  désigne l'élément neutre du groupe  $G$ . La fibre passant par  $z$  de cette application est simplement  $zH$  puisque

$$\forall h \in H, p(zh) = (zh, eH) = (z, heH) = (z, eH) = p(z)$$

On obtient donc ainsi un nouveau fibré principal  $Q(E, H)$  possédant le même espace total que  $P(M, G)$  mais cette fois-ci avec une base  $E = P \bmod H$  et

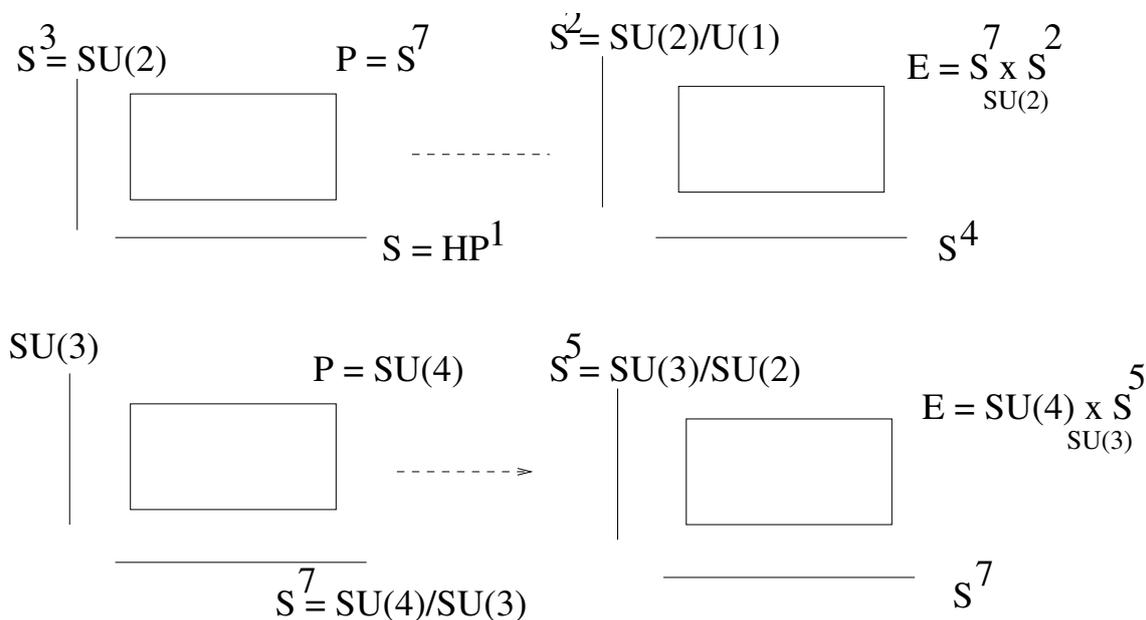


FIGURE 3.15 – Exemples de fibrés associés en espaces homogènes

un groupe structural  $H$ . Pour tout choix d'un sous groupe  $H$  de  $G$ , on obtient ainsi une deuxième fibration principale de l'espace  $P$  représentée par la figure (3.16).

### 3.3.5 Espaces fibrés en ... espaces fibrés

Voici une famille d'exemples assez surprenante : on se donne  $P_1 = P_1(M_1, G)$  et  $P_2(M_2, G)$ , deux espaces fibrés principaux possédant le même groupe structural. On supposera, de plus, que  $P_1$  est un espace fibré à droite —comme d'habitude— mais que  $P_2$  est un espace fibré à gauche, ce qui n'est pas vraiment une restriction puisqu'on peut toujours passer d'une action à droite à une action à gauche (voir le chapitre sur les actions de groupes). On va alors fabriquer un fibré associé en choisissant  $P = P_1$ ,  $F = P_2$  et en suivant la méthode générale de construction des fibrés associés. On obtient ainsi un espace  $E = P_1 \times_G P_2$  dont la base est  $M_1$  et dont la fibre type est  $P_2$ .

Voici un exemple de cette construction. Soit  $P_1 = G = P_1(G/H, H)$ , un groupe de Lie fibré en sous groupes de type  $H$  au dessus de  $G/H$  et  $P_2 = K = P_2(H \setminus K, H)$ , un autre groupe de Lie fibré en sous groupe de type  $H$  au dessus de  $H \setminus K$  ; on fabrique alors  $E = G \times_H K$  qui a pour base  $G/H$  et pour fibre type  $K$ . Une situation encore plus particulière correspond au

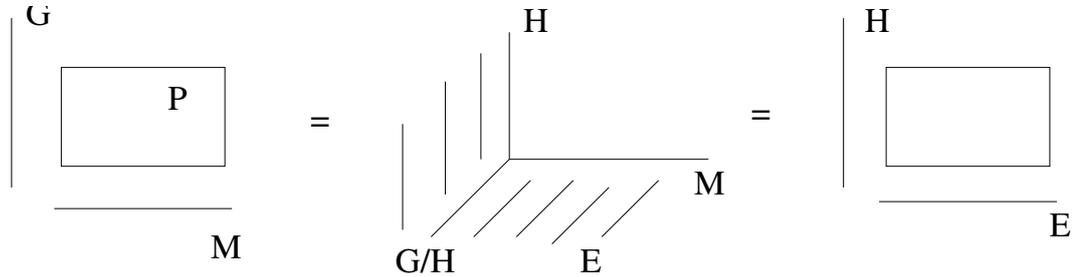


FIGURE 3.16 – Deuxième fibration principale de  $P$  : les espaces  $P(M,G)$  et  $P(E,H)$

choix  $G = K$ .

### 3.3.6 Le fibré adjoint $E = Ad P$

Soit  $P = P(M,G)$  un fibré principal. On peut faire agir  $G$  sur lui-même via l'action adjointe  $g \in G$ ,  $Ad(g)k = gkg^{-1}$ . On choisit alors  $F = G$ ,  $\rho = Ad$ , et on construit  $E = P \times_{Ad} G$ , fibré noté habituellement  $Ad P$ . Cet espace fibré associé a ceci de particulier que sa fibre type est un groupe de Lie — c'est le groupe structural lui-même — et donc, au niveau du "dessin", rien ne le distingue de  $P$ , puisqu'ils ont tous deux même base  $M$  et même fibre type  $G$ . En revanche,  $G$  opère, comme il se doit, sur le fibré principal  $P$ , alors qu'il ne sait pas agir sur  $Ad P$ . Cet exemple illustre bien la nécessité d'imposer la condition 2 dans la définition des fibrés principaux (voir section 3.2.1). A tout fibré principal  $P$ , on peut donc associer un *fibré en groupes*  $Ad P$ , dont l'importance s'avérera essentielle (nous verrons plus tard que les sections de  $Ad P$  sont les *transformations de jauge*). Notons pour terminer que  $G$  agit non seulement sur lui-même par l'action adjointe  $Ad$  mais aussi sur  $Lie(G)$  par l'action adjointe  $ad$  définie par  $ad(g)X = gXg^{-1}$ , où  $X$  appartient à l'algèbre de Lie de  $G$ . La construction générale peut encore être effectuée dans ce cas, et on fabrique ainsi le fibré associé  $ad P = P \times_G Lie(G)$  qui est un fibré en algèbres de Lie, de base  $M$ .

### 3.3.7 Le rôle du normalisateur

- On vient de construire un nouvel espace fibré en faisant agir  $G$  sur lui-même par l'action adjointe. On pourrait se demander pourquoi ne pas faire tout simplement agir  $G$  sur lui-même par multiplications à gauche, et fabriquer le fibré associé correspondant. Bien sur, on le

peut, mais alors, on n'obtient ainsi rien de neuf! En effet, partons de  $P = P(M, G)$ , fibré principal (à droite) et construisons  $E = P \times_G G$  via l'action (multiplication) à gauche de  $G$  sur  $G$ . La prise du quotient identifie ces deux actions —à droite de  $P$  et à gauche de  $G$ — et ces deux actions s'annihilent donc mutuellement (voir la remarque en fin de section 3.3.2). Par contre, il existe encore une action de  $G$  à droite de la fibre  $F = G$ , de sorte que l'espace obtenu  $E$  s'identifie canoniquement à  $P$  lui-même. La construction n'offre donc aucun intérêt.

- Dans le cas de fibrations en espaces homogènes du type  $E = P \times_G G/H$ , nous avons vu que l'action de  $G$  disparaissait, *en général*, au niveau de  $E$ . L'exemple qui précède (où  $H$  se déduit à l'identité) offre un bon contre-exemple, mais il s'agit là d'une situation un peu extrême. . . On pourrait se demander s'il existe des situations intermédiaires, c'est à dire des situations où il existe encore une certaine action à droite au niveau du fibré associé  $E$ . La réponse est simple et a déjà été trouvée dans notre étude succincte des espaces homogènes des groupes de Lie : l'espace  $G/H$  est toujours muni d'une action de  $G$  évidente, du côté gauche, mais également d'une action à droite du groupe  $N|H$  où  $N$  désigne le normalisateur de  $H$  dans  $G$ ; en effet, on peut écrire  $(gH)n = (gn)H$  si  $n$  est un élément de  $N$ . Schématiquement, on a

$$G \rightarrow G/H \leftarrow N|H$$

Le groupe  $N|H$  agit donc toujours, à droite, sur l'espace fibré  $E = P \times_G G/H$ . Bien souvent, ce groupe  $N|H$  est discret, mais il peut ne pas l'être. On a également le cas extrême où  $N$  et  $G$  coïncident; dans un tel cas,  $H$  est sous groupe distingué de  $G$ , l'espace homogène  $G/H$  est un groupe, et  $E$ , muni de cette action à droite, devient un fibré principal. Dans le cas général où  $N$  et  $G$  sont distincts, et où  $H$  n'est pas trivial, il faut se rappeler (voir section 3.2.7) que  $G/H$  est lui même un  $N|H$  fibré principal au dessus de  $G/N$ ; on fabrique ainsi une projection de  $E$  sur  $M \times G/N$  et  $E$  peut alors être considéré comme  $N|H$  fibré principal au dessus de  $M \times G/N$ .

### 3.3.8 Les espaces fibrés vectoriels

“A tout seigneur, tout honneur”, voici les espaces fibrés vectoriels, espaces qui tiennent une place de choix dans la théorie des espaces fibrés, et dont l'étude peut se faire (et se fait souvent) de façon indépendante de la notion de fibré principal. Dans notre approche, cependant, les fibrés vectoriels sont

des espaces fibrés associés comme les autres, à cette différence près que la fibre  $F$  choisie est un espace vectoriel ( $\mathfrak{R}^n$  ou  $\mathfrak{C}^n$ ) et que l'action  $\rho$  de  $G$  sur  $F$  est une représentation de  $G$  sur cet espace vectoriel. Nous devons donc nous répéter : soit  $P = P(M, G)$  un fibré vectoriel et  $\rho$  une représentation de  $G$  sur l'espace vectoriel  $F$  ; on construit le fibré vectoriel  $E = P \times_G F$ . Les éléments  $\vec{v}$  de  $E$  sont vraiment ici des “vecteurs” (gardons la flèche pour le moment) et on pourra sans danger —et avec profit— utiliser une notation “avec des indices”. Comme on l'a vu en section 3.3.2, l'élément  $\vec{v}$  de  $E$  peut s'écrire  $\vec{v} = (\epsilon).(v) = (\epsilon g).(\rho(g^{-1}v))$ , avec  $\epsilon \in P$  et  $v \in F$ , ce qui se lit “ $\vec{v}$  possède les composantes  $(v)$  dans le repère  $(\epsilon)$  et les composantes  $(\rho(g^{-1}v))$  dans le repère  $(\epsilon g)$ ”. Si on introduit des indices, on écrira  $\vec{v} = \epsilon_i v^i$  où les  $v^i$  sont des nombres réels ou complexes et où  $\{\epsilon_i\}$  désigne un élément de  $P$ , c'est à dire un repère généralisé au point  $x$ , repère qui peut, dans les cas simples (cas où  $\rho$  désigne une représentation fondamentale de  $G$ , par exemple) être considéré comme base de la fibre au point  $x$ . Schématiquement, on a la figure 3.17

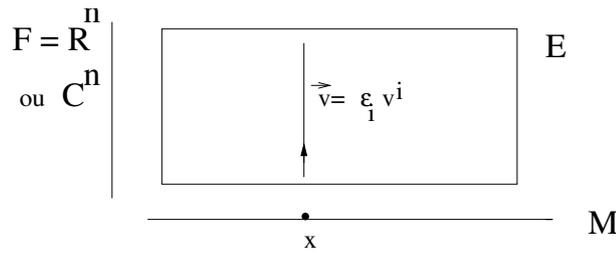


FIGURE 3.17 – Espace fibré vectoriel

Le fibré vectoriel est dit réel ou complexe suivant que  $F = \mathfrak{R}^n$  ou  $\mathfrak{C}^n$  et on pourra écrire  $E = E(M, F)$ . Le lecteur aura deviné que la notation utilisée ici permet de nommer la base, la fibre et l'espace total correspondant.

L'exemple fondamental est celui fourni par le fibré tangent à une variété  $M$ . Nous avons déjà défini cet espace de façon élémentaire au premier chapitre. Il s'introduit ici de façon parfaitement naturelle : Soit  $P = FM$  le fibré principal des repères linéaires sur  $M$  ; le groupe structural est  $G = GL(m, \mathfrak{R})$  avec  $m = \dim M$ . On considère la représentation fondamentale de  $G$  sur  $\mathfrak{R}^m$  et on construit le fibré tangent  $TM = FM \times_{GL(m, \mathfrak{R})} \mathfrak{R}^m$  comme fibré associé à  $FM$ . Les éléments de  $TM$  sont, par définition, des vecteurs tangents qu'on note  $v = \epsilon_\mu \cdot v^\mu$ , où  $\epsilon_\mu$  désigne un élément de  $FM$ , c'est à dire aussi une base de  $T(M, x)$ , l'espace tangent en  $x$ , c'est à dire la fibre de  $TM$  au dessus de  $x \in M$ . On décide également de ne plus mettre de flèche sur les vecteurs. Noter que nous écrivons les composantes  $v^\mu$  de  $v$  à droite de la base  $\epsilon_\mu$  de

façon à rester compatible avec la notation générale que nous avons introduite précédemment pour les espaces fibrés associés. Soit  $\Lambda = (\Lambda_\mu^\nu)$  une matrice de  $GL(m, \mathfrak{R})$ , on retrouve alors la propriété bien connue

$$v = \epsilon_\mu v^\mu = (\epsilon_\nu \Lambda_\mu^\nu)(\Lambda^{-1\mu}_\rho v^\rho)$$

Les tenseurs contravariants et covariants de tous ordres, qui ne sont autres que les éléments de  $(TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}$  déjà introduits au premier chapitre s'interprètent ici comme des éléments des espaces fibrés vectoriels  $FM \times_G F$  où  $F$  désigne la puissance tensorielle appropriée de  $\mathfrak{R}^m$  et où  $GL(m, \mathfrak{R})$  agit sur  $F$  par la représentation tensorielle correspondante.

Les exemples qui précèdent sont d'une utilisation courante en physique de l'espace-temps (théorie de la gravitation) mais il faut bien voir qu'il n'y a pas grande différence conceptuelle entre vecteurs de l'espace temps et ... quarks ! En effet, en théorie des interactions fortes, par exemple, on considère un fibré principal  $P$  de groupe structural  $SU(3)$  au dessus de l'espace-temps  $M$ , on choisit alors l'action de  $SU(3)$  sur  $\mathfrak{C}^3$  et on construit le fibré vectoriel associé  $P \times_{SU(3)} \mathfrak{C}^3$  ; un quark au point  $x$  est alors décrit par un élément de ce fibré vectoriel. Nous reviendrons plus loin sur ces exemples utilisés en physique.

### 3.3.9 Trivialité des fibrés vectoriels, variétés parallélisables

Revenons un peu sur la notion de trivialité déjà étudiée, dans le cas des fibrés principaux, en section 3.2.5. On se souvient qu'une condition nécessaire et suffisante, pour assurer la trivialité d'un fibré principal  $P$ , est l'existence d'une section globale. Contrairement au cas des fibrés principaux, l'existence, pour un fibré vectoriel, de sections globales, est une propriété évidente : tout fibré vectoriel, trivial ou non, possède des sections globales, par exemple la section nulle. Ce n'est donc pas ainsi qu'on détecte la trivialité. Par contre, nous avons vu que, d'une certaine façon, on pouvait considérer un élément du fibré principal  $P$  comme une base dans une certaine fibre du fibré associé  $E$ . L'existence pour  $P$  d'une section globale équivaut donc, pour  $E$ , à l'existence de  $n$  sections indépendantes en tout point de  $M$  ( $n$  désignant ici la dimension de la fibre type). On dit qu'une variété est *parallélisable* si son fibré tangent est trivial. De façon générale, les groupes de Lie sont des variétés parallélisables. En effet la donnée d'une base dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe  $G$  détermine  $n = \dim(G)$  champs de vecteurs indépendants en tous points de  $G$  (les champs invariants à gauche associés). On voit ainsi que le fibré tangent  $TG$  possède  $n$  sections indépendantes (il est donc trivial), et que, ce qui revient au même, le fibré principal  $FG$  (le fibré principal des repères sur la variété  $G$ , fibré dont le groupe structural est  $GL(n)$ )

possède une section globale. Les groupes ne sont pas les seules variétés parallélisables ; l'exemple le plus célèbre de variété ne possédant pas de structure de groupe mais étant néanmoins parallélisable est sans doute celui de la sphère  $S^7$  (seules les sphères  $S^0$ ,  $S^1$  et  $S^3$  possèdent une structure de groupe). La démonstration de cette propriété repose sur l'utilisation du produit de Cayley dans  $R^8$  (l'“algèbre” des octonions). Les sphères  $S^n$  de dimension  $n = 0, 1, 3, 7$  sont les seules sphères à être parallélisables. Signalons sans démonstration quelques autres exemples de variétés parallélisables : les variétés de Stiefel complexes  $SU(n)/SU(k)$  (en excluant les sphères, c'est à dire en supposant  $k \neq n - 1$ ), les espaces homogènes qui sont des quotients de  $SU(n)$  par des sous-groupes du type  $SU(2) \times \dots \times SU(2)$  (à condition d'exclure une seule exception, la sphère  $S^5 = SU(3)/SU(2)$ ), les quotients du type  $Sp(n)/SU(2)$ , l'espace homogène  $SU(4)/H$  où  $H$  est le sous-groupe de  $SU(4)$  isomorphe à  $SU(2)$  constitué des matrices du type  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , avec  $A \in SU(2)$ .

### 3.3.10 Sections de fibrés associés et champs

- Soit  $P = P(M, G)$  un fibré principal et  $E = E(M, F)$  un fibré associé . Nous savons ce qu'est une section  $\sigma$  d'un espace fibré, à savoir une application différentiable de  $M$  dans  $P$ , ou dans  $E$ , telle que  $\pi \circ \sigma$  soit l'identité de  $M$ ,  $\pi$  désignant la projection du fibré correspondant. L'ensemble des sections globales est quelquefois vide (cas des fibrés principaux non triviaux) mais on sait qu'un fibré vectoriel admet de nombreuses sections globales. Soit  $\Gamma E$  l'ensemble de ces sections. Dans le cas où  $E$  est le fibré tangent  $TM$  d'une variété, il est évident qu'une section n'est autre qu'un champ de vecteurs ; de la même façon, les champs de tenseurs d'ordre supérieur sont également des sections de fibrés vectoriels appropriés.
- En physique, les champs de matière classiques sont toujours décrits par des sections de fibrés associés (le mot “classique” signifiant ici qu'on fait allusion aux théories de champs classiques et non aux théories de champs quantiques). C'est ainsi qu'un champ de quarks, par exemple, est une section d'un fibré à fibres  $\mathcal{C}^3$ , mentionné au paragraphe précédent, et que les champs de matière des “modèles  $\sigma$  non linéaires” sont des sections de fibrés en espaces homogènes. Pour cette raison, on dira quelquefois *champ de matière* au lieu de “section de fibré associé”. L'ensemble  $\Gamma E$  est donc l'espace des champs de matière caractérisé par le fibré  $E = E(M, F)$ .
- Il existe au moins quatre descriptions possibles d'un tel champ de

matière ; illustrons ces quatre descriptions dans le cas des champs de vecteurs.

1. On peut considérer  $x \in M \rightarrow v(x) \in E$  comme une section de  $E$  (cf. supra) et on écrit  $\vec{v}(x) = \epsilon_\mu(x).v^\mu(x)$ .
2. On peut considérer  $v$  (laissons tomber les flèches !) comme une application de  $P$  dans  $F$  (et non plus de  $M$  dans  $E$ ) qui, au repère  $\epsilon = (\epsilon_\mu)$ , un élément de  $P$ , associe le  $n$ -uplet de composantes  $v^\mu$  (un élément de  $F$ ). Ce point de vue redonne (au deuxième degré !) un sens intrinsèque à la notation “avec des indices”. Cette application de  $P$  dans  $F$  n’est pas quelconque, elle est équivariante. En effet, si le repère  $(\epsilon_\mu)$  a pour image  $v^\mu$ , il faut que le repère  $(\epsilon_\mu)g$  ait pour image  $\rho(g^{-1})v^\mu$ . Ici  $g$  et  $\rho$  désignent respectivement un élément du groupe structural et la représentation définissant le fibré associé. *Il existe une correspondance bijective entre l’ensemble des sections d’un fibré associé  $E = E(M, F)$  et l’ensemble des applications équivariantes du fibré principal correspondant  $P$  dans la fibre type  $F$ .* On peut donc identifier  $\Gamma E = \Omega^0(M, E)$  avec l’ensemble des applications de  $P$  dans  $F$  qui sont équivariantes, c’est à dire  $\Omega_\rho^0(P, F)$ . Cette identification se généralise au cas des  $p$ -formes sur  $M$  à valeurs dans les sections de  $E$  :  $\Omega^p(M, E) \sim \Omega_\rho^p(P, F)$ .
3. On peut évidemment fixer —tout au moins localement— une section de  $P$ , c’est à dire choisir un “repère mobile” et caractériser  $v(x)$  par ses composantes dans le repère choisi. C’est cette méthode qui est la plus utilisée dans les calculs pratiques (on ne regarde que  $v^\mu(x)$ ) mais il faut alors se rappeler qu’on a effectué un choix et que ce choix est d’ordinaire local.
4. Les trois descriptions ci-dessus suffisent généralement à discuter le cas de la “géométrie commutative” (la géométrie tout court ?) ou de son pendant physique, la théorie classique des champs. Cela dit, dans le cas des espaces fibrés vectoriels, il existe une quatrième description que nous n’aurons pas le loisir de discuter plus avant mais qui se généralise parfaitement au cas de la géométrie non commutative. La voici. On sait que l’ensemble des fonctions sur  $M$  constitue une algèbre (commutative) ; soit  $v$  un élément de  $\Gamma E$  (un champ de matière) et soit  $f$  une fonction sur la base, alors, il est bien évident que  $fv$  est encore un élément de  $\Gamma E$ . En d’autres termes, les champs de matière —les sections de  $E$ — constituent un module sur l’algèbre des fonctions sur  $M$  (il s’agit même d’un bimodule puisque l’algèbre des fonctions sur  $M$  est commutative et d’un bimodule particulier puisque les deux actions à droite et à

gauche coïncident).

## 3.4 Changement de groupe structural dans les fibrés principaux : élargissement et réduction

### 3.4.1 Définitions

On considère la situation où nous avons deux fibrés principaux  $Q(M, H)$  et  $P(M, G)$  avec  $H \subset G$  et  $f$ , un difféomorphisme de  $Q$  sur  $f(Q) \subset P$  tel que  $\forall z \in Q, \forall s \in H, f(zs) = f(z)s$ . En pratique il s'agira souvent d'une inclusion  $Q \subset P$ ,  $f$  n'étant autre que l'identité.

Dans une telle situation, on dit que  $P$  est un *élargissement* (ou un *prolongement*) de  $Q$  et que  $Q$  est une *réduction* de  $P$ .

Comme nous allons le voir, il est toujours possible d'élargir mais il n'est pas nécessairement possible de réduire.

### 3.4.2 Elargissement (passage de $H$ à $G$ avec $H \subset G$ )

Soit  $Q = Q(M, H)$  un fibré principal. On veut "agrandir" le fibré  $Q$  sans modifier la base  $M$  mais en agrandissant la fibre, c'est à dire en remplaçant le groupe de Lie  $H$  par un groupe  $G$  "plus grand". La construction est la suivante : on se choisit un groupe de Lie  $G$  tel que  $H \subset G$  et on construit le fibré  $P$  associé à  $Q$  défini par  $P = Q \times_H G$  où  $H$  agit sur  $G$  par multiplication à gauche. Les actions de  $H$  à droite de  $Q$  et à gauche de  $G$  s'annihilent, mais il est évident que l'espace  $P = P(M, G)$  est un  $G$ -fibré principal puisque  $G$  agit à droite de  $P$  via  $(z.k)k' = z.kk'$ , avec  $z \in Q$  et  $k, k' \in G$ . Par ailleurs, le difféomorphisme de  $Q$  sur  $f(Q)$  recherché est défini, pour  $z \in Q$ , par  $f(z) = z.e$  ( $e$  désignant l'élément neutre de  $G$ ) et on notera simplement  $f(z) = z$ .

En conclusion, le passage de  $Q(M, H)$  à  $P(M, G)$  avec  $H \subset G$  est toujours possible. On dit que  $P$  est obtenu à partir de  $Q$  par élargissement du groupe structural et que  $Q$  lui-même est une réduction de  $P$ . Notons que les représentations de  $G$  sont toujours des représentations de  $H$ , mais que le contraire n'est pas nécessairement vrai (ainsi, il faut, en général, prendre la somme directe de plusieurs représentations de  $H$  pour construire une représentation de  $G$ ); les fibrés associés à  $Q$  ne sont donc pas forcément toujours des fibrés associés à un élargissement  $P$ .

### 3.4.3 Réduction (passage de $G$ à $H$ avec $H \subset G$ )

**Méthode** Soit  $P = P(M, G)$  un fibré principal. On veut diminuer la taille de  $P$  sans modifier la base  $M$  mais en “raccourcissant” la fibre, c’est à dire en remplaçant  $G$  par un groupe “plus petit”. En d’autres termes, si on considère les éléments de  $P$  comme des repères généralisés, on veut s’intéresser uniquement à une sous-classe particulière de repères, sous-classe qui soit stable sous l’action d’un sous-groupe  $H$  de  $G$ . La méthode du paragraphe précédent ne s’applique pas car le groupe  $H(\subset G)$  n’est pas stable lorsqu’on le multiplie à gauche par des éléments de  $G$ .

Énonçons (et retenons) le résultat suivant que nous démontrerons un peu plus bas :

*Le choix d’une réduction du fibré principal  $P = P(M, G)$  à un sous-fibré  $Q = Q(M, H)$  de groupe structural  $H$ , lorsqu’il existe, n’est pas en général unique, et est caractérisé par le choix d’une section globale dans un fibré en espaces homogènes associé à  $P$ , en l’occurrence le fibré associé  $P \times_G G/H$ .*

Ce théorème est d’une importance fondamentale car il permet, comme nous allons le voir, de donner un sens précis à l’idée intuitive de “choix d’une géométrie” pour la variété différentiable  $M$ .

Preuve. Soit  $\sigma$  une section globale de  $E = P \text{ mod } H$ . Un théorème précédemment discuté (voir les diverses manières de considérer les sections de fibré associé) nous dit qu’on peut associer à  $\sigma$  une application  $\vec{\sigma}$  du fibré principal  $P$  dans la fibre type  $G/H$ , qui soit équivariante ( $\vec{\sigma}(ys) = s^{-1}\vec{\sigma}(y)$ ). Définissons  $Q = \vec{\sigma}^{-1}(eH) \subset P$ . La projection  $\pi : Q \mapsto M$  n’est autre, par définition, que la restriction à  $Q$  de la projection  $\pi$  de  $P$ . Considérons deux points  $y_1$  et  $y_2$  de la même fibre de  $Q$ , c’est à dire  $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ ; nous savons qu’il existe  $s \in G$  tel que  $y_2 = y_1s$ . Nous allons montrer qu’en fait, cet élément  $s$  appartient au sous-groupe  $H$ . En effet,

$$y_1, y_2 \in Q \Rightarrow \vec{\sigma}(y_1) = eH \text{ et } \vec{\sigma}(y_2) = eH$$

mais  $\vec{\sigma}(y_2) = \vec{\sigma}(y_1s) = s^{-1}\vec{\sigma}(y_1)$  et donc,  $eH = s^{-1}(eH)$ , ce qui montre que  $s \in H$ . Ainsi  $Q \subset P$  est un fibré principal de groupe structural  $H$ .

Réciproquement, donnons nous  $H \subset G$  et une réduction  $Q = Q(M, H) \subset P = P(M, G)$ . Définissons  $\vec{\sigma} : P \mapsto G/H$  par  $\forall y \in Q \subset P, \vec{\sigma}(y) = eH \in G/H$ . La fonction  $\vec{\sigma}$  est ainsi constante sur les fibres de  $Q$ . Soient maintenant deux points  $y_0 \in Q$  et  $y \in P$  que nous prenons

dans la même fibre de  $P$  mais nous supposons que  $y$  n'appartient pas nécessairement à  $Q$ . Il existe donc un élément  $g$  de  $G$  tel que  $y = y_0g$ , alors  $\vec{\sigma}(y) = \vec{\sigma}(y_0g) = g^{-1}\vec{\sigma}(y_0) = g^{-1}eH = g^{-1}H \in G/H$ . On a ainsi construit une application  $\vec{\sigma} : P \mapsto G/H$  équivariante sous l'action de  $G$ . Cela détermine, en vertu du théorème énoncé au 2 du 3.3.10 une section globale de  $E(M, G/H) = P \text{ mod } H$ .

### Réduction de $GL(n, \mathfrak{R})$ à $SO(n)$ : structures riemanniennes

On peut rattacher canoniquement à une variété différentiable  $M$  son fibré  $FM$  des repères linéaires. C'est un fibré principal de groupe structural  $GL(n, \mathfrak{R})$ . Choisissons maintenant une réduction à un sous-fibré de groupe structural  $SO(n)$ . Choisir une telle réduction consiste à sélectionner une certaine classe de repères, que nous appellerons *orthonormés*, telle que l'un quelconque d'entre eux puisse s'obtenir à partir de n'importe quel autre à l'aide d'une matrice du groupe orthogonal  $SO(n)$ . Par définition, une variété riemannienne ( $M$  en l'occurrence) est une variété différentiable de dimension  $n$  pour laquelle on a choisi une réduction du fibré  $FM$  des repères linéaires à un sous-fibré de groupe structural  $SO(n)$ . Le sous-fibré en question se note alors  $OFM$  ("Orthogonal Frame Bundle") et prend le nom de fibré des repères orthonormés. Le lecteur peut se demander où est la métrique dans cette approche. . . La réponse est la suivante : le tenseur métrique s'identifie précisément avec la section globale du fibré en espaces homogènes  $GL(n)/SO(n)$  qui définit la réduction (nous oublions momentanément les problèmes liés à des exigences de non dégénérescence, de positivité etc ). Noter que la dimension de cet espace homogène est égale à  $\dim(GL(n)) - \dim(SO(n)) = n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ , et ses éléments peuvent donc s'identifier, comme il se doit, à des tenseurs de rang deux complètement symétriques. Intuitivement, choisir une structure riemannienne revient à conférer une "forme géométrique" à une variété différentiable ; c'est ainsi que c'est le choix de la métrique qui fait la différence entre un ballon de foot, un ballon de rugby et . . . une bouteille de vin (bouchée !) et la multiplicité des réductions possibles coïncide avec la multiplicité des métriques riemanniennes qu'on peut choisir, pour une variété différentiable donnée. Vu l'importance de cette notion, nous y reviendrons abondamment dans le chapitre suivant.

### Réduction de $GL(2n, \mathfrak{R})$ à $GL(n, \mathfrak{C})$ : structures presque-complexes

L'idée est essentiellement la même que dans l'exemple précédent, à ceci près que  $M$  est supposé être de dimension paire et qu'on choisit maintenant une réduction du fibré des repères linéaires à un sous-

fibré dont le groupe orthogonal doit être  $SU(n)$ . Les variétés pour lesquelles on a effectué un tel choix se nomment *variétés presque-complexes* et l'analogue de la métrique est ici la donnée, en chaque espace tangent  $T(M, x)$  d'un endomorphisme  $j$  de carré égal à  $-1$ . Cet opérateur peut encore s'identifier à une section globale d'un fibré en espaces homogènes  $GL(2n, \mathfrak{R})/GL(n, \mathfrak{C})$ . Le lecteur peut sans doute se demander pourquoi on parle ici de variétés presque-complexes et non, tout simplement, de variétés complexes. Il se trouve que ces deux notions sont de nature assez différentes (et la terminologie est désormais consacrée) : la notion de structure presque-complexe est, comme on vient de le voir, analogue à la notion de structure riemannienne et est associée au choix d'une réduction du fibré des repères pour une variété différentiable ; la notion de structure complexe est, quant à elle, analogue à la notion de structure de variété topologique, de variété linéaire par morceaux ou analogue à la notion de structure différentiable elle-même (on choisit des cartes à valeur dans  $\mathfrak{C}^n$  et non plus dans  $\mathfrak{R}^n$  et on impose aux fonctions de transitions d'être holomorphes). Nous n'aurons pas le loisir, dans cet ouvrage, d'étudier la géométrie des variétés complexes ; notons simplement que la terminologie vient du fait qu'une variété complexe donnée fournit une variété différentiable qui se trouve automatiquement munie d'une structure presque-complexe (l'endomorphisme  $j$  de carré égal à  $-1$  provenant tout simplement de la multiplication par le nombre complexe  $i$ ). Le passage inverse, celui d'une structure presque-complexe à une structure complexe, n'est pas automatique car il nécessite la vérification d'une certaine condition d'intégrabilité.

On peut aussi parler de variétés presque-hermitiennes lorsque la réduction du groupe structural va de  $GL(2n, \mathfrak{R})$  à  $U(n) = O(2n) \cap GL(n, \mathfrak{C})$ . Dans ce cas, il existe une métrique  $h$  compatible avec la structure presque-complexe, en ce sens que  $h(v_1, v_2) = h(jv_1, jv_2)$ . On peut alors construire une forme hermitienne  $H(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(h(v_1, v_2) - ih(jv_1, v_2))$  et une forme presque-Kählerienne  $\omega(v_1, v_2) = h(jv_1, v_2)$ .

#### Réduction de $GL(4, n)$ à $Sp(n)$ : structures presque-quaternioniques

L'histoire est la même que dans le cas précédent et les commentaires sont analogues. La section globale du fibré en espaces homogènes  $GL(4n, \mathfrak{R})/Sp(n)$  caractérisant la réduction peut s'identifier à la donnée, en chaque espace tangent  $T(M, x)$  de trois opérateurs  $j_1, j_2, j_3$ , tous trois de carré égal à moins l'identité, et satisfaisant aux relations  $j_1j_2 = -j_2j_1 = j_3, j_2j_3 = -j_3j_2 = j_1$  et  $j_3j_1 = -j_1j_3 = j_2$ . La raison du "presque" dans le presque-quaternionique est analogue celle donnée dans

le paragraphe précédent à condition toutefois de remplacer nombres complexes par quaternions. Ici  $Sp(n)$  désigne le groupe compact des unitaires quaternioniques, quelquefois désigné par  $U(n, \mathfrak{H})$ . Nous n'aurons pas le loisir de revenir sur ce sujet dans le cadre de cet ouvrage.

**Remarques** Avant de quitter cette partie consacrée aux réductions de fibrés principaux, notons que les représentations d'un groupe  $G$  sont aussi des représentations de tout sous-groupe  $H$  de  $G$ . Ainsi donc, les fibrés associés à  $P(M, G)$  sont aussi associés à tout sous-fibré  $Q(M, H)$  avec  $H \subset G$ . Il est rassurant de savoir que le fibré tangent  $TM$  défini à partir du fibré des repères linéaires  $FM$  coïncide avec celui qu'on peut définir à partir du fibré  $OFM$  des repères orthonormés !

### 3.5 Changement de groupe structural dans les fibrés principaux : extension et quotient

Les deux sous-sections précédentes étaient, en quelque sorte, complémentaires, les deux qui suivent le seront aussi.

#### 3.5.1 Extension (passage de $G$ à $\widehat{G}$ avec $G \sim \widehat{G}/H$ )

**Méthode générale** Le problème est le suivant : on part d'un espace fibré  $P = P(M, G)$  et on veut remplacer le groupe structural  $G$  par un groupe  $\widehat{G}$  tel que  $G$  soit isomorphe à  $\widehat{G}/H$  où  $H$  est un sous-groupe distingué de  $\widehat{G}$ . Le cas le plus fréquent est celui où  $G$  est un groupe qui n'est pas simplement connexe et où on veut le remplacer par son groupe de recouvrement universel  $\widehat{G}$ .  $H$  est alors un sous-groupe discret du centre de  $\widehat{G}$  et s'identifie au groupe d'homotopie  $\pi_1(G)$  (voir le chapitre sur les groupes). Pour illustrer cette situation, voici un exemple dont l'importance physique est importante. La variété différentiable  $M$  est un modèle pour l'espace-temps et  $P$  désigne le fibré des repères orthonormés correspondant au choix d'une certaine métrique sur  $M$ . Certains champs de matière vont être représentés par des sections de fibrés associés à  $P$ . Ces fibrés seront construits à partir de représentations du groupe  $SO(n)$  (en physique quadri-dimensionnelle, généralement  $SO(3, 1)$  ou  $SO(4)$ ). Dans bien des cas, cependant, les champs de matière qui nous intéressent ne correspondent pas vraiment à des représentations de  $SO(n)$  mais à des représentations de son groupe de recouvrement universel  $Spin(n)$  c'est

à dire  $Spin(3,1) = SL(2, \mathfrak{C})$  si  $G = SO(3,1)$  et  $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$  si  $G = SO(4)$ . On se souvient en effet que les représentations de  $G$  peuvent également être considérées comme des représentations de  $\widehat{G}$  mais que certaines représentations de  $\widehat{G}$  ne correspondent à aucune représentation de  $G$  (ainsi, les spins demi-entiers correspondent à des représentations de  $SU(2)$  mais pas à des représentations de  $SO(3)$ ). Lorsque la topologie de  $M$  est triviale, le fait de “considérer des spineurs” n’offre aucune difficulté; les choses changent lorsque  $M$  cesse d’être trivial : en d’autres termes, il existe des espaces qui n’admettent pas de spineurs! A l’opposé, il existe des espaces qui admettent plusieurs types de spineurs. Nous discuterons de nouveau de ces problèmes un peu plus loin.

Revenons à un cadre plus général. On se donne  $G = \widehat{G}/H$ . On a donc un homomorphisme (surjectif) de groupe  $\widehat{G} \xrightarrow{\lambda} G$  de noyau  $H = Ker \lambda$ . On appellera “extension de fibré principal  $P = P(M, G)$  à un fibré de groupe structural  $\widehat{G}$ ” la donnée d’un fibré principal  $\widehat{P} = \widehat{P}(M, \widehat{G})$  et d’un homomorphisme de fibré  $\widehat{\lambda} : \widehat{P} \mapsto P$  qui soit compatible avec les actions respectives de  $G$  et  $\widehat{G}$  et avec l’homomorphisme de groupe  $\lambda$ ; en d’autres termes,  $\widehat{\lambda}$  doit préserver les fibres (c’est un homomorphisme de fibré) et être tel que

$$\widehat{\lambda}(\widehat{z}\widehat{k}) = z k \text{ où } \widehat{z} \in \widehat{P}, \widehat{k} \in \widehat{G}, z = \widehat{\lambda}(z) \text{ et } k = \lambda(\widehat{k})$$

L’existence d’une ou de plusieurs extensions correspondant à une situation donnée (c’est à dire le fibré  $P$ , le groupe  $G$ , etc ) dépend bien entendu de la situation considérée ...

Le problème de l’extension d’un fibré principal (passage de  $G$  à  $\widehat{G}$  avec  $G = \widehat{G}/H$ ) peut être décrit de façon imagée par la figure suivante (3.18).

On voit que  $\widehat{P}$  est aussi un  $H$ -fibré principal au dessus de  $P$  (voir également la discussion menée en section 3.3.4) et que  $P \sim \widehat{P}/H$ .

**Structures spinorielles** Dans le cas particulier où  $P = OFM$  désigne le fibré des repères orthonormés d’une variété riemannienne  $M$ , le groupe structural est  $G = SO(n)$  et  $\widehat{G} = Spin(n)$ . On dit que la variété  $M$  est une variété spinorielle s’il existe une extension  $\widehat{P} = \widehat{P}(M, Spin(n))$ . Choisir une structure spinorielle pour une variété riemannienne donnée  $M$  consiste à choisir une extension  $\widehat{P}$  (s’il en existe une). Le fibré  $\widehat{P}$ , s’il existe, est alors désigné sous le nom de *fibré des repères spinoriels* ou, tout simplement *fibré de spin* et dénoté  $\widehat{OFM}$ . Dans les bons cas (“bon” signifiant qu’on peut ne pas se soucier du

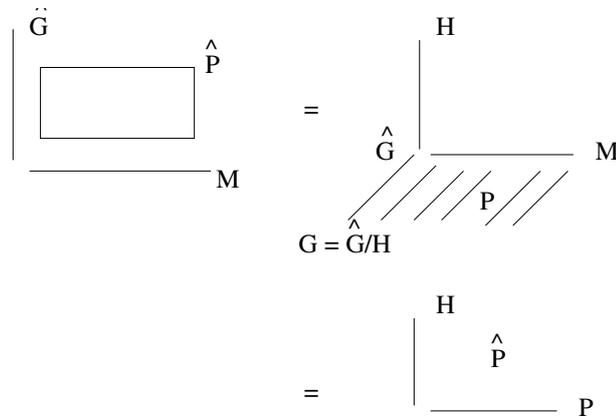


FIGURE 3.18 – Extension d’un fibré principal

problème!),  $\widehat{OFM}$  existe et est unique, à isomorphisme près. Notons encore que le choix d’une structure spinorielle est tributaire du choix d’une structure riemannienne (on choisit d’abord  $P = P(M, SO(n))$ , puis  $\hat{P} = \hat{P}(M, Spin(n))$ , mais on doit se souvenir que deux métriques distinctes définissent des fibrés  $P(M, SO(n))$  différents. On sait que la représentation fondamentale de  $SO(n)$  agissant sur  $\mathfrak{R}^n$  permet de fabriquer le fibré tangent  $TM = P \times_{SO(n)} \mathfrak{R}^n$  comme fibré associé à  $P$  et de définir l’ensemble des champs de vecteurs  $\Gamma TM$  comme ensemble des sections de  $TM$ . De la même façon, la représentation fondamentale de  $Spin(n)$  agissant sur  $\mathfrak{C}^s$  avec  $s = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ ,  $\lfloor n/2 \rfloor$  désignant la partie entière de  $n/2$ , permet de fabriquer le *fibré des spineurs*  $SM = \hat{P} \times_{Spin(n)} \mathfrak{C}^s$  comme fibré associé à  $\hat{P}$  et de définir l’ensemble des champs de spineurs  $\Gamma SM$  comme ensemble des sections de  $SM$ . Pour ce qui est des rappels concernant la représentation fondamentale de  $Spin(n)$ , les algèbres de Clifford, etc, voir la fin du chapitre précédent.

On montre que l’existence d’une structure spinorielle, pour une variété donnée, est liée à l’annulation d’une certaine classe caractéristique (la deuxième classe de Stiefel-Whitney). Mis à part une courte remarque du même type à la fin de cette section, ce phénomène ne sera pas discuté dans le cadre de notre ouvrage.

**Bosons et fermions** En physique théorique, on montre que, dans le cadre de la théorie quantique des champs, et en dimension égale à 4, les particules obéissant à une statistique de Fermi-Dirac (les fermions) sont des particules de spin demi-entier, alors que celles obéissant à une statistique de Bose-Einstein (les bosons) sont des particules de

spin entier. Nous n'expliquerons pas ici la signification de ce résultat célèbre (le *théorème spin-statistique*) puisque nous n'aborderons pas la théorie quantique des champs dans le cadre de cet ouvrage. Cependant, le résultat en question (qui n'est vraiment bien compris et démontré qu'en dimension 4) nous permet d'introduire la terminologie suivante en dimension quelconque : nous dirons qu'un champ est un champ bosonique s'il s'agit d'une section d'un fibré vectoriel associable au fibré des repères orthonormés d'une variété riemannienne  $M$  ; nous dirons que c'est un champ fermionique s'il s'agit d'une section d'un fibré vectoriel associable au fibré des repères spinoriels d'une variété riemannienne  $M$ , qui soit telle que la représentation correspondante (celle qui définit le fibré associé) soit une représentation de  $Spin(n)$  qui ne puisse pas être considérée comme une représentation du groupe  $SO(n)$  mais seulement comme une représentation de  $Spin(n)$ .

Notons que, bien que moins proche de notre intuition, les champs spinoriels (sections de  $SM$ ) sont plus "fondamentaux" que les champs vectoriels (sections de  $TM$ ). Ceci est déjà évident au niveau de la théorie des représentations de  $SU(2)$  : on peut construire n'importe quelle représentation de ce groupe à partir de la fondamentale (qui est *spinorielle*). Cette dernière est de dimension 2 et correspond physiquement à ce qu'on appelle un champ de spin 1/2. Par ailleurs, il est facile de voir qu'on peut construire un champ de vecteurs à partir de (deux) champs de spineurs, mais pas le contraire...

**Structure quarkique** Nous venons de discuter le cas particulier de  $G = SO(n) = Spin(n)/\mathfrak{3}_2$  mais nous aurions pu également considérer le cas de fibrés avec groupe structural  $G = SU(3)/\mathfrak{3}_3$  : le fait qu'il soit, ou non, possible, de définir des "champs de quarks" (associés à la représentation fondamentale de  $SU(3)$ , ou plus généralement des champs associés à des représentations dont la trialité est différente de zéro) pour une variété  $M$  considérée comme base d'un fibré principal  $P(M, SU(3)/\mathfrak{3}_3)$  n'est pas quelque chose d'automatique... On pourrait alors parler de "structure quarkique" !

**Structure encordée** Il ne faudrait pas croire que le groupe  $H$ , tel que  $G = \widehat{G}/H$  dont il a été question dans ce chapitre consacré aux extensions d'espaces fibrés soit nécessairement discret. C'est ainsi qu'en théorie des cordes, la variété  $M$  est remplacée par  $LM$  (le "loopspace" de  $M$ ), c'est à dire l'ensemble des applications de  $S^1$  dans  $M$ ,  $G$  est, de la même façon remplacé par  $LG$  et  $P$  par  $LP$ . L'ensemble  $LG$  est naturellement un groupe (de dimension infinie) et  $LP$  est fibré en  $LG$  au dessus de  $LM$ . Dans ce cas, toutefois, ce ne sont pas tant les

représentations de  $LG$  qui nous intéressent, mais celles d'une *extension centrale*  $\widehat{LG}$  de  $LG$  (on a  $Lie(\widehat{LG}) = Lie(LG) \oplus \mathfrak{R}$ ). Dans ce cas,  $H = U(1)$  et la question se pose de savoir si  $LP$  peut être étendu à un fibré  $\widehat{LP}$  de groupe structural  $\widehat{LG}$ . Là encore, l'existence n'est pas assurée, et, en cas d'existence, l'unicité non plus. Lorsque  $\widehat{LP}$  existe, on dit que *le fibré en boucles*  $LP$  possède une *structure encordée* ("a string structure for a loop bundle" ...).

**Interprétation cohomologique** L'existence et l'unicité (ou non) des extensions de fibrés peuvent se décrire de façon cohomologique. Cette interprétation dépasse le cadre que nous nous sommes fixés. Mentionnons seulement que l'existence de  $\widehat{P}$  peut être lié à l'annulation d'une certaine classe de cohomologie appartenant à  $H^2(M, H)$ . Dans le cas des structures spinorielles,  $H = \mathfrak{Z}_2$  et la classe en question, dont l'annulation fournit une condition nécessaire et suffisante à l'existence de  $\widehat{P}$ , s'appelle *deuxième classe de Stiefel-Whitney*. Dans le cas des structures encordées, il faut considérer  $H^2(LM, U(1))$  puisque  $LM$  est la base du fibré considéré, ce groupe de cohomologie (de  $LM$ ) peut alors être relié à  $H^3(M, \mathfrak{Z})$  et ... ceci est une autre histoire.

### 3.5.2 Quotient (passage de $G$ à $K$ avec $K \sim G|H$ , $H$ sous-groupe distingué de $G$ )

On part de  $P = P(M, G)$ , on se choisit un sous-groupe distingué  $H$  de  $G$  et on veut remplacer  $P$  par  $Q = Q(M, K)$ , avec  $K = G|H$ . Cette opération est, en un sens, inverse de celle précédemment considérée. La méthode est simple puisqu'il s'agit de "diviser"  $P$  par  $H$  en considérant l'ensemble quotient  $Q = P/H$  où l'action de  $H$  sur  $P$  est obtenue par restriction de celle de  $G$ . Il est évident que ce type de changement de groupe structural n'offre aucune difficulté, contrairement à la situation inverse décrite au paragraphe précédent. Il faut évidemment veiller à ce que  $H$  soit distingué dans  $G$ , de façon à ce que le quotient  $G|H$  soit bien un groupe. Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet puisque la discussion résulte simplement des analyses déjà effectuées dans les sections précédentes. En particulier,  $P$  est un  $H$ -fibré principal au dessus du fibré quotient  $Q$ , lequel se trouve être, également, dans ce cas particulier, un fibré principal.

## 3.6 Groupe des automorphismes. Groupe de jauge

### 3.6.1 Remarque terminologique

Nous utiliserons souvent l'expression "repère en  $x$ " —sans mettre les guillemets!— pour parler d'un point  $z$  de  $P = P(M, G)$  se projetant au point  $x$ , même si le fibré considéré n'est pas un sous-fibré de l'espace des repères mais un fibré principal quelconque au dessus de  $M$ , avec groupe de structure  $G$ . Le contexte devrait suffire à préciser s'il s'agit d'un repère de l'"espace interne" —comme disent les physiciens— c'est à dire un élément d'un fibré principal quelconque non relié au fibré  $FM$  des repères linéaires, ou, au contraire, d'un repère de l'"espace externe", c'est à dire un élément de  $FM$  (ou de  $OFM$ , ou d'un autre sous-fibré de  $FM$ ).

### 3.6.2 Automorphismes verticaux d'un espace fibré principal (définition)

- L'action du groupe structural  $G$  sur un fibré principal  $P = P(M, G)$  est une notion qui nous est maintenant familière. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux éléments de  $P$  appartenant à des fibres différentes (en d'autres termes, on considère un repère  $z_1$  en  $x_1$  et un repère  $z_2$  en  $x_2$ ) et soit  $g$  un élément de  $G$ . L'action de  $G$  —d'ordinaire un groupe de Lie de dimension finie— étant globalement définie, nous savons ce que sont les points  $z'_1 = z_1g$  et  $z'_2 = z_2g$ , mais il faut bien voir que "c'est le même  $g$ " qui agit en  $z_1$  et en  $z_2$ . Ce que nous voulons maintenant, c'est considérer des transformations plus générales (soit  $\Phi$  une telle transformation —une application de  $P$  dans  $P$ —) qui, en un sens, autorise le "petit  $g$ " qui précède, à dépendre du point  $x$  de la variété  $M$  : on veut remplacer  $g$  par  $g(x)$ , c'est à dire remplacer les *transformations de jauge globales* par les *transformations de jauge locales*. Passons maintenant à une définition précise.
- On dira que  $\Phi$  est un automorphisme vertical du fibré  $P$  si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées
  1.  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $P$ .
  2.  $\Phi$  préserve les fibres, au sens suivant : la fibre  $\pi^{-1}(x)$  au dessus de  $x$  est stable par  $\Phi$ .
  3.  $\Phi$  commute avec l'action du groupe structural  $G$ , c'est à dire que

$$\forall z \in P, \forall g \in G, \Phi(zg) = \Phi(z)g$$

- Il est immédiat de constater que l'ensemble  $\mathfrak{G}$  des automorphismes verticaux est un groupe pour la loi de composition. Nous désignerons  $\mathfrak{G}$  sous le nom de *groupe des automorphismes verticaux* du fibré principal  $P$ , ou plus simplement sous le nom de “groupe de jauge de  $P$ ”. Nous noterons également  $\mathfrak{G} = \text{Int}P = \text{Aut}_V P$ . Par l'expression “transformation de jauge” nous désignerons toujours un automorphisme vertical, c'est à dire une “transformation de jauge locale”. L'action de  $\mathfrak{G}$  commutant avec celle de  $G$ , il est commode d'écrire l'action de  $\mathfrak{G}$  à gauche et d'oublier les parenthèses, on voit alors (la notation est faite pour cela!) que

$$\Phi z g = \Phi(zg) = \Phi(z)g$$

### 3.6.3 Ecriture locale des transformations de jauge

Soit  $\Phi$  une transformation de jauge,  $z$  un élément de  $P$  et  $\sigma$  une section locale au voisinage de  $x = \pi(z) \in M$ . Le repère  $\Phi(\sigma(x))$  étant dans la même fibre (au même point!) que le repère mobile  $\sigma(x)$ , il doit être possible d'atteindre le premier à partir du second par l'action d'un élément approprié de  $G$  que nous noterons  $g(x)$ , puisque  $G$  est transitif sur les fibres. Cet élément est donc défini par l'équation  $\Phi(\sigma(x)) = \sigma(x)g(x)$  c'est à dire encore par

$$g(x) = \sigma(x)^{-1}\Phi(\sigma(x)),$$

en utilisant la notation introduite en fin de section 3.2.1. Notons que  $g(x)$  dépend non seulement de  $\Phi$  mais aussi de la section  $\sigma$  choisie; on pourrait utiliser la notation un peu lourde  ${}^\sigma g(x)$  pour désigner cet élément.

Lorsque  $P$  est trivial, on sait qu'il existe des sections globales. Soit  $\sigma$  une telle section, alors, l'équation précédente définit une application de  $M$  dans  $G$ ; réciproquement, la donnée d'une application  $g(x)$  de  $M$  dans  $G$  permet, lorsque le fibré principal est trivial, de définir, via le choix d'une section globale  $\sigma$ , une transformation de jauge  $\Phi$  par la même équation. Lorsque  $P$  est trivial, on peut donc identifier le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  avec le groupe  $\Omega^0(M, G)$  des applications différentiables de  $M$  dans  $G$ . La correspondance n'est cependant pas canonique puisqu'elle dépend du choix d'une section globale  $\sigma$ . Cette identification “explique” pourquoi les automorphismes verticaux sont désignés par les physiciens (des particules) sous le nom de “transformations de jauge locales”, le mot “local” se référant ici à la dépendance “en  $x$ ” car la transformation  $g(\cdot)$  elle-même est globalement définie lorsque  $P$  est trivial.

### 3.6.4 Deux autres définitions des transformations de jauge

- Soit  $\Phi : P \mapsto P$  une transformation de jauge. On sait que  $\Phi(z)$  est dans la même fibre que  $z$ , on doit donc pouvoir obtenir  $\Phi(z)$  à partir de  $z$  par action à droite d'un élément de  $G$  que nous désignerons par  $\phi(z)$  :

$$\Phi(z) = z \cdot \phi(z)$$

Nous obtenons donc ainsi une application  $\phi$  de  $P$  dans  $G$ , mais cette application n'est pas quelconque ; en effet, l'égalité  $\Phi(zg) = \Phi(z)g$  peut s'écrire également  $zg\phi(zg) = z\phi(z)g$  et on obtient donc la condition

$$\phi(zg) = g^{-1}\phi(z)g$$

Il est évident que  $\Phi$  et  $\phi$  se déterminent l'un l'autre ; on peut donc identifier le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  avec l'ensemble  $\Omega_{Ad}^0(P, G)$  des applications de  $P$  dans  $G$  qui sont équivariantes par l'action adjointe de  $G$ .

- La troisième définition de  $\mathfrak{G}$  résulte en fait de la précédente et de la discussion menée en section 3.3.10 (description 2). Soit, en effet  $AdP = P \times_{Ad} G$  le fibré adjoint, défini comme fibré en groupes, associé à  $P$  grâce à l'action adjointe de  $G$  sur lui-même (voir section 3.3.6), les éléments  $\vec{\phi}$  de  $AdP$  sont des classes d'équivalences  $z.k = zg.g^{-1}kg$  et les sections  $\vec{\phi}(x)$  de  $AdP$  peuvent donc s'identifier aux applications de  $P$  dans  $G$  qui sont  $Ad$ -équivariantes. Ainsi, nous pouvons également définir le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  comme l'ensemble des sections du fibré adjoint  $AdP$ .

### 3.6.5 Automorphismes quelconques d'un espace fibré principal

Soit  $P = P(M, G)$  un fibré principal et  $\mathfrak{G}$  son groupe d'automorphismes verticaux (groupe de jauge). Nous allons à présent considérer des automorphismes plus généraux que ceux considérés dans les sous-sections précédentes. Jusqu'à présent, nos automorphismes étaient verticaux, en ce sens que l'image  $\Phi(z)$  de  $z$  par  $\Phi$  était dans la même fibre que  $z$ . Nous allons garder les conditions 1 et 3 données dans la définition du groupe de jauge (section 3.6.2) mais atténuer la deuxième condition ; les automorphismes devront préserver les fibres au sens suivant : l'image d'une fibre devra être une fibre, mais on n'imposera pas le fait qu'image et antécédent appartiennent à la *même* fibre ! En d'autres termes, si  $x$  désigne un point de  $M$ , l'ensemble  $\Phi(\pi^{-1}(x))$ , image

de la fibre au dessus de  $x$  par  $\Phi$  doit être une fibre de  $P$ . Cette fibre image se projette en un certain point  $y$  de  $M$ . L'action d'un tel automorphisme  $\Phi$  définit donc également une application de  $M$  dans  $M$  (à  $x$  on associe le point  $y$  tel que  $y = \pi(\Phi(\pi^{-1}(x)))$ ). Cette application est, par construction, un difféomorphisme. On obtient donc de cette façon une projection du groupe  $Aut P$  des automorphismes de  $P$  (le groupe engendré par les automorphismes que nous venons de définir) sur le groupe  $Diff M$  des difféomorphismes de  $M$ . Deux automorphismes de  $P$  se projetant sur le même difféomorphisme de  $M$  diffèrent manifestement (au sens de la composition des morphismes) par un automorphisme ne changeant pas le point de base, c'est à dire par un automorphisme vertical. Localement, ces "symétries de jauge" (nom qu'on donne quelquefois aux éléments de  $Aut P$ ) sont donc codées à l'aide d'un difféomorphisme de  $M$  et d'une transformation de jauge. Plus précisément, on a la fibration principale  $\mathfrak{G} \mapsto Aut P \mapsto Diff M$  (noter que  $\mathfrak{G}$  est un groupe de dimension infinie) qu'on peut représenter par la figure 3.19

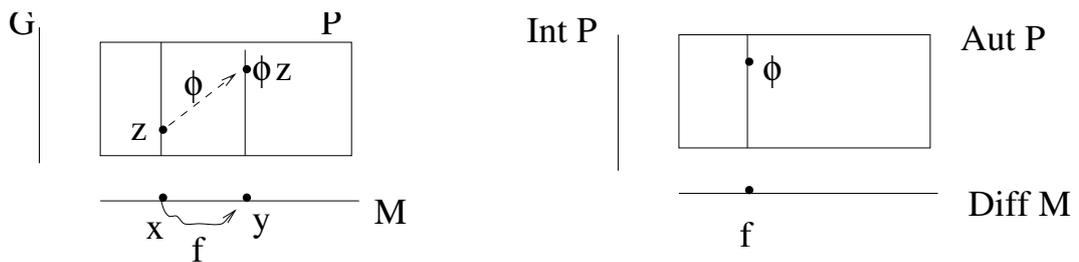


FIGURE 3.19 – Automorphismes de fibrés principaux

### 3.6.6 Action des automorphismes sur les espaces fibrés associés

- Soit  $E = P \times_G F$  un espace fibré associé au fibré principal  $P = P(M, G)$  obtenu à partir de l'action à gauche  $\rho$  de  $G$  sur  $F$ ,  $z.f = zg.\rho(g^{-1})f \in E$ . L'action à droite de  $G$  sur  $P$  n'existe plus au niveau de  $E$  puisqu'on a fabriqué un espace quotient en divisant par cette action. Par contre, on peut utiliser l'action à gauche de  $\mathfrak{G}$  sur  $P$  pour définir une action (à gauche) de  $\mathcal{G}$  sur n'importe quel fibré associé à  $P$ . Ainsi,

$$\Phi \in \mathfrak{G}, z \in P, f \in F, z.f \in E \xrightarrow{\Phi} \Phi z.f \in E$$

- $\mathfrak{G}$  agit non seulement sur  $E$  mais sur l'espace  $\Gamma E$  de ses sections. Soit  $u \in \Gamma E$ ,  $x \in M$ ,  $u(x) \in E$ ; on définit

$$[\Phi u](x) = \Phi(u(x))$$

### 3.6.7 Le cas des espaces vectoriels (un cas trivial mais instructif!)

Un fibré vectoriel n'est autre, intuitivement, qu'une famille  $E_x$  d'espaces vectoriels de même dimension, "collés" ensemble, et paramétrisés par une variété ( $x \in M$ ). Lorsque  $M$  se réduit à un seul point, on n'a qu'une seule fibre et donc un seul espace vectoriel. On peut donc considérer un espace vectoriel  $E$  comme un fibré vectoriel au dessus d'un point! Ce fibré vectoriel particulièrement trivial est associé à un fibré principal également constitué d'une seule fibre, fibre qui n'est autre que l'ensemble  $P$  des bases de l'espace vectoriel  $E$ . Si on suppose que  $E$  est isomorphe à  $\mathfrak{R}^n$ , on voit que cette fibre est difféomorphe au groupe  $GL(n, \mathfrak{R})$ . Si on choisit une base  $\sigma = \{\sigma_\mu\}$  de référence (une section!), on obtient une correspondance bi-univoque entre bases (éléments de  $P$ ) et matrices inversibles (éléments du groupe  $GL(n, \mathfrak{R})$ ). L'identification de  $P$  avec  $GL(n, \mathfrak{R})$  dépend de la base  $\sigma$  choisie. Le groupe matriciel  $GL(n, \mathfrak{R})$  agit sur  $P$ ; cette action ne dépend pas du choix de  $\sigma$ . En effet, si  $e = (e_\mu) \in P$  et  $\Lambda = (\Lambda_\nu^\mu) \in GL(n, \mathfrak{R})$ , on obtient  $e' = e\Lambda \in P$  via  $e'_\nu = e_\mu \Lambda_\nu^\mu$ . Les vecteurs  $u$  de l'espace vectoriel  $E$  sont des classes d'équivalence  $u = e_\mu \cdot u^\mu$  avec  $e = \{e_\mu\} \in P$  et  $u^\mu \in \mathfrak{R}^n$ , la relation d'équivalence identifiant  $e_\mu \cdot u^\mu$  avec  $e_\nu \Lambda_\mu^\nu \cdot (\Lambda^{-1})^\mu_\rho u^\rho$ . Le groupe  $GL(n, \mathfrak{R})$  n'agit donc pas sur  $E$  (il n'agit que sur les composantes des vecteurs de  $E$ ). Par contre, l'espace vectoriel  $E$  possède un groupe d'automorphismes  $Aut E$  (les applications linéaires bijectives). Si  $u \in E$  et  $\Phi \in Aut E$  alors  $\Phi u \in E$ ; les automorphismes  $\Phi$  agissent aussi sur les bases  $e = \{e_\mu\}$ , l'action en question résultant de l'action sur chacun des vecteurs de base. Il faut bien voir que les groupes  $Aut E$  et  $GL(n, \mathfrak{R})$  sont différents! *Cependant*, si on se choisit une base  $\sigma = \sigma_\mu$  de référence, on peut, de façon élémentaire —voir cours de Terminale de nos lycées— associer, à tout élément  $\Phi$  de  $Aut E$ , une matrice  $\Lambda$  de  $GL(n, \mathfrak{R})$ . Dans le cas d'un espace vectoriel, donc, le groupe structural et le groupe des automorphismes (qui, dans ce cas, sont nécessairement verticaux), bien que conceptuellement distincts, sont identifiables dès qu'on se choisit une base de référence (c'est à dire une section de ce fibré!). En particulier, lorsque  $E$  est de dimension finie, ces deux groupes sont de dimension finie. Dès qu'on passe au cas de fibrés vectoriels au dessus d'une variété  $M$  non réduite à un point, l'identification n'est plus possible :  $G = GL(n, \mathfrak{R})$  reste ce qu'il était mais  $\mathfrak{G} = Aut_V P$  devient un groupe de dimension infinie

qu'on peut se représenter intuitivement comme une famille de groupe d'automorphismes d'espaces vectoriels (les fibres de  $E$ ) paramétrisés par les points de la base  $M$ .

# Chapitre 4

## Connexions

### 4.1 Connexions dans un fibré principal

#### 4.1.1 Motivations

On veut donner un sens à l'idée de vouloir “garder un repère fixe” ou de “transporter son repère avec soi” ; il s'agit là d'une notion intuitive qui n'a, *a priori*, pas de sens lorsqu'on se déplace sur une variété différentiable quelconque munie de sa seule structure de variété. Intuitivement, on souhaite disposer d'un moyen d'assujettir le déplacement d'un repère choisi (déplacement qui a donc lieu dans l'ensemble des repères) lorsqu'on déplace l'origine de ce repère dans l'espace qui nous intéresse. Puisque nous avons maintenant à notre disposition la notion d'espace fibré, nous nous plaçons dans le fibré des repères correspondant à une variété  $M$  (la base du fibré en question) et nous souhaitons donc pouvoir disposer d'une méthode nous permettant d'associer, à tout chemin allant du point  $\mathcal{P}$  au point  $\mathcal{Q}$  sur la base, et à tout repère au point  $\mathcal{P}$ , un certain chemin dans l'espace des repères. Choisir d'une telle méthode revient précisément à choisir ce qu'on appelle une connexion dans le fibré principal des repères linéaires. Le mot “connexion” – en anglais “connection” – est bien choisi puisqu'il nous permet effectivement de connecter (de comparer) des vecteurs (plus généralement des éléments d'un fibré associé) situés en des points différents de la variété. Le cas de l'espace affine  $R^n$  est très particulier puisqu'on peut disposer là de repères globaux permettant de comparer des vecteurs situés en des points différents ; il existe d'autres variétés pour lesquelles cette propriété est également valable et où le choix d'un repère mobile global est possible : ce sont les variétés parallélisables déjà mentionnées dans le chapitre précédent. Nous allons, dans un premier temps, définir la notion de connexion de façon infinitésimale, comme étant un moyen d'associer un déplacement infinitésimal dans l'espace des repères

à un déplacement infinitésimal du point de base (c'est à dire du point où le repère est situé). En fait, la seule structure utilisée dans la définition de la notion de connexion est celle de fibré principal et tout ce qu'on écrira aura encore un sens si on remplace le fibré des repères par un fibré principal quelconque (cela dit, il est bien commode de visualiser les choses en utilisant des repères, nous nous permettrons donc d'utiliser le mot "repère" pour désigner un élément d'un espace fibré principal quelconque).

### 4.1.2 Distributions horizontales équivariantes

Soit  $P$  le fibré principal des repères linéaires de la variété  $M$ , avec groupe structural  $GL(n)$ . Soit  $e \in P$  un repère au point  $\mathcal{P} \in M$  (attention  $e$  ne désigne pas l'élément neutre de  $G$ !). L'espace tangent  $T(P, e)$ , tangent à  $P$  en  $e$  est, intuitivement, l'ensemble des déplacements infinitésimaux de repères, issus du repère  $e$ . Nous savons déjà nous déplacer dans la direction verticale puisque cela correspond à un déplacement infinitésimal induit par l'action du groupe  $GL(n)$  : on fait "tourner" le repère  $e$  sans faire bouger le point  $\mathcal{P}$ . Le sous espace vertical  $V(P, e)$  est donc déjà bien défini. Une connexion sera caractérisée par le choix d'un sous-espace supplémentaire à  $V(P, e)$  dans  $T(P, e)$ , sous-espace qui sera bien évidemment qualifié d'"horizontal" et noté  $H(P, e)$ . Par ailleurs, on veut que ce choix puisse être effectué, de façon continue et différentiable, pour tout repère, c'est à dire en tout point  $e$  de  $P$ . Enfin, on veut que ce choix soit également équivariant sous l'action du groupe structural : nous savons que  $GL(n)$  opère transitivement sur les fibres (par exemple sur les repères au point  $\mathcal{P}$ ), l'image du repère  $e$  sous l'action d'un élément  $g$  du groupe structural est un repère  $e.g$  de la même fibre ( $R_g(e) = e.g$ ) et l'application tangente  $dR_g \equiv (R_g)_*$  en  $e$  envoie donc l'espace tangent  $T(P, e)$  dans l'espace tangent  $T(P, e.g)$ . Il est commode de noter simplement  $T(P, e)g = (R_g)_*T(P, e) \subset T(P, e.g)$  puisque, formellement  $\partial(ge)/\partial e = g$ . La propriété d'équivariance requise signifie simplement ceci : on veut que le choix de l'espace horizontal  $H(P, e.g)$  en  $e.g$  puisse également être obtenu en utilisant l'action du groupe structural sur les fibres, en d'autres termes on impose  $H(P, e.g) = H(P, e).g$

Noter que la discussion qui précède ne dépend pas du type particulier de fibré principal considéré et le lecteur est invité à remplacer partout le groupe  $GL(n)$  par un groupe de Lie quelconque (et le mot "repère" par les mots "élément du fibré principal  $P$ "). Le choix, en tout point  $e$  d'un fibré principal  $P$ , d'un tel espace vectoriel  $H(P, e)$  supplémentaire à  $V(P, e)$ , c'est à dire,  $T(P, e) = V(P, e) \oplus H(P, e)$ , est désigné sous le nom de *distribution horizontale* ; noter que le sens de ce mot "distribution" n'a ici aucun rapport avec celui utilisé en théorie de la mesure (la théorie des distributions!). Notre

première définition d'une *connexion principale* est donc la suivante : c'est la donnée, dans un fibré principal  $P$ , d'une *distribution horizontale équivariante* sous l'action du groupe structural.

### 4.1.3 Relèvement horizontal

Soit  $P = P(M, G)$  un fibré principal, on dispose donc d'une projection  $\pi : P \rightarrow M$  et donc également de son application tangente  $\pi_*$ . Cette application linéaire envoie l'espace tangent  $T(P, e)$  sur l'espace tangent  $T(M, \pi(e))$ ; en d'autres termes, elle nous permet d'associer, à tout déplacement infinitésimal d'un repère  $e$  dans l'espace des repères, le déplacement infinitésimal correspondant du point  $x = \pi(e)$  dans la variété  $M$  ( $x$  est le point où le repère est centré). Comme nous l'avons remarqué à plusieurs reprises, étant donnée une application d'une variété dans une autre, nous pouvons faire "voyager" les vecteurs dans la même direction –il s'agit d'un "push-forward"– et les formes dans la direction opposée ("pull-back")

De façon générale, soit  $\gamma(t)$  une courbe dans  $M$ , on dira qu'une courbe  $\Gamma(t)$  dans  $P$  est un *relèvement* de  $\gamma(t)$  si  $\Gamma$  se projette sur  $\gamma$  (intuitivement "on" –un voyageur qui se promène sur  $M$ – s'est choisi un repère mobile quelconque en tout point du chemin qu'il suit). Supposons maintenant que nous nous sommes donnés une connexion (au sens donné dans la sous section précédente) dans le fibré principal  $P$ , nous savons donc définir l'horizontalité des vecteurs de  $TP$ ; on dira qu'un relèvement est horizontal si les vecteurs tangents au relèvement sont horizontaux. Considérons une courbe  $\gamma(t)$  dans  $M$  allant de  $\mathcal{P}_0 = \gamma(0)$  à  $\mathcal{P}_1 = \gamma(1)$  et son relèvement horizontal issu de  $e_0 \in P$ , c'est à dire la courbe  $\Gamma(t)$  dans  $P$ . En utilisant les théorèmes habituels concernant les équations différentielles, on montre qu'il y a unicité du relèvement  $\Gamma$  de  $\gamma$  issus de  $e_0$ . On dira que  $e_1 = \Gamma(1)$  est le *transporté par parallélisme* de  $e_0$  le long de  $\gamma$  par rapport à la connexion choisie.

Nous définirons l'*application de relèvement horizontal* comme suit : soit  $x$  un point de  $M$  et  $e$  un repère quelconque en  $x$  (c'est à dire un élément de la fibre au dessus de  $x$ ), soit  $v_x$  un vecteur appartenant à l'espace tangent à  $M$  en  $x$ , on désignera par  $\lambda_e(v_x)$  l'élément de l'espace tangent  $T(P, e)$  qui, d'une part, est horizontal et qui, d'autre part, se projette sur  $v_x$  grâce à l'application  $\pi_*$ . Il est bien évident que ce vecteur est unique : Il suffit de choisir un relevé quelconque de  $v_x$  en  $e$  (c'est à dire un vecteur quelconque  $V_e$  de  $T(P, e)$  qui se projette sur  $v_x$ , puis de le décomposer en une partie verticale  $V_e^v$  et une partie horizontale  $V_e^h = \lambda_e(v_x)$  (c'est le vecteur cherché) en utilisant la décomposition de  $T(P, e)$  en deux sous-espaces supplémentaires.

La distribution horizontale n'étant pas quelconque (elle est équivariante!), l'application de relèvement horizontal n'est pas quelconque non plus : le relevé

du vecteur  $v$  en  $eg$  doit coïncider avec l'image, par l'application tangente du relevé de  $v$  en  $e$ . En clair,  $\lambda_{eg}(v) = (R_g)_*(\lambda_e(v))$ , qu'on peut écrire plus simplement

$$\lambda_{eg}(v) = (\lambda_e(v)g)$$

On vient de décrire la façon dont on peut, grâce à la donnée d'une connexion, relever les vecteurs tangents de  $M$  à  $P$ . Bien entendu, à condition de travailler de façon duale, on peut faire quelque chose d'analogue avec les formes différentielles. Plus précisément, le "pull-back" de la projection  $\pi$  est défini sur les vecteurs cotangents à  $M$  et à valeurs dans le fibré cotangent de  $P$ . La donnée d'une connexion (et donc de l'application de relèvement horizontal) permet, à l'inverse, de projeter les formes de  $T^*P$  sur les formes de  $T^*M$ .

Toute cette discussion peut être résumée à l'aide de la figure ci-dessous.

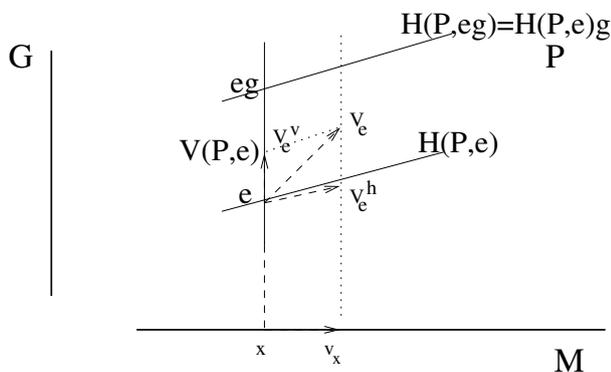


FIGURE 4.1 – Relèvement horizontal et connexion

#### 4.1.4 Forme de connexion

Il existe plusieurs façons de définir la notion de connexion et nous venons d'en mentionner deux (distribution horizontale équivariante et application de relèvement horizontal) dont l'interprétation géométrique est intuitive; en pratique, cependant, c'est une troisième méthode qui va nous permettre de traduire cette notion sous forme analytique. Nous supposons donc donnée sur l'espace fibré principal  $P = P(M, G)$  une distribution horizontale équivariante. La *forme de connexion*  $\omega$  est une forme sur  $P$  et à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe structural (nous verrons que cette forme doit, en outre, être équivariante). Elle est définie comme suit. Soit  $e$  un élément de  $P$  (un repère de  $M$ ), et  $X_\alpha$  une base de  $Lie(G)$ . Nous décomposons l'espace tangent  $T(P, e)$  en un sous espace vertical  $T^v(P, e) = V(P, e)$  engendré par les

champs fondamentaux  $\hat{X}_\alpha$  et un sous espace horizontal  $T^h(P, e) = H(P, E)$  défini par la donnée de la distribution horizontale. On pose

$$\begin{aligned}\omega_e(\hat{X}_\alpha(e)) &= X_\alpha \\ \text{Ker } \omega_e &= T^h(P, e)\end{aligned}$$

Ainsi donc, on peut décomposer tout vecteur  $V \in T(P, e)$ , comme suit :  $V = V^\alpha \hat{X}_\alpha(e) + V^h$  avec  $V^h \in H(P, e)$  et  $\omega(V) = V^\alpha X_\alpha$ . La forme  $\omega$  est donc bien définie. Sa signification est claire : si on effectue un déplacement infinitésimal du repère  $e$  (sans changer l'origine), on associe à ce déplacement la rotation infinitésimale  $V^\alpha X_\alpha$  correspondante ; si, au contraire, on effectue un déplacement infinitésimal du repère  $e$  en déplaçant l'origine mais sans faire "tourner" le repère, on obtient  $\omega(V) = 0$ . Bien évidemment, on peut analyser les choses différemment en décidant que la connexion est définie par la forme de connexion  $\omega$ , la rotation du repère  $e$  lors d'un déplacement infinitésimal  $V$  étant précisément mesurée par la rotation infinitésimale  $\omega(V)$  et ceci donne alors un sens au verbe "tourner". La distribution horizontale étant équivariante, il s'ensuit que les noyaux de  $\omega$  en  $e$  et en  $eg, g \in G$  sont reliés par

$$\text{Ker } \omega_{eg} = (\text{Ker } \omega_e)g$$

Ici encore, l'application tangente est simplement notée  $g$ .

Nous reviendrons un peu plus loin (en 4.3.6) sur la théorie des connexions dans les fibrés principaux mais nous allons, pour des raisons aussi bien pédagogiques (c'est plus simple!) que pratiques (on mène en général les calculs sur la base), passer à une expression locale de la forme de connexion, puis, à partir de là, développer la théorie dans les fibrés vectoriels associés.

#### 4.1.5 Écriture locale de la forme de connexion : le potentiel de jauge

Le fait que tout fibré principal soit localement trivial va nous permettre - moyennant le choix d'une section locale - d'écrire la forme de connexion  $\omega$ , non pas comme une forme sur  $P$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  mais comme une forme sur  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . Choisissons donc une section locale  $M \xrightarrow{e} P$  et notons  $de : TM \mapsto TP$  l'application linéaire tangente. Rappelons que, si  $P$  est un fibré de repères, la section locale  $e(x)$  n'est autre qu'un repère mobile  $e(x) = (e_\mu(x))$  défini dans le domaine d'un certain ouvert et que, dans le cas où  $P$  désigne le fibré des repères d'un certain "espace interne" (terminologie utilisée en physique des particules) on dira plutôt que  $e(x)$  est un choix de

jauge. Supposons qu'on s'est fixé une connexion caractérisée par la forme de connexion  $\omega$ , on définit le *potentiel de jauge*  $A$

$$A(v) = \omega_e(e_*(v)), \quad v \in TM$$

où  $e_* \equiv de$  désigne l'application tangente à la section locale  $e$ .

$A$  est donc une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\{X_\alpha\}$  une base de  $\mathfrak{g}$  et  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  une carte locale sur  $M$ , on pourra écrire :

$$A = A_\mu^\alpha X_\alpha dx^\mu$$

En fait, il faudrait noter cet objet  ${}^e A$  et non pas  $A$  de façon à se rappeler du fait que la définition de  $A$  dépend du choix de la section locale  $e$  mais on omet généralement d'y faire référence. Par contre, il est très important de savoir comment se transforme  $A$  lorsqu'on effectue un choix différent. Posant  $A = {}^e A$  et  $A' = {}^{e'} A$ , et supposant que  $e'(x) = e(x).g(x)$  avec  $g(\cdot) : M \mapsto G$ , nous verrons un peu plus loin que la propriété d'équivariance de  $\omega$  se traduit pour  $A$ , par la propriété suivante :

$$A' = g^{-1} A g + g^{-1} dg$$

Pour finir, notons qu'en pratique les calculs sont effectués sur la base  $M$  et non sur le fibré  $P$ ; en d'autres termes on préfère utiliser le potentiel de jauge  $A$  plutôt que la forme de connexion  $\omega$ , quitte à devoir recoller les morceaux puisque le fibré  $P$  considéré n'est pas en général trivial et qu'il faut donc définir  $A$  sur toutes les cartes d'un atlas de  $M$ . Le potentiel de jauge  $A$  est quelquefois désigné sous le nom "pull back de la forme de connexion" et il possède des interprétations physiques variées, dépendant, bien sûr, de la nature du fibré principal  $P$  (et donc du groupe structural  $G$ ). Citons quelques unes de ces interprétations ainsi que la terminologie correspondantes :

$G = U(1)$ ,  $A$  est le potentiel électromagnétique (ou champ de photons)

$G = SU(3)$ ,  $A$  est le potentiel chromodynamique (ou champ de gluons)

$G = SU(2) \times U(1)$ ,  $A$  est le potentiel du champ électro-faible (champ des bosons  $\gamma$ ,  $W^\pm$  et  $Z$ ).

Dans le cas des théories gravitationnelles où  $G$  désigne  $GL(n)$  et plus généralement un groupe de changement de repères d'une variété de dimension  $n$ , on parle plutôt de "symboles de Christoffel" pour désigner les composantes de  $A$ ; nous y reviendrons dans la section consacrée aux connexions linéaires.

Le lecteur aura compris (chose qu'il sait sans doute depuis longtemps) que les potentiels de jauge -et la théorie des connexions en général - permettent de représenter mathématiquement toutes les forces fondamentales de la physique.

## 4.2 Connexions dans les fibrés vectoriels associés

### 4.2.1 Matrice de connexion $A_j^i$ , coefficients de connexion $A_{j\mu}^i$

Soit  $A = A_\mu^\alpha X_\alpha dx^\mu$  le potentiel de jauge définissant une forme de connexion  $\omega$  sur le fibré principal  $P = P(M, G)$  et soit  $E = P \times_\rho V$  un fibré vectoriel associé à  $P$  via la représentation  $\rho$  sur l'espace vectoriel  $V$  de dimension  $p$ . En utilisant la représentation  $\rho$  nous allons représenter le potentiel de jauge lui-même et obtenir ainsi une notion de connexion pour tout fibré vectoriel associé. Soit  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \{1, \dots, \dim(G)\}}$ , une base de  $\mathfrak{g}$ . Nous désignerons encore par  $\rho$  la représentation de  $\mathfrak{g}$  correspondant à celle de  $G$ ; ainsi  $\rho(X_\alpha) = (\rho(X_\alpha)_j^i)$  est une matrice  $p \times p$  décrivant un endomorphisme de l'espace vectoriel  $V$ .

Dans ce paragraphe nous noterons :

$\mu, \nu, \rho \dots$  les indices de base (variété  $M$  de dimension  $d$ )

$i, j, k \dots$  les indices de fibre (espace vectoriel  $V$  de dimension  $p$ )

$\alpha, \beta, \gamma \dots$  les indices d'algèbre de Lie ( $Lie G$  de dimension  $n$ )

L'image  $\rho(A)$  du potentiel de jauge par la représentation  $\rho$  s'appelle la *matrice de connexion*

$$\rho(A) = A_\mu^\alpha \rho(X_\alpha) dx^\mu$$

et ses éléments sont les quantités

$$\rho(A)_j^i = A^\alpha (\rho(X_\alpha))_j^i$$

avec

$$A^\alpha = A_\mu^\alpha dx^\mu$$

La représentation  $\rho$  étant choisie une fois pour toutes (le fibré vectoriel  $E$  étant choisi) on peut omettre le symbole  $\rho$  lui-même, et si nous posons

$$T_\alpha = \rho(X_\alpha)$$

alors

$$A_j^i = A^\alpha (T_\alpha)_j^i$$

Ses éléments de matrice sont des 1-forme puisque

$$A_j^i = A_{j\mu}^i dx^\mu \quad \text{avec} \quad A_{j\mu}^i = A_\mu^\alpha (T_\alpha)_j^i$$

Les nombres  $A_{j\mu}^i$  sont les *coefficients de connexion*. Revenons une fois de plus sur ces problèmes de notations, de terminologie et d'habitudes : les

physiciens des particules utilisent les  $A_\mu^\alpha$ , les spécialistes de la gravitation préfèrent les  $A_{j\mu}^i$  (la relation précédente permettant de faire le lien entre les deux); ces derniers ont d'ailleurs l'habitude de noter  $\Gamma$  (plutôt que  $A$ ) les coefficients de connexion, ils utilisent donc des  $\Gamma_{j\mu}^i$ , les indices  $j$  étant les indices de fibre et  $\mu$  l'indice de forme. Là où les choses se compliquent, c'est que le fibré  $E$  peut désigner le fibré tangent  $TM$  et que, dans ce cas, les indices de fibre peuvent appartenir au même jeu d'indices que les indices de forme (on a donc des objets  $\Gamma_{\rho\mu}^\nu$ ) mais il faut toujours se rappeler qui est qui. Les conventions, comme d'habitude, n'étant pas universelles, le lecteur est prié de se rappeler que, pour nous, l'indice de base c'est à dire encore l'indice de forme (noté  $\mu$  ci-dessus) est situé en bas, et en dernière position. Nous reviendrons un peu plus loin sur le cas particulier  $E = TM$  (connexions linéaires). En attendant, il convient de se rappeler que, dans la notation  $A_{j\mu}^i$ , l'indice  $\mu$  se réfère au choix d'un repère naturel associé à une carte ( $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ) ou d'un repère mobile quelconque ( $[e_\mu, e_\nu] = f_{\mu\nu}^\rho e_\rho$ ) et que les indices  $i, j$  se réfèrent au choix d'une base ( $e_i(x)$ ) dans la fibre de  $E$  située au point  $x$  de  $M$ .

### 4.2.2 Différentielle covariante des sections $\nabla$ , dérivée covariante $\nabla_\mu$ , parallélisme

La différentielle covariante

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M, E) = \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$$

transforme les sections de  $E$  en sections-1-formes et vérifie, par définition, la propriété

$$\nabla(vf) = (\nabla v)f + v \otimes df$$

pour toute section  $v$  de  $E$  et toute fonction  $f$  définie<sup>1</sup> sur  $M$ . L'opérateur  $\nabla$  sera donc connu dès qu'on connaîtra la valeur de  $\nabla e_i$  où les  $e_i : x \in M \rightarrow e_i(x) \in E$  désignent  $p$  sections indépendantes dans un voisinage de  $x$ ; l'ensemble  $\{e_i(x)\}$  est donc une base de l'espace vectoriel  $E_x$ . On pose (voir aussi la discussion 4.2.3)

$$\nabla e_i = e_j A_i^j$$

où les  $A_i^j$  sont les éléments de la matrice de connexion (par rapport au même choix de base). Soit  $v$  une section quelconque de  $E$ , ainsi  $v = e_j v^j$  où les  $v^j$

1. Bien évidemment, la notation  $vf$  désigne simplement le produit de la fonction  $f$  par la section  $v$ , et donc  $vf = fv$ , avec  $(vf)(x) = v(x)f(x)$ ; nous écrirons néanmoins souvent les fonctions "à droite" pour des raisons liées au désir de présenter à la fin de cet ouvrage certaines généralisations non commutatives de la géométrie.

–les composantes de  $v$  suivant la base  $\{e_j\}$ – sont des fonctions sur  $M$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}\nabla v &= \nabla(e_j v^j) = (\nabla e_j)v^j + e_j dv^j \\ &= e_i A_{j\mu}^i v^j + e_i dv^i = e_i (A_{j\mu}^i v^j + dv^i) \\ &= e_i (A_{j\mu}^i v^j + \partial_\mu v^i) dx^\mu\end{aligned}$$

Une section  $v$  est dite *parallèle* (ou transportée par parallélisme) lorsque  $\nabla v = 0$

Puisque  $\nabla v$  possède un indice de forme (c’est un élément de  $\Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$ ), on peut l’évaluer sur les vecteurs tangents. Soit  $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$  un vecteur tangent. La *dérivée covariante* de  $v$  dans la direction  $\xi$  se note  $\nabla_\xi v$  et s’obtient en évaluant  $\nabla v$  sur  $\xi$  :

$$\begin{aligned}\nabla_\xi v &= \langle \nabla v, \xi \rangle = \langle e_i (A_{j\mu}^i v^j + v_{,\mu}^i) dx^\mu, \xi^\nu \partial_\nu \rangle \\ &= e_i (A_{j\mu}^i v^j + v_{,\mu}^i) \xi^\mu\end{aligned}$$

Notons que  $\nabla_\xi v$ , ainsi que  $v$ , est une section de  $E$  alors que  $\nabla v$  est une section-1-forme. On note souvent  $v_{;\mu}^i$  les composantes de  $\nabla_\mu v = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} v$  par rapport au repère  $\{e_i\}$  de la fibre :

$$\boxed{\nabla_\mu v = e_i v_{;\mu}^i = \langle \nabla v, \partial_\mu \rangle \text{ avec } v_{;\mu}^i = v_{,\mu}^i + A_{j\mu}^i v^j}$$

Remarque : l’opérateur que nous appelons “différentielle covariante” est parfois désigné, dans certains ouvrages, sous le nom d’ “opérateur de dérivée covariante”.

### 4.2.3 Remarques concernant les notations

#### Mise en garde concernant la notation $\nabla_\mu$

Nous attirons l’attention du lecteur sur le fait que la moitié des physiciens n’utilisent que des objets “indexés”. Ces derniers ne considèrent jamais ni  $v$  ni  $\nabla_\mu v$  mais seulement leurs composantes  $v^i$  et  $v_{;\mu}^i$ . Cette habitude n’entraîne généralement aucune confusion. Par contre, cela devient un problème si on décide, simultanément, d’utiliser également la notation  $\nabla_\mu$  et de décider que  $\nabla_\mu v^i$  est un synonyme de  $v_{;\mu}^i$ . Nous estimons qu’il s’agit là d’un abus de notations particulièrement dangereux pouvant facilement conduire à des erreurs. En effet,  $v^i$  est une composante de  $v$ , c’est à dire une fonction de  $x$  ;

sa dérivée covariante existe bien, mais, puisqu'il s'agit d'une simple fonction, elle est égale à sa dérivée ordinaire, ainsi  $\nabla_\mu v^i = \partial_\mu v^i = v^i_{;\mu}$ , ce qui n'est pas du tout égal à  $v^i_{;\mu}$ . Si le lecteur ne souhaite pas manipuler des objets comme  $v$  ou  $\nabla_\mu v$  mais seulement leurs composantes, nous lui suggérons très fortement de se contenter de la notation "point-virgule".

### Remarque sur les produits tensoriels

Lors de la définition de  $\nabla e_i = e_j A_i^j$  en 4.2.2, le lecteur a pu être surpris de l'absence du signe de produit tensoriel entre le vecteur  $e_j$  qui est une section locale du fibré vectoriel considéré et la 1-forme  $A_i^j$  qui est une section locale du fibré cotangent  $T^*M$  (puisque  $A_i^j = A_{i\mu}^j dx^\mu$ ).

Un peu plus loin, le lecteur a pu être de nouveau surpris, lors du calcul de  $\nabla v$  et de  $\nabla_\xi v$ , car nous avons allègrement commuté les formes sur  $M$  (par exemple  $e^\mu = dx^\mu$ ) et les sections de  $E$  (les  $e_i$ ).

Mis à part le fait qu'il existe un isomorphisme canonique entre  $\Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$  et  $\Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$  et que le produit tensoriel utilisé est un produit au dessus de  $C^\infty(M)$  et non au dessus de  $\mathfrak{R}$ , les manipulations précédentes, sur lesquelles nous ne nous étendrons pas, sont justifiées par le fait qu'il est possible de remplacer, dans la plupart des calculs de géométrie différentielle, l'algèbre commutative  $C^\infty(M)$  par l'algèbre commutative graduée  $\Omega(M)$ .

Les espaces  $E$  et  $T^*M$  étant, en général bien distincts, nous décidons d'identifier par exemple  $dx^\mu e_i \otimes e_j \dots$  et  $e_i \otimes e_j \dots dx^\mu$  et nous n'utiliserons pas de symbole de produit tensoriel entre les  $p$ -formes sur  $M$  et les sections de  $E$ , traitant ainsi les  $dx^\mu$  comme des fonctions. Par ailleurs nous écrirons toujours les formes "en dernier".

Cette identification nous permet d'écrire aussi bien

$$\nabla(v \otimes w) = \nabla(v) \otimes w + v \otimes \nabla(w)$$

que

$$\nabla_\mu(v \otimes w) = \nabla_\mu(v) \otimes w + v \otimes \nabla_\mu(w)$$

Les auteurs s'interdisant d'effectuer cette identification (pourtant sans danger!) imposent la règle de Leibniz pour  $\nabla_\mu$  mais ne peuvent pas l'imposer pour  $\nabla$ .

Il existe cependant un cas particulier où il existe une confusion possible entre les fibrés  $E$  et  $T^*M$ , c'est précisément le cas où on choisit  $E = T^*M$ . Dans ce cas, il faut se rappeler "qui est qui", c'est à dire quels sont les indices de forme et quels sont les indices de fibre. Cette possible identification permet en fait d'enrichir la théorie. Nous y reviendrons.

#### 4.2.4 Loi de transformation des coefficients de connexion

Soient  $e = (e_i)$  et  $e' = (e'_{i'})$  deux repères dans les fibres. L'un s'obtient à partir de l'autre par une transformation linéaire  $\Lambda$  :

$$e'_{i'} = e_j \Lambda_{i'}^j$$

où  $\Lambda_{i'}^j$  est la matrice de changement de repère (on écrira simplement  $e' = e.\Lambda$ ) et soient  $A_j^i$  et  $A_{j'}^{i'}$  les matrices de connexion correspondantes. On a

$$\nabla e' = e' A' = e.\Lambda A'$$

c'est à dire

$$\nabla(e.\Lambda) = (\nabla e).\Lambda + e.d\Lambda = eA\Lambda + ed\Lambda$$

et donc

$$A' = \Lambda^{-1}A\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda$$

Si on écrit explicitement les indices, on a

$$A_{j'\mu}^{i'} = (\Lambda^{-1})_k^{i'} A_{l\mu}^k \Lambda_{j'}^l + (\Lambda^{-1})_k^{i'} \partial_\mu \Lambda_{j'}^k$$

Cette relation traduit simplement l'équivariance de la forme de connexion  $\omega$ . On dit quelquefois (terminologie un tantinet archaïque) que  $A_{j\mu}^i$  "ne se transforme pas comme un tenseur" . . . les indices  $i, j$  d'une part et  $\mu$  d'autre part étant de nature différente, cette remarque n'est pas trop surprenante ! Notons que, dans la relation précédente, nous avons transformé le repère "interne"  $e_i$  (base de la fibre) mais pas le repère "externe"  $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  (base de  $T(M, x)$ ) ; on pourrait aussi changer de base dans  $T(M, x)$  et poser  $e_{\mu'} = e_\mu L_{\mu'}^\mu$ .

On obtient alors immédiatement

$$A_{j'\mu'}^{i'} = L_{\mu'}^\mu (\Lambda^{-1})_k^{i'} A_{l\mu}^k \Lambda_{j'}^l + L_{\mu'}^\mu (\Lambda^{-1})_k^{i'} \partial_\mu \Lambda_{j'}^k$$

#### 4.2.5 Dérivation covariante des sections du fibré dual

Après avoir défini  $\nabla$  sur les sections de  $E$  grâce à la relation  $\nabla e_i = e_j A_i^j$ ,  $\{e_i(x)\}$  désignant une base de la fibre au point  $x$ , nous considérons le fibré dual  $E^*$  et l'action de  $\nabla$  sur ses sections. Désignons respectivement par  $\sigma$  et  $v$  une forme différentielle et un champ de vecteurs, on aura :  $\nabla \langle \sigma, v \rangle = \langle \nabla \sigma, v \rangle + \langle \sigma, \nabla v \rangle$ . Notons  $\{e^i(x)\}$  la base duale au point  $x$  ; alors  $\langle e^j, e_i \rangle = \delta_j^i$ .

La quantité  $\delta_j^i$  est une fonction constante, et donc  $\nabla \delta_j^i = 0$ . On impose

$$\langle \nabla e^j, e_i \rangle + \langle e^j, \nabla e_i \rangle = \nabla \delta_j^i = 0$$

Cette relation conduit à poser

$$\boxed{\nabla e^j = -A_k^j e^k}$$

Vérifions que c'est bien le cas

$$\langle -A_k^j e^k, e_i \rangle + \langle e^j, e_k A_i^k \rangle = -A_k^j \delta_i^k + \delta_k^j A_i^k = -A_i^j + A_i^j = 0$$

On aura donc un signe  $-$  lorsqu'on "corrige" un indice covariant.

### 4.2.6 Dérivation covariante dans les puissances tensorielles d'un fibré vectoriel

Notre but est ici d'étudier la dérivation covariante des éléments de  $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$ .

Considérons le fibré vectoriel  $E \otimes E$ , c'est un fibré associé comme un autre... Ses éléments peuvent s'écrire

$$t = e_i \otimes e_j t^{ij}$$

Si  $X \in Lie G$  agit via la représentation  $\rho : X \in Lie G \mapsto \rho(x) \in End V$  sur l'espace vectoriel  $V$ , il agit via  $\rho(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho(x)$  sur l'espace vectoriel  $V \otimes V$ , d'où il s'ensuit que l'opérateur  $\nabla$  vérifie la propriété

$$\nabla(v_1 \otimes v_2) = \nabla(v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (\nabla v_2)$$

Le lecteur ayant quelques notions sur les algèbres de Hopf aura reconnu la relation directe existant entre la règle de Leibniz pour  $\nabla$  et le coproduit standard sur l'algèbre enveloppante de  $Lie G$ .

On écrira par exemple, pour  $t = e_i \otimes e_j t^{ij}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla t &= (\nabla e_i) \otimes e_j t^{ij} + e_i \otimes (\nabla e_j) t^{ij} + e_i \otimes e_j dt^{ij} \\ &= A_i^k e_k \otimes e_j t^{ij} + e_i \otimes A_j^k e_k t^{ij} + e_i \otimes e_j dt^{ij} \\ &= e_i \otimes e_j t_{;\mu}^{ij} dx^\mu \end{aligned}$$

où

$$t_{;\mu}^{ij} = t_{,\mu}^{ij} + A_{k\mu}^i t^{kj} + A_{k\mu}^j t^{ik}$$

Le lecteur n'aura aucun mal à généraliser cette dernière formule à des situations plus générales; mnémotechniquement la dérivation covariante dans la direction  $\mu$  s'obtient en rajoutant à la dérivée ordinaire (le premier terme dans l'expression ci-dessus) un terme de type "  $A.t$  " pour chaque indice de

fibre (on “corrige” chaque indice en le remplaçant par un indice muet sur lequel on somme). Attention : si les indices de fibre sont en bas, il faut utiliser un signe moins (voir l’explication dans la sous-section précédente).

Voici un dernier exemple : Soit  $t \in E \otimes E \otimes E^*$ ,

$$t = e_i \otimes e_j \otimes e^k t_k^{ij}$$

alors  $\nabla t \in E \otimes E \otimes E^* \otimes \Omega^1(M)$ ,

$$\nabla t = e_i \otimes e_j \otimes e^k t_{k;\mu}^{ij} dx^\mu$$

avec

$$t_{k;\mu}^{ij} = t_{k,\mu}^{ij} + A_{l\mu}^i t_k^{lj} + A_{l\mu}^j t_k^{il} - t_l^{ij} A_{k\mu}^l$$

Le premier terme  $t_{k,\mu}^{ij}$  est défini comme  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} [t_k^{ij}]$  si on travaille dans repère naturel, mais il doit être compris comme  $e_\mu [t_k^{ij}]$  si on utilise un repère mobile quelconque, et, dans ce cas, on a

$$\nabla t = e_i \otimes e_j \otimes e_k t_{k;\mu}^{ij} e^\mu$$

où  $\{e^\mu\}$  désigne le co-repère mobile dual.

La dérivée covariante d’un tenseur quelconque  $t = e_i \otimes e_j \dots e^k \otimes e^l \dots t_{kl\dots}^{ij\dots}$  dans la direction du champ de vecteurs  $e_\mu$  est définie par

$$\nabla_\mu t(\dots) = \nabla t(\dots, e_\mu) = e_i \otimes e_j \dots e^k \otimes e^l \dots t_{kl\dots\mu}^{ij\dots}$$

### 4.2.7 L’opérateur D

On introduit le symbole  $D$  sur l’exemple suivant : prenons

$$t = e_i \otimes e_j \otimes e^k t_k^{ij}$$

On pose

$$\nabla t = e_i \otimes e_j \otimes e^k Dt_k^{ij}$$

ainsi

$$Dt_k^{ij} = t_{k;\mu}^{ij} e^\mu$$

Il faut bien voir que  $t_k^{ij}$  est ici considéré comme une zéro-forme sur le fibré principal  $P$  à valeurs dans un espace vectoriel (la fibre type du fibré vectoriel approprié).

Il est facile de généraliser cette notation  $Dt_k^{ij}$  au cas où l'objet considéré n'est pas une 0-forme à valeurs dans un espace vectoriel mais une  $p$ -forme à valeurs dans un espace vectoriel.

Il n'existe pas de convention d'écriture qui soit universelle, pour désigner cet opérateur. Certains auteurs, par exemple, le notent  $\mathbf{d}(\text{gras})$ . Même remarque d'ailleurs pour l'opérateur de différentielle extérieure covariante  $d^\nabla$  défini ci-dessous, que certains auteurs notent souvent...  $D$ !

### 4.2.8 Différentielle extérieure covariante $d^\nabla$

#### Définition

Soit  $E = E(M, F)$  un fibré vectoriel ; on a défini  $\nabla$  comme un opérateur :  $\Gamma E \mapsto \Gamma E \otimes \Omega^1(M)$  ; on définit maintenant  $d^\nabla$  comme l'unique opérateur prolongeant  $\nabla$  comme dérivation graduée de l'algèbre  $\bigoplus_p E \otimes \Omega^p(M)$ . Ainsi donc

$$d^\nabla : \Gamma E \otimes \Omega^p(M) \mapsto \Gamma E \otimes \Omega^{p+1}$$

satisfait la propriété

$$d^\nabla(\psi \wedge \lambda) = d^\nabla(\psi) \wedge \lambda + (-1)^k \psi \wedge d\lambda$$

lorsque  $\psi \in \Gamma E \otimes \Omega^k(M)$  et  $\lambda \in \Omega^s(M)$ . Les éléments de  $\Omega^p(M, E) = \Gamma E \otimes \Omega^p(M)$  sont appelés  $p$ -formes sur  $M$  à valeurs dans le fibré vectoriel  $E$  ou, plus simplement "tenseurs- $p$ -formes". Lorsque  $p = 0$ , les deux opérateurs  $d^\nabla$  et  $\nabla$  coïncident.

Le lecteur peut, à juste titre, se demander pourquoi nous distinguons les deux notations  $d^\nabla$  et  $\nabla$ . La raison en est la suivante : nous réservons la notation  $\nabla$  au cas où l'on agit sur une 0-forme. En effet, il est des cas où un objet mathématique donné peut être considéré soit comme une  $p$ -forme à valeurs dans un certain fibré, soit comme une 0-forme à valeurs dans un fibré différent. Ecrire  $\nabla\omega$  signifie (pour nous) " $\omega$  est une 0-forme à valeurs dans un certain fibré vectoriel (c'est à dire une section de ce dernier) et nous calculons sa différentielle extérieure covariante, qui est donc une 1-forme à valeurs dans le même fibré". Cette distinction que nous opérons, au niveau des notations, permet d'éviter des confusions possibles, en particulier lorsque le fibré  $E$  peut désigner le fibré tangent, son dual, ou une puissance tensorielle de ces derniers.

#### Les opérateurs $D$ et $d^\nabla$

Complément concernant la notation  $D$  introduite plus haut :

Si  $V$  est, par exemple, un élément de  $\Gamma(E \otimes E^* \otimes E^*) \otimes \Omega^2(M) = \Omega^2(M, E \otimes E^* \otimes E^*)$ , c'est à dire

$$V = e_i \otimes e^j \otimes e^k \frac{1}{2!} V_{jk\mu\nu}^i e^\mu \wedge e^\nu$$

on écrira simplement

$$V = e_i \otimes e^j \otimes e^k V_{jk}^i$$

en ne faisant pas apparaître explicitement les indices de forme. On utilisera également la notation  $D$  introduite précédemment en écrivant

$$d^\nabla V = e_i \otimes e^j \otimes e^k DV_{jk}^i$$

avec

$$DV_{jk}^i = dV_{jk}^i + A_l^i \wedge V_{jk}^l - A_j^l \wedge V_{lk}^i - A_k^l \wedge V_{jl}^i$$

En effet :

$$d^\nabla V = d^\nabla(e_i \otimes e^j \otimes e^k) \wedge V_{jk}^i + e_i \otimes e^j \otimes e^k dV_{jk}^i$$

où

$$\begin{aligned} d^\nabla(e_i \otimes e^j \otimes e^k) &= \nabla(e_i) \otimes e^j \otimes e^k + e_i \otimes \nabla(e^j) \otimes e^k + e_i \otimes e^j \otimes \nabla(e^k) \\ &= A_i^l e_l \otimes e^j \otimes e^k - e_i \otimes A_l^j e^l \otimes e^k - e_i \otimes e^j \otimes A_l^k e^l \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression donnée plus haut pour les composantes  $DV_{jk}^i$  de  $d^\nabla V$ . Le lecteur généralisera sans peine l'expression donnée pour  $DV_{jk}^i$  à un tenseur- $p$ -forme de rang quelconque.

### Autre exemple

A titre d'exercice, calculons  $d^\nabla u$  où  $u$  est un élément de  $\Gamma E \otimes \Omega^1(M)$ . On choisit un repère  $(e_i)$  dans  $\Gamma E$  et un repère  $(e^\mu)$  dans  $\Omega^1(M)$  il peut s'agir d'un corepère naturel par rapport à une carte ( $e^\mu = dx^\mu$ ) ou d'un corepère mobile quelconque  $e^\mu$  avec  $de^\mu = -\frac{1}{2} f_{\nu\rho}^\mu e^\nu \wedge e^\rho$ . On écrit donc  $u = e_i u^i_\mu e^\mu$ . L'ordre des symboles n'a pas trop d'importance — tout au moins en géométrie commutative! — mais nous suggérons fortement au lecteur d'adopter cette écriture, c'est à dire l'ordre 1)2)3) avec 1), un élément de  $\Gamma E$ , 2), un coefficient, c'est à dire un élément de l'algèbre (commutative)  $C^\infty(M)$  des fonctions sur  $M$ , et 3), une  $p$ -forme. Le lecteur aura sans doute également noté que, conformément à nos habitudes, nous avons omis d'écrire explicitement le

symbole  $\otimes$  du produit tensoriel entre les sections de  $E$  (les  $e_i$ ) et les  $p$ -formes (ici, les  $e^\mu$ ).

La première méthode permettant de calculer  $d^\nabla u$  est d'utiliser la règle de dérivation généralisée qui définit l'opérateur  $d^\nabla$  :

$$\begin{aligned} d^\nabla u &= d^\nabla(e_i u_\mu^i) \wedge e^\mu + e_i u_\mu^i de^\mu \\ &= (\nabla e_i) u_\mu^i \wedge e^\mu + e_i du_\mu^i \wedge e^\mu + e_i u_\mu^i de^\mu \\ &= A_{i\nu}^j e_j e^\nu u_\mu^i \wedge e^\mu + e_i u_{\mu,\nu}^i e^\nu \wedge e^\mu + e_i u_\mu^i de^\mu \end{aligned}$$

Si  $e^\mu = dx^\mu$ , le troisième terme est nul. Par contre, si  $e^\mu$  est un corepère mobile avec fonctions de structure  $f_{\nu\rho}^\mu$ , il vient (rappelons que  $u_{\mu,\nu}^i = e_\nu[u_\mu^i]$ ),

$$\begin{aligned} d^\nabla u &= e_j (u_{\mu,\nu}^j + A_{i\nu}^j u_\mu^i - u_{\rho 2}^j f_{\nu\mu}^\rho) e^\nu \wedge e^\mu \\ &= e_j (u_{\mu,\nu}^j - u_{\rho 2}^j f_{\nu\mu}^\rho) e^\nu \wedge e^\mu \end{aligned}$$

La deuxième méthode pour calculer  $d^\nabla u$  n'est pas vraiment une méthode puisqu'elle revient à utiliser une formule générale. Posons  $u = e_i u^i$  en ne faisant pas apparaître explicitement l'indice de forme dans l'expression de  $u$ , bien que  $u^i = u_\mu^i e^\mu$ . On écrit immédiatement (voir l'expression "modèle" de  $DV_{jk}^i$  donnée précédemment)

$$d^\nabla u = e_j Du^j$$

avec

$$Du^j = du^j + A_l^j \wedge u^l$$

Le passage d'une expression de  $d^\nabla u$  à l'autre utilise les relations  $A_l^j = A_{l\mu}^j e^\mu$  et  $du^j = d(u_\mu^j e^\mu) = (du_\mu^j) \wedge e^\mu + u_\mu^j de^\mu$ .

Une forme extérieure de degré  $p$  à valeurs dans un fibré vectoriel  $E$  peut, bien sur, être évaluée sur  $p$  vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_p$  tangents à  $M$ . Par exemple, si  $u \in \Omega^1(M, E)$ , en évaluant  $d^\nabla u \in \Omega^2(M, E)$  sur deux vecteurs  $v_1$  et  $v_2$ , on obtient

$$d^\nabla u(v_1, v_2) = \nabla_{v_1} u(v_2) - \nabla_{v_2} u(v_1) - u([v_1, v_2])$$

en effet,

$$\begin{aligned}
 d^\nabla u(e_\sigma, e_\tau) &= e_j(u_{\mu;\nu}^j - u_\rho^j \frac{1}{2} f_{\nu\rho}^\mu) e^\nu \wedge e^\mu(e_\sigma, e_\tau) \\
 &= e_j(u_{\mu;\nu}^j - u_\rho^j \frac{1}{2} f_{\nu\rho}^\mu) (\delta_\sigma^\nu \delta_\tau^\mu - \delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu) \\
 &= e_j(u_{\tau;\sigma}^j - u_{\sigma;\tau}^j - e_j u_\rho^j \frac{1}{2} (f_{\sigma\tau}^\rho - f_{\tau\sigma}^\rho)) \\
 &= e_j((u_{\tau;\sigma}^j - u_{\sigma;\tau}^j) - u_\rho^j f_{\sigma\tau}^\rho) \\
 &= \nabla_{e_\sigma} u(e_\tau) - \nabla_{e_\tau} u(e_\sigma) - u([e_\sigma, e_\tau])
 \end{aligned}$$

Plus généralement, si  $u \in \Omega^p(M, E)$ ,

$$\begin{aligned}
 d^\nabla u(v_1, v_2, \dots, v_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \nabla_{v_i} u(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}) + \\
 &\quad \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} u([v_i, v_j], v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{p+1})
 \end{aligned}$$

Pour conclure cette section, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, malgré la notation utilisée, le carré de l'opérateur  $d^\nabla$  n'est pas nul. C'est d'ailleurs la présence d'un second membre non nul dans l'équation  $(d^\nabla)^2 = F$  qui va nous permettre un peu plus loin de définir l'opérateur de courbure.

### 4.2.9 Différentielles et dérivées covariantes généralisées $\nabla$

#### Remarques

La différentielle covariante  $\nabla\sigma$  d'un élément de  $\Gamma E$  est un élément de  $\Gamma E \otimes \Omega^1(M)$ . En général, les fibrés  $E$  et  $TM$  sont distincts (sauf dans le cas particulier 4.4). Il n'empêche que  $\Omega^1(M)$  peut être considéré comme l'ensemble des sections de  $T^*M$ , et, qu'en conséquence, cet élément  $\nabla\sigma$ , au lieu d'être considéré comme une 1-forme à valeurs dans le fibré vectoriel  $E$  peut être considéré comme une 0-forme à valeurs dans le fibré vectoriel  $T^*M \otimes E$ , c'est à dire un élément de  $\Gamma(T^*M \otimes E)$ . Nous désignerons en général par le symbole  $\Omega^p(X, Y)$  l'ensemble des  $p$ -formes sur  $X$  à valeurs dans  $Y$ . Avec ces notations, nous voyons qu'il est possible d'identifier  $\Omega^1(M, E)$  et  $\Omega^0(M, T^*M \otimes E)$ .

Jusqu'à présent, la connexion (le potentiel de jauge  $A_j^i = A_{j\mu}^i dx^\mu$ ) avait trait au fibré  $E$ , mais il peut se faire... (et généralement il se fait) que  $T^*M$  lui-même soit muni d'une connexion (un potentiel de jauge  $\Gamma_\rho^\nu = \Gamma_{\rho\mu}^\nu dx^\mu$ ). Nous étudierons plus loin, et en détails, le cas particulier des connexions linéaires (du type  $\Gamma_{\rho\mu}^\nu$ ), mais dans le présent paragraphe, nous souhaitons seulement attirer l'attention du lecteur sur l'existence d'une ambiguïté (le fait qu'une 1-forme à valeurs dans un fibré puisse aussi être considérée comme

une 0-forme à valeurs dans un fibré différent) et sur le fait que cette ambiguïté permet, en quelque sorte, d'enrichir la théorie. Reprenons l'exemple de  $\sigma \in \Gamma(E)$ ; on a  $u = d^\nabla \sigma = \nabla \sigma \in \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$ . En tant que 1-forme à valeurs dans le fibré vectoriel  $E$ , nous pouvons faire appel à la théorie des différentielles extérieures covariantes et calculer  $d^\nabla u = (d^\nabla)^2 \sigma$ , qui est un élément de  $\Gamma(E) \otimes \Omega^2(M)$ . Cependant, en considérant  $u$  comme une 0-forme à valeurs dans le fibré  $T^*M \otimes E$ , nous pouvons — *dans la mesure où les deux fibrés  $E$  et  $T^*M$  sont équipés de connexions* — calculer la différentielle covariante  $\nabla u = \nabla \nabla \sigma$ . Lorsque  $\sigma \in \Gamma(E)$ , le calcul de  $\nabla \sigma$  ne fait appel qu'à la connexion  $A_j^i$ , mais celui de  $\nabla u$  (avec  $u = \nabla \sigma$ ) fait appel simultanément à la connexion  $A_j^i$  sur  $E$  et à la connexion  $\Gamma_\nu^\mu$  sur  $T^*M$ . Plus généralement, si  $u$  désigne un objet ayant un certain nombre  $(p, q)$  d'indices de type  $E$  (ou  $E^*$ ) et un certain nombre  $(p', q')$  d'indices de type  $TM$  (ou de type  $T^*M$ ), nous pouvons le considérer comme une 0-forme à valeurs dans  $TM^{p',q'} \otimes E^{p,q}$ , et calculer  $\nabla u$ , qui sera un élément de  $\Gamma(TM^{p',q'} \otimes E^{p,q}) \otimes \Omega^1(M)$ . Nous pouvons aussi, dans le cas où  $u$  est antisymétrique en  $s$  indices de forme ( $s$  indices de type  $T^*M$ ), considérer  $u$  comme un élément de  $\Gamma(TM^{p',q'-s} \otimes E^{p,q}) \otimes \Omega^s(M)$  et calculer sa différentielle extérieure covariante  $d^\nabla u$  qui sera un élément de  $\Gamma(TM^{p',q'-s} \otimes E^{p,q}) \otimes \Omega^{s+1}(M)$ . On imagine aisément la richesse des possibilités... Au niveau des notations, nous adoptons la convention suivante : *si on écrit  $\nabla u$ , c'est que  $u$  doit être considéré comme une 0-forme dans un fibré approprié (même si  $u = \nabla \sigma$ ); par contre, si on écrit  $d^\nabla u$ , c'est que  $u$  doit être considéré comme une  $p$ -forme sur  $M$  et que  $d^\nabla$  est une différentielle extérieure covariante.* En d'autres termes, l'utilisation de  $d^\nabla$  conduit toujours à des objets possédant une certaine antisymétrie, ce qui n'est pas le cas pour  $\nabla$ . Il est bien évident que ces notations sont insuffisantes pour couvrir tous les cas possibles, mais en général le contexte devrait permettre de préciser.

### Exemple

Soit  $u = e_i u_\mu^i e^\mu \in \Gamma E \otimes \Omega^1(M)$ . En tant que tenseur-1-forme, on écrira plutôt  $u = e_i u^i$  sans faire apparaître explicitement l'indice de forme; on a déjà calculé sa différentielle extérieure covariante

$$d^\nabla u = e_i D u^i \in \Gamma E \otimes \Omega^2(M)$$

Par contre, en tant que 0-forme à valeurs dans le fibré  $T^*M \otimes E$ , on fera explicitement apparaître tous les indices  $u_\mu^i$ , et, dans l'hypothèse où le fibré tangent est lui-aussi muni d'une connexion  $\Gamma$ , on pourra calculer la différentielle covariante

$$\nabla u \in \Gamma(T^*M \otimes E) \otimes \Omega^1(M)$$

Il vient

$$\nabla u = \nabla(e^\mu \otimes e_i u_\mu^i) = e^\mu \otimes e_i u_{\mu;\nu}^i e^\nu$$

où

$$u_{\mu;\nu}^i = u_{\mu,\nu}^i + A_{k\nu}^i u_\mu^k - \Gamma_{\mu\nu}^\rho u_\rho^i$$

et  $u_{\mu,\nu}^i = e_\nu[u_\mu^i]$ . En effet

$$\nabla u = e^\mu \otimes e_i . du_\mu^i + e^\mu \otimes (\nabla e_i) . u_\mu^i + (\nabla e^\mu) \otimes e_i . u_\mu^i$$

Par ailleurs,

$$\nabla u(e_\alpha, e_\beta) = e^\mu (e_\alpha) e_i u_{\mu;\nu}^i e^\nu (e_\beta) = \delta_\alpha^\mu e_i u_{\mu;\nu}^i \delta_\beta^\nu = e_i u_{\alpha;\beta}^i$$

et donc  $\nabla u = e^\mu \nabla u(e_\mu, e_\nu) e^\nu$ . On voit que  $\nabla_\beta u = e^\mu e_i u_{\mu;\beta}^i$ , par conséquent,  $\nabla_\beta u(e_\alpha) = \nabla u(e_\alpha, e_\beta)$ . Plus généralement

$$\nabla u(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_{p+1}}) = \nabla_{\alpha_{p+1}} u(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_p})$$

Notons que, conformément à nos conventions, nous avons écrit les vecteurs de base (les  $e^\mu e_i \equiv e^\mu \otimes e_i$ ) à gauche des composantes (les  $u_\mu^i$ ) et la base des 1-formes (les  $e^\nu$ ) à droite des composantes.

### Comparaison entre $\nabla$ et $d^\nabla$

On pourra utilement comparer l'expression de  $\nabla u$  obtenue ci-dessus avec celle de  $d^\nabla u$  calculée auparavant :

$$\begin{aligned} \nabla u &= e^\mu e_i (u_{\mu,\nu}^i + A_{k\nu}^i u_\mu^k - \Gamma_{\mu\nu}^\rho u_\rho^i) e^\nu \\ d^\nabla u &= e_i (u_{\mu,\nu}^i + A_{k\nu}^i u_\mu^k - 0 - \frac{1}{2} u_\rho^i f_{\mu\nu}^\rho) e^\nu \wedge e^\mu \end{aligned}$$

On voit que  $d^\nabla u = -2 \text{Alt } \nabla u$  ou  $\text{Alt}$  désigne l'opérateur d'antisymétrisation. De façon générale, si  $u \in \Omega^p(M, E)$ , on peut fabriquer  $d^\nabla u \in \Omega^{p+1}(M, E)$  ou  $\nabla u \in \Gamma(T^{*p}M \otimes E) \otimes \Omega^1(M) \equiv \Omega^1(M, T^{*p}M \otimes E)$ ; la relation entre les deux est

$$d^\nabla u = (-1)^p (p+1) \text{Alt } \nabla u$$

où l'opérateur d'antisymétrisation  $\text{Alt}$  n'agit pas sur  $E$ .

Notons enfin que  $d^\nabla$  ne fait explicitement intervenir que la connexion  $A$  sur  $E$  alors que  $\nabla$  fait appel à la fois à la connexion  $A$  sur  $E$  et à la connexion  $\Gamma$  sur  $TM$ . Il existe un cas particulièrement intéressant où les fibrés  $E$  et  $TM$  coïncident; nous y reviendrons dans la section consacrée aux connexions linéaires.

## 4.3 Courbure

### 4.3.1 Linéarité de $(d^\nabla)^2$

Comme nous l'avons vu, l'opérateur

$$\nabla = d^\nabla : \Gamma(E) = \Omega^0(M, E) \mapsto \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M) = \Omega^1(M, E)$$

s'étend à un opérateur  $d^\nabla : \Omega^p(M, E) \mapsto \Omega^{p+1}(M, E)$  et vérifie la propriété

$$d^\nabla(\psi \wedge \lambda) = d^\nabla(\psi) \wedge \lambda + (-1)^k \psi \wedge d\lambda$$

lorsque  $\psi \in \Omega^k(M, E)$  et  $\lambda \in \Omega^s(M)$ . On peut donc considérer l'opérateur  $(d^\nabla)^2$  agissant sur les sections de  $E$

$$\boxed{(d^\nabla)^2 : \Gamma(E) \mapsto \Gamma(E) \otimes \Omega^2(M) = \Omega^2(M, E)}$$

La propriété fondamentale de cet opérateur est d'être *linéaire* par rapport à l'algèbre des fonctions sur  $M$ . On se souvient que  $\Gamma(E)$  est un module sur  $C^\infty(M)$ , mais  $d^\nabla$  n'est pas linéaire par rapport aux fonctions (il l'est seulement par rapport aux scalaires), en effet, lorsque  $\sigma \in \Gamma(E)$  et  $f \in C^\infty(M)$ , on a

$$d^\nabla(\sigma.f) = (d^\nabla\sigma).f + \sigma.df \neq (d^\nabla\sigma).f$$

par contre

$$\begin{aligned} (d^\nabla)^2(\sigma.f) &= d^\nabla(d^\nabla\sigma.f + \sigma.df) \\ &= ((d^\nabla)^2\sigma).f - d^\nabla\sigma.df + d^\nabla\sigma.df + \sigma.d^2f \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{(d^\nabla)^2(\sigma.f) = (d^\nabla)^2(\sigma).f}$$

Cette propriété de linéarité est absolument fondamentale. C'est elle qui, en définitive, est responsable du fait que la courbure est caractérisée par un tenseur. Par ailleurs, le fait que  $(d^\nabla)^2$  envoie  $\Gamma(E)$  dans  $\Gamma(E) \otimes \Omega^2(M)$  montre que, si on "gèle" les indices de forme (correspondant à l'espace  $\Omega^2(M)$ ), cet opérateur envoie —linéairement— les sections de  $E$  dans les sections de  $E$ . En d'autres termes  $(d^\nabla)^2$  peut être considéré comme une 2-forme à valeurs dans le fibré des endomorphismes de  $E$ .

### 4.3.2 Expression de l'opérateur de courbure dans les fibrés vectoriels associés

*Remarque :* On peut directement définir la courbure sur un fibré principal en restant "dans le fibré principal" c'est à dire sans avoir besoin de

*se placer sur la base et sans même considérer les fibrés associés. Une telle définition, dans la lignée de celle donnée en section 4.2.1, peut alors se transporter au niveau des différents fibrés vectoriels associés, grâce au choix de la représentation définissant le fibré en question. Il s'agit là d'une méthode élégante mais un peu abstraite en première lecture... Nous y reviendrons un peu plus loin (cf. paragraphe 4.3.6). En attendant, nous préférons définir la courbure plus simplement, dans chaque fibré associé, en utilisant les résultats déjà obtenus pour l'écriture de la dérivée covariante et de la différentielle extérieure covariante.*

Nous venons de voir que le carré de la différentielle extérieure covariante est un opérateur (en général non nul!) qui est linéaire par rapport aux fonctions sur la variété. Appliqué à une section d'un fibré vectoriel  $E$ , il lui fait correspondre une 2-forme (sur la base  $M$ ) à valeurs dans  $E$ ; l'écriture locale de cet opérateur fera donc appel à deux jeux d'indices différents : des indices  $\mu$  et  $\nu$  en position basse, parce qu'il s'agit d'une 2-forme, et deux indices  $i$  et  $j$ , l'un en position haute et l'autre en position basse, en effet, les indices de forme étant fixés, l'opérateur agit comme un endomorphisme de la fibre (il transforme les sections en sections). Cet objet est, de surcroît, antisymétrique par rapport aux indices de forme  $\mu$  et  $\nu$  puisqu'il s'agit... d'une 2-forme! La donnée de cet opérateur fera donc intervenir  $n(n-1)/2 + p^2$  nombres  $F_{j\mu\nu}^i$  si on suppose que  $\dim M = n$  et que la fibre type est un espace vectoriel de dimension  $p$ .

L'objet fabriqué peut être considéré de bien des façons. En effet, si on gèle les indices de forme, on obtient  $F_{\mu\nu}$  qui est une matrice  $p \times p$  dont les éléments de matrice sont les  $F_{j\mu\nu}^i$ . Si par contre, on gèle les indices de fibre, on obtient  $F_j^i$  qui est une 2-forme sur la base. Nous verrons même un peu plus loin encore d'autres façons de considérer cet objet. Certains auteurs réservent des notations différentes pour ces objets qui sont mathématiquement distincts. Nous ne le ferons pas car ne pas vouloir commettre de tels abus de notations nuit, à notre avis, à la compréhension. Chaque fois qu'on a un tenseur appartenant à un espace vectoriel  $E \otimes F \otimes G$ , on peut le considérer comme un élément de  $\text{Hom}((E \otimes F \otimes G)^*, \mathfrak{C})$  ou comme un élément de  $\text{Hom}(E^*, F \otimes G)$  ou comme... Cela ne nous semble pas raisonnable de vouloir, à chaque fois, changer la notation désignant l'objet en question!

Nous poserons donc simplement

$$F = (d^\nabla)^2$$

et nous ferons apparaître tel ou tel jeu d'indices suivant qu'on décidera de saturer le tenseur  $F$  avec tel ou tel indice, conformément aux conventions déjà utilisées maintes fois dans ce qui précède.

Nous calculons maintenant l'expression de l'opérateur de courbure  $F$  en terme de la connexion  $A$ . Soit  $e_i$  une famille de sections (locales ou non) constituant, en chaque point  $x$  d'un certain voisinage de la base  $M$  une base de la fibre  $V_x$  au dessus de  $x$ . On sait que  $(d^\nabla)^2 : \Gamma E = \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^2(M, E)$ . On va calculer

$$(d^\nabla)^2 e_j = e_i F_j^i = e_i \frac{1}{2} F_{j\mu\nu}^i dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Il vient :

$$\begin{aligned} (d^\nabla)^2 e_i &= d^\nabla(\nabla e_i) = d^\nabla(e_j A_{i\nu}^j dx^\nu) \\ &= (d^\nabla e_j) \wedge (A_i^j) + e_j dA_i^j = e_k A_j^k \wedge A_i^j + e_j dA_i^j = e_j (dA_i^j + A_k^j \wedge A_i^k) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{F_i^j = (dA_i^j + A_k^j \wedge A_i^k)}$$

### 4.3.3 Equation de structure pour la courbure

Il existe essentiellement deux façons d'exprimer l'opérateur de courbure. la première, en fonction des coefficients de connexion (potentiels de jauge) est celle que nous venons de voir. La seconde, baptisée "équation de structure" exprime directement la courbure en fonction de l'opérateur de dérivée covariante. A titre d'exercice préliminaire, nous avons déjà calculé explicitement les composantes de la différentielle extérieure covariante  $d^\nabla \sigma$  d'une 1-forme  $\sigma$  à valeurs dans un fibré vectoriel  $E$ . Soit  $\{e^\mu\}$  un co-repère mobile (base constituée de sections locales de  $T^*M$ ) et  $\{e_i\}$  un repère local du fibré  $E$  (base constituée de sections locales de  $E$ ). Soit  $\sigma \in \Omega^1(M, E)$ . On peut donc écrire  $\sigma = e_i \sigma_\mu^i e^\mu$ . Nous avons déjà vu que

$$d^\nabla \sigma(e_\sigma, e_\tau) = \nabla_\sigma \sigma(e_\tau) - \nabla_\tau \sigma(e_\sigma) - \sigma([e_\sigma, e_\tau])$$

Supposons maintenant que la 1-forme  $\sigma$ , à valeurs dans  $E$  soit elle-même obtenue comme la différentielle d'une section  $v$  de  $E$  :  $\sigma = \nabla v$ . Dans ce cas  $(d^\nabla)^2 v = d^\nabla \sigma$ . Nous utilisons le calcul précédent ; il vient

$$\begin{aligned} (d^\nabla)^2 v(e_\mu, e_\nu) &= d^\nabla \sigma(e_\mu, e_\nu) \\ &= \nabla_\mu \sigma(e_\nu) - \nabla_\nu \sigma(e_\mu) - \sigma([e_\mu, e_\nu]) \\ &= \nabla_\mu \nabla_\nu v - \nabla_\nu \nabla_\mu v - \nabla_{[\mu, \nu]} v \end{aligned}$$

Mais, par définition,

$$(d^\nabla)^2 v(e_\mu, e_\nu) = F_{\mu\nu} v$$

Nous obtenons donc l'équation de structure pour la courbure  $F$  :

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] - \nabla_{[\mu, \nu]}$$

Comme d'habitude, nous avons posé  $\nabla_\mu = \nabla_{e_\mu}$  et même  $[\mu, \nu] = [e_\mu, e_\nu]$  pour alléger les notations. Noter que le second terme de l'équation de structure pour l'opérateur de courbure s'annule lorsque le repère choisi dans  $TM$  est un repère naturel, puisque, dans un tel cas,  $[e_\mu, e_\nu] = 0$ . Rappelons que,  $\mu$  et  $\nu$  étant fixés,  $F_{\mu\nu}$  est un opérateur (linéaire), plus précisément un endomorphisme de la fibre au dessus du point  $x$  dont les éléments de matrice sont des nombres  $F_{j\mu\nu}^i$ . Rappelons également que nous écrivons toujours les indices de forme "en dernier", c'est à dire  $F_{j\mu\nu}^i$  et *non*  $F_{\mu\nu j}^i$ .

#### 4.3.4 Identité de Bianchi pour la courbure

Cette identité, désignée souvent sous le nom de *deuxième identité de Bianchi* (nous verrons la "première" dans le chapitre consacré aux connexions linéaires) est une identité satisfaite par l'opérateur de courbure. Elle s'obtient en utilisant la définition de  $F = dA + A \wedge A$  et les propriétés élémentaires suivantes :  $d^2 = 0$  et  $A \wedge (A \wedge A) = (A \wedge A) \wedge A$ .

Tout d'abord  $F = dA + A \wedge A \Rightarrow dF = d^2 A + dA \wedge A - A \wedge dA$ . On utilise alors une deuxième fois la définition de  $F$  en remplaçant  $dA$  par  $F - A \wedge A$  dans la dernière expression. Il vient  $dF = 0 + (F - A \wedge A) \wedge A - A \wedge (F - A \wedge A)$ , d'où

$$dF + A \wedge F = F \wedge A$$

On peut écrire explicitement les indices de forme : voir page 206.

Notons que, lorsque le groupe structural est abélien,  $A \wedge F - F \wedge A = 0$  puisque ces formes sont à valeurs réelles. L'identité de Bianchi s'écrit alors simplement  $dF = 0$ , ce qui nous donne la "moitié" des équations de Maxwell décrivant le champ électromagnétique (celles qui ne font pas intervenir les sources). Dans le cas non abélien, et dans le contexte de l'étude des particules élémentaires (par exemple dans l'étude du champ chromodynamique), la même équation de Bianchi nous donne la "moitié" des équations de Yang-Mills (celles qui ne font pas intervenir les sources).

### 4.3.5 Transformation de jauge pour la courbure

Soit  $\omega$  une forme de connexion sur un fibré principal  $P$  et  $\Omega = D\omega$  la forme de courbure correspondante. Nous avons vu que la définition du potentiel de jauge  $A$  et de la courbure  $F$  faisait appel au choix d'une section locale

$$\sigma : x \in M \longrightarrow \sigma(x) \in P$$

Nous allons momentanément désigner par  ${}^\sigma A$  et  ${}^\sigma F$  le potentiel de jauge et la courbure correspondante. Soit

$$\tau : x \in M \longrightarrow \tau(x) \in P$$

une autre section locale qu'on obtient à partir de  $\sigma$  par une fonction de transition

$$g_{\sigma\tau} : x \in M \longrightarrow g_{\sigma\tau}(x) \in G$$

Rappelons que

$$\tau(x) = \sigma(x)g_{\sigma\tau}(x)$$

Nous avons étudié au 4.2.4 comment se transformaient les potentiels de jauge par changement de section, à savoir,

$${}^\tau A = g_{\sigma\tau}^{-1} {}^\sigma A g_{\sigma\tau} + g_{\sigma\tau}^{-1} dg_{\sigma\tau}$$

La courbure associée à  ${}^\tau A$  est égale à  ${}^\tau F = d{}^\tau A + {}^\tau A \wedge {}^\tau A$ . En remplaçant  ${}^\tau A$  par son expression en fonction de  ${}^\sigma A$ , nous allons découvrir la loi de transformation pour la courbure. Notons provisoirement  $A = {}^\sigma A$  et  $g = g_{\sigma\tau}$ ; il vient

$$\begin{aligned} {}^\tau F &= d(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) + (g^{-1}Ag + g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}Ag + g^{-1}dg) \\ &= (-g^{-2}dg \wedge Ag + g^{-1}dAg - g^{-1}A \wedge dg) + (-g^{(-2)}dg \wedge dg + g^{-1}d^2g) + \\ &\quad g^{-1}A \wedge Ag + g^{-1}dg \wedge g^{-1}Ag + g^{-1}A \wedge dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \\ &= (-g^{-2}dg \wedge Ag + g^{-1}(dA + A \wedge A)g - g^{-1}A \wedge dg \\ &\quad + 0 + 0 + g^{-1}dg \wedge g^{-1}Ag + (g^{-1}Ag) \wedge (g^{-1}dg)) \\ &= g^{-1}(dA + A \wedge A)g \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés élémentaires de la différentielle  $d$ , nous voyons que tous les termes se compensent à l'exception de deux, et, qu'en conséquence,

$$\boxed{{}^\tau F = g_{\sigma\tau}^{-1} {}^\sigma F g_{\sigma\tau}}$$

Attention : il n'y a aucune sommation sur  $\sigma$  et  $\tau$  (les indices ne désignent pas ici des composantes mais servent seulement à désigner les objets eux-mêmes). Il faut remarquer la simplicité de cette loi de transformation, lorsqu'on la compare à celle du potentiel de jauge. Noter qu'en particulier, le terme "dérivatif"  $g^{-1}dg$  a disparu.

### 4.3.6 Forme de connexion, différentielle covariante et courbure dans les fibrés principaux (compléments)

#### Remarque générale

Nous avons tout d'abord défini la forme de connexion  $\omega$  au niveau de fibré principal, puis le potentiel de jauge  $A_\mu^\alpha$  sur la base ( $A$  n'est rien d'autre qu'une écriture locale de  $\omega$ ), puis nous avons défini la matrice de connexion  $A_{j\mu}^i$  dans chaque fibré associé. Il est possible d'adopter une démarche similaire pour la courbure associée à une connexion : il est possible de définir une 2-forme de courbure  $\Omega$  au niveau du fibré principal, puis son écriture locale  $F_{\mu\nu}^\alpha$  sur la base, puis enfin le tenseur  $F_{j\mu\nu}^i = F_{\mu\nu}^\alpha \rho(X_\alpha)_j^i$  dans chaque fibré associé caractérisé par une représentation  $\rho$  du groupe structural. *Bien entendu, l'objet ainsi obtenu doit coïncider avec la courbure introduite et étudiée dans les sous-sections précédentes où nous avons travaillé tout du long dans les fibrés vectoriels.* Cela dit, nous avons préféré, dans le cadre de cet ouvrage, pour des raisons d'ordre aussi bien pédagogiques que pratiques, développer le formalisme de la courbure dans les fibrés vectoriels. Nous allons néanmoins énoncer quelques définitions et résultats généraux, de façon à ce que lecteur se fasse une idée de ce qu'aurait pu être une autre façon de présenter le sujet. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'équivalence des différentes approches.

#### Forme de connexion

Compléments sans démonstration. Soit  $P = P(M, G)$  un fibré principal muni d'une forme de connexion  $\omega$ . Nous savons déjà que les noyaux de  $\omega$  en  $e$  et en  $eg, g \in G$  sont reliés par  $\text{Ker } \omega_{eg} = (\text{Ker } \omega_e)g$ . Par ailleurs, on sait que la composée de  $\omega$  avec l'application  $(R_z)_* : \text{Lie } G \mapsto T(z, P)$  qui, à tout élément de l'algèbre de Lie associe un vecteur tangent en  $z$ , doit coïncider avec l'application identique. On en déduit la loi de transformation suivante pour  $\omega$  :

$$\boxed{R_g^* \omega = \text{Ad}_g^{-1} \omega}$$

où  $R_g$  est définie par  $z \in P \rightarrow zg \in P$ . Pour conclure ce paragraphe, notons qu'on aurait pu définir la connexion comme la donnée d'une forme  $\omega$  sur  $P$ , à valeurs dans  $\text{Lie } G$ , telle que  $\omega(\hat{X}_\alpha(z)) = X_\alpha$  et satisfaisant à la propriété d'équivariance ci-dessus.

### Différentielle covariante

La *différentielle covariante sur un fibré principal*, que nous noterons  $D$  et non  $\nabla$  se définit comme suit. Si  $\vec{\lambda}$  est une  $p$ -forme sur  $P$  (à valeurs réelles ou complexes, à valeurs dans un espace vectoriel, ou encore à valeurs dans une algèbre de Lie), on définit  $D\vec{\lambda}$  comme la différentielle extérieure (usuelle) de l'horizontalisée de  $\vec{\lambda}$ . Cela signifie que pour calculer  $D\vec{\lambda}(w_1, w_2, \dots, w_p, w_{p+1})$  on évalue la différentielle  $d\vec{\lambda}$  sur l'horizontalisé des vecteurs  $w_1, w_2, \dots, w_{p+1}$ .

$$\boxed{D\vec{\lambda}(w_1, \dots, w_{p+1}) = d\vec{\lambda}(w_1^h, \dots, w_{p+1}^h)}$$

Cette définition est générale et ne suppose ni que  $\vec{\lambda}$  est horizontal, ni qu'il est équivariant. Lorsque  $\rho$  est une représentation du groupe structural  $G$  et que  $\vec{\lambda}$  est horizontal et équivariant de type  $\rho$ , c'est à dire qu'il est à valeurs dans l'espace vectoriel support de la représentation  $\rho$  et que  $\vec{\lambda}_{zg}(w_1, \dots, w_p) = \rho(g^{-1})\vec{\lambda}_z(w_1, \dots, w_p)$ , on démontre que

$$\boxed{D\vec{\lambda} = d\vec{\lambda} + \rho(\omega) \wedge \vec{\lambda}}$$

C'est volontairement que La notation  $D$  utilisée ici coïncide avec celle introduite au paragraphe 4.2.7. Notons également que  $D\vec{\lambda}$  s'annule dès que l'un de ses arguments est un vecteur vertical :  $D\vec{\lambda}$  est donc une forme horizontale.

### L'opérateur de courbure dans les fibrés principaux

**Aspect global** La 2-forme de courbure sur  $P$ , que nous noterons  $\Omega$  (et non  $F$ ) est définie très simplement comme

$$\boxed{\Omega = D\omega}$$

$\Omega$  est donc une 2-forme à valeurs dans  $Lie G$ . Par construction, c'est une forme horizontale. Noter que la forme de connexion, au contraire, est verticale puisque les vecteurs horizontaux constituent son noyau. A l'aide de la définition générale de  $D$ , on montre alors que

$$\boxed{\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]}$$

Il n'y a aucune contradiction entre les expressions données précédemment pour  $D\vec{\lambda}$  et  $D\omega$  (présence du facteur 1/2) car la forme  $\omega$  est à valeurs dans  $Lie G$ . Notons aussi que le résultat obtenu pour  $\vec{\lambda}$  supposait ce dernier horizontal, ce qui n'est manifestement jamais le cas pour  $\omega$ .

**Aspect local** De la même façon que nous sommes passés de  $\omega$ , défini sur  $P$  à son expression locale, le potentiel de jauge  $A$  (la 1-forme définie sur  $M$  par  $A(v) = \omega(\sigma_*v)$ ), nous pouvons passer de  $\Omega$  (défini sur  $P$ ) à son expression locale, qui est une 2-forme  $F$  définie sur  $M$  et à valeurs dans  $Lie G$ . Choisissons en effet une section locale  $x \in M \rightarrow \sigma(x) \in P$ , et  $v_1, v_2$ , deux vecteurs en  $x$ . On pose

$$F(v_1, v_2) = \Omega(\sigma_*v_1, \sigma_*v_2)$$

On transporte (“push forward”) donc d’abord  $v_1$  et  $v_2$  par l’application linéaire tangente à  $\sigma$  puis on utilise  $\Omega$  pour obtenir un élément de  $Lie G$ .

Si  $v_1$  et  $v_2$  sont deux vecteurs  $e_\mu, e_\nu$  appartenant à un repère mobile  $\{e_\mu\}$ , on pose  $F_{\mu\nu} = F(e_\mu, e_\nu)$ . Cette expression appartient à  $Lie G$ . Si on choisit une base  $\{X_\alpha\}$  de cette algèbre de Lie, on peut décomposer  $F_{\mu\nu}$  sur cette base, et on écrit donc

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha X_\alpha$$

Les indices  $\mu$  et  $\nu$  peuvent prendre des valeurs allant de 1 à  $n = dim M$  mais l’indice  $\alpha$  va de 1 à  $dim G$ .

### Passage aux fibrés associés

Soit maintenant  $E = E(M, V)$  un fibré vectoriel associé à  $P$  via une représentation  $\rho$  de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$  de dimension  $p$ .

**Aspect global** La forme de connexion  $\omega$ , à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  devient  $\rho(\omega)$  et, de la même façon, la forme de courbure  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  devient  $\rho(\Omega)$  et est à valeurs dans les endomorphismes de  $V$ . On a encore

$$\rho(\Omega) = \rho d(\omega) + \frac{1}{2}[\rho(\omega) \wedge \rho(\omega)]$$

**Aspect local** Pour obtenir l’expression locale de l’opérateur de courbure, il existe deux possibilités. La première est de transporter l’expression de  $F$ , un élément de  $\Omega^2(M, \mathfrak{g})$ , dans le fibré vectoriel caractérisé par la représentation  $\rho$  (il s’agit donc en fait de  $\rho(F) \in \Omega^2(M, End(V))$ ) mais nous continuerons à le noter abusivement  $F$ ) en posant

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \text{ avec } F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \text{ et } T_\alpha = \rho(X_\alpha)$$

Notons que  $X_\alpha$  est un élément de l’algèbre de Lie de  $G$  mais que  $T_\alpha = \rho(X_\alpha)$  est un endomorphisme de l’espace vectoriel  $V$ . Relativement à un repère local

$e_i$  du fibré  $E$  (c'est à dire le choix, en tout point  $x$  appartenant à un ouvert  $U \subset M$ , d'une base de la fibre  $V_x$  au dessus de  $x$ ) on pourra noter  $F_{j\mu\nu}^i$  les composantes de l'endomorphisme  $F_{\mu\nu}$ .

La deuxième possibilité est de représenter localement la 2-forme  $\rho(\Omega)$ . Notons à ce propos que

$$A_j^i \wedge A_k^j = \frac{1}{2}[A \wedge A]_k^i$$

en effet

$$\begin{aligned} A_j^i \wedge A_k^j &= A^\alpha (T_\alpha)_j^i \wedge A^\beta (T_\beta)_k^j = A^\alpha \wedge A^\beta (T_\alpha T_\beta)_k^i \\ &= \frac{1}{2}(A^\alpha \wedge A^\beta (T_\alpha T_\beta)_k^i + A^\beta \wedge A^\alpha (T_\beta T_\alpha)_k^i) \\ &= \frac{1}{2}(A^\alpha \wedge A^\beta [T_\alpha, T_\beta]_k^i) = \frac{1}{2}[A \wedge A]_k^i \end{aligned}$$

Ainsi

$$F = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \Leftrightarrow F_j^i = dA_j^i + A_k^i \wedge A_j^k$$

chose que nous savions déjà.

Rappelons une fois de plus que la courbure  $\Omega$ , dans  $P$ , ne dépend que du choix de la connexion, alors que l'objet  $F$  qui lui correspond sur la base (ou dans un fibré associé) dépend également du choix d'une section locale  $\sigma$ . Nous notons encore  $F$  cet opérateur de courbure, mais un "puriste" rajouterait quelque part les symboles  $\sigma$  et  $\rho$  pour se rappeler que la définition dépend de la section locale  $\sigma$  (dépendance "de jauge") et de la représentation  $\rho$  choisie.

Encore une fois, nous laissons au lecteur le soin de démontrer que cette définition de la courbure au niveau des fibrés associés coïncide avec celle donnée dans les sections précédentes.

**L'opérateur  $D^2$**  Les expressions données pour  $D\vec{\lambda}$  et  $D\omega$  conduisent à l'identité de Bianchi que nous avons déjà étudiée auparavant (mais écrite à l'aide de  $F$ )

$$D\Omega = D^2\omega = 0$$

ainsi qu'à

$$D^2\vec{\lambda} = \rho(\Omega) \wedge \vec{\lambda}$$

lorsque  $\vec{\lambda}$  est horizontale et équivariante.

### Mise en garde concernant l'utilisation de la notation $D$

La différentielle covariante  $D$  agit sur les formes (n'importe quelles formes) définies sur le fibré principal  $P$ . Certaines de ces formes sont verticales (c'est le cas de la forme de connexion  $\omega$ ), et les autres sont horizontales (c'est le cas de la forme de courbure). Par ailleurs, on sait comment associer, à toute  $p$ -forme  $\lambda$  sur  $M$  à valeurs dans le fibré vectoriel  $E$ , une  $p$ -forme  $\vec{\lambda}$  sur  $P$ , équivariante, à valeurs dans la fibre type; par construction,  $\vec{\lambda}$  est aussi une forme horizontale. La différentielle covariante  $D$  agit aussi bien sur  $\omega$  que sur  $\Omega$  ou  $\vec{\lambda}$ . Cependant, nous avons déjà introduit un opérateur  $D$  agissant sur les sections de fibrés associés (ou plus généralement sur les sections- $p$ -formes) ainsi que les règles de calcul correspondantes. Pour un objet équivariant et horizontal, il est facile de voir que les notations sont compatibles en ce sens que, si  $\lambda = classe((z, \vec{\lambda}))$  alors  $d^\nabla \lambda = classe((z, D\vec{\lambda}))$ . Par contre, il est dangereux d'utiliser la notation  $D$  en dehors de ce contexte; c'est ainsi, par exemple, que nous nous garderons d'appliquer  $D$  (ou  $d^\nabla$ ) au potentiel de jauge  $A$  lui-même (car il s'agit alors du pull-back, via une section locale, d'une forme verticale).

### 4.3.7 Ecritures diverses de la courbure $F$ (récapitulatif)

Nous avons déjà mentionné les diverses façons de considérer cet objet. Nous nous contentons ici de rassembler les diverses notations et formules essentielles. On pose  $T_\alpha = \rho(X_\alpha)$ .

$$\begin{aligned}
 F &= (d^\nabla)^2 \\
 F_{\mu\nu} &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu] - \nabla_{[\mu, \nu]} \\
 F_j^i &= dA_j^i + A_k^i \wedge A_j^k \Leftrightarrow F = dA + A \wedge A \\
 F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\
 F_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \\
 F_{j\mu\nu}^i &= F_{\mu\nu}^\alpha (T_\alpha)_j^i
 \end{aligned}$$

Les physiciens des particules ont l'habitude de développer la courbure sur les générateurs de l'algèbre de Lie, et pour cette raison utilisent le plus souvent les composantes  $F_{\mu\nu}^\alpha$ . Par contre, les astrophysiciens, cosmologistes et autres spécialistes des phénomènes gravitationnels ont plutôt l'habitude d'utiliser les composantes  $F_{j\mu\nu}^i$ . Le lien entre les deux sortes de notations se fait grâce aux relations précédentes (rappelons que  $(T_\alpha)_j^i$  désigne, dans le

repère  $\{e_i\}$  du fibré vectoriel, les éléments de matrice  $(i, j)$  de la matrice  $T_\alpha$ , image du générateur  $X_\alpha$  de  $Lie G$  dans la représentation considérée.

### 4.3.8 Connexions et opérations de Cartan

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'un espace fibré principal  $P$  permettait automatiquement de définir une opération de Cartan de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur l'algèbre différentielle  $\Omega(P)$  des formes différentielles sur  $P$ , c'est à dire un produit intérieur  $i_X$  et une dérivée de Lie  $L_X$ , indexés par  $X \in \mathfrak{g}$  obéissant aux relations usuelles. La seule structure de fibré principal nous a ainsi permis de définir et de caractériser les notions de formes invariantes, horizontales ou basiques.

Nous voulons maintenant généraliser ces opérateurs de façon à ce qu'ils puissent agir sur des formes sur  $P$  à valeurs dans une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire sur les éléments de  $\Omega(P, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \Omega(P)$ .

Soit  $\tau \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^s(P)$  et  $X \in \mathfrak{g}$ , on peut décomposer  $\tau$  comme une somme de termes du type  $Y \otimes \alpha$  avec  $Y \in \mathfrak{g}$  et  $\alpha \in \Omega^s(P)$ . On définit :

$$i_X(Y \otimes \alpha) = Y \otimes i_X \alpha \in \Omega^{s-1}(P)$$

$$L_X(Y \otimes \alpha) = Y \otimes L_X \alpha \in \Omega^s(P)$$

$$d(Y \otimes \alpha) = Y \otimes d\alpha \in \Omega^{s+1}(P)$$

ainsi que le crochet

$$[Y_1 \otimes \alpha \wedge Y_2 \otimes \beta] = [Y_1, Y_2] \otimes \alpha \wedge \beta$$

avec  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$  et  $\alpha, \beta \in \Omega(P)$ . Ces concepts se généralisent immédiatement au cas où l'algèbre différentielle  $\Omega(P)$  est remplacée par une algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée quelconque munie d'une opération de Cartan.

Une connexion algébrique  $\omega$  sur l'algèbre différentielle  $\Omega(P)$  est, par définition, la donnée d'un élément de  $\mathfrak{g} \otimes \Omega^1(P)$  obéissant aux deux conditions suivantes

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad i_X \omega = X \text{ (verticalité)}$$

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad L_X \omega = [\omega \wedge X] \text{ (équivariance)}$$

Cette définition est encore valable lorsqu'on remplace  $\Omega(P)$  par une algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée quelconque munie d'une opération de Cartan. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la notion de forme de connexion, telle qu'elle a été définie précédemment coïncide bien avec la notion de connexion algébrique sur  $\Omega(P)$ .

De façon générale, on appelle *courbure d'une connexion algébrique* la 2-forme  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  définie par

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2} [\omega \wedge \omega]$$

On vérifie alors les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathfrak{g} \quad i_X \Omega &= 0 \text{ (horizontalité)} \\ \forall X \in \mathfrak{g} \quad L_X \Omega &= [\Omega \wedge X] \text{ (équivariance)} \end{aligned}$$

### 4.3.9 Groupe d'holonomie d'une connexion, fibré d'holonomie

Il s'agit là d'un important sujet mais nous ne ferons que donner quelques définitions générales et énoncer un théorème célèbre.

Soit  $z$  un point d'un fibré principal  $P = P(M, G)$  qu'on supposera muni d'une connexion  $\omega$ . Le *groupe d'holonomie*  $H(z)$  de la connexion  $\omega$  au point  $z$  est défini comme suit

$$H(z) = \{g \in G \mid z \text{ et } zg \text{ peuvent être reliés par une courbe horizontale}\}$$

Il est bien évident que  $H(z)$  est un sous-groupe du groupe structural mais il faut bien noter que le sous-groupe en question peut être, dans certains cas, assez "petit". Intuitivement, on décrit, sur la base, une courbe quelconque revenant à son point de départ, et on décide de transporter un repère avec soi (le "repère"  $z$ ) par parallélisme. Lorsqu'on revient à son point de départ, le repère aura tourné par un élément  $g$  de  $G$  qui dépend, en général, aussi bien du chemin suivi que du repère de départ.

Nous venons de considérer l'ensemble des points de  $P$  qui, d'une part, sont situés dans la même fibre que  $z$  et qui, d'autre part, peuvent être reliés à  $z$  par une courbe horizontale. On peut, de façon plus générale ne pas supposer que ces points sont dans la même fibre. On obtient ainsi la définition du *fibré d'holonomie* en  $z$  :

$$Y(z) = \{z' \in P \mid z \text{ et } z' \text{ peuvent être reliés par une courbe horizontale}\}$$

On peut montrer que  $Y(z)$  est effectivement un espace fibré de groupe structural  $H(z)$ . Noter qu'on obtient ainsi un espace fibré *pour chaque point*  $z$ .

Soient  $Z_1$  et  $Z_2$ , deux champs de vecteurs horizontaux et  $\Omega$  la 2-forme de courbure associée à la connexion choisie. On démontre alors (théorème d'Ambrose-Singer) que les éléments de  $Lie G$  qui sont de la forme  $\Omega_z(Z_1(z), Z_2(z))$  engendrent l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie au point  $z$ .

D'une certaine façon, le groupe d'holonomie en  $z$  fournit donc une estimation de la courbure en ce point. Ceci est d'ailleurs assez intuitif : si un transport par parallélisme le long d'une courbe fermée n'entraîne aucune "rotation" du repère, c'est que la région dans laquelle on se promène est assez plate ...

### 4.3.10 Réduction des connexions

Soit  $P = P(M, G)$ , un espace fibré principal,  $H$  un sous-groupe de  $G$  et soit  $Q = Q(M, H)$  une réduction du fibré  $P$ . Nous savons qu'une telle réduction est associée au choix d'une section globale (que nous désignerons par  $\Phi$ ) dans le fibré en espaces homogènes  $E = E(M, G/H)$  qui est associé à  $P$  via l'action à gauche de  $G$  sur  $G/H$ . On rappelle que  $Q = p^{-1}(\Phi(M))$  où  $p$  désigne la projection de  $P$  sur  $E = P \text{ mod } H$ .

Soit maintenant  $\omega$  une forme de connexion définissant une forme de connexion principale dans  $P$ . On dira que cette connexion est réductible et se réduit à  $Q$  si la restriction (au sens de la restriction des applications) de  $\omega$  à  $Q$  définit une connexion principale dans le fibré  $Q$ . En particulier,  $\omega$ , restreinte à  $Q$  doit être à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe  $H$ .

Au niveau des algèbres de Lie, nous pouvons écrire  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$  où  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  désignent respectivement les algèbres de Lie de  $G$  et de  $H$ , et où  $\mathfrak{s}$  est un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ , espace vectoriel qui peut être identifié avec l'espace tangent à l'origine de  $S = G/H$ . Supposer la connexion  $\omega$  réductible revient à supposer qu'elle ne possède pas de composantes le long de l'espace vectoriel  $\mathfrak{s}$ .

Soit  $\omega$  une forme de connexion quelconque dans le fibré  $P$  et  $\omega_Q$  sa restriction au sous-fibré  $Q$ . On peut toujours décomposer

$$\omega = \omega_\Phi + \theta_\Phi$$

avec  $\omega_\Phi(V) \in \mathfrak{h}$  et  $\theta_\Phi(V) \in \mathfrak{s}$  lorsque  $V \in TP$ . Il est facile de voir que  $\omega_\Phi$  est une forme de connexion sur le fibré principal  $Q$  et que, plus généralement, il existe une bijection entre l'ensemble des connexions  $\omega$  sur  $P$  et l'ensemble des couples  $(\omega_\Phi, \theta_\Phi)$  où  $\omega_Q$  est une connexion sur  $Q$  et où  $\theta_\Phi$  est une 1-forme à valeurs dans  $\mathfrak{s}$ . Supposer  $\omega$  réductible revient dès lors à supposer que  $\theta_\Phi = 0$ .

Soit  $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$  la courbure de  $\omega$  et  $\Omega_Q$  sa restriction à  $Q$ . Il vient immédiatement :

$$\Omega_Q = \Omega_\Phi + D\theta_\Phi + \frac{1}{2}[\theta_\Phi \wedge \theta_\Phi]$$

où  $\Omega_\Phi = d\omega_\Phi + \frac{1}{2}[\omega_\Phi \wedge \omega_\Phi]$  et  $D\theta_\Phi = d\theta_\Phi + [\omega_\Phi \wedge \theta_\Phi]$ .

Cette décomposition de la forme de connexion  $\omega$  et de la courbure correspondante  $\Omega$  peut être effectuée chaque fois qu'on a une réduction du fibré

$P$  (chaque fois qu'on a une section globale  $\Phi$  de  $P \bmod H$ ). La forme de connexion elle-même n'est pas nécessairement réductible : en général  $\theta_\Phi \neq 0$ .

Citons trois exemples particulièrement importants de ce type de construction. Nous n'aurons pas le loisir de beaucoup les discuter plus avant mais nous les proposons néanmoins au lecteur, comme thèmes de réflexion.

- En physique, cette décomposition de la forme de connexion apparaît lorsqu'on analyse le phénomène de *brisure de symétrie* : la forme de connexion  $\omega_\Phi$  (où plutôt le potentiel de Yang-Mills associé) est le champ de Yang-Mills survivant à la brisure de symétrie, et  $\tau_\Phi$  (où plutôt le potentiel associé) décrit les bosons vectoriels massifs.
- Il existe un fibré principal dont nous n'avons jamais parlé et qu'on peut construire en élargissant le fibré  $FM$  des repères linéaires : c'est le fibré  $AM$  des *repères affines*. On le construit par la méthode générale d'élargissement des espaces fibrés, en remplaçant le groupe de structure de  $FM$  (à savoir le groupe linéaire  $GL(n)$ ) par son produit semi-direct avec les translations, c'est à dire le groupe affine  $GL(n) \circ \mathfrak{R}^n$ . Conformément à la discussion qui précède, on peut, à l'aide d'une connexion linéaire (une connexion sur  $FM$ ) et de la 1-forme canonique  $\theta$  sur  $FM$  à valeurs dans  $\mathfrak{R}^n$  (un élément particulier de  $\Lambda^1(FM, \mathfrak{R}^n)$  sur lequel nous reviendrons en section 4.4.4), fabriquer une forme de connexion sur le fibré principal  $AM$ . Une telle connexion sur  $AM$ , construite grâce à la forme canonique  $\theta$ , s'appelle *connexion affine*. (attention : il existe des connexions sur  $AM$  qui ne sont pas de ce type) et la différentielle covariante  $D\theta$  s'interprète, dans ce cas, comme la 2-forme de *torsion*. Nous y reviendrons. Notons que, dans le cas général on peut désigner  $D\theta$  sous le nom de forme de *torsion généralisée*.
- On peut aussi partir du fibré principal  $FM$  des repères linéaires et, grâce au choix d'une métrique (une section globale de  $FM \bmod SO(n)$ , dont la fibre type est  $GL(n)/SO(N)$ ), le réduire à un fibré de repères orthonormés noté  $OM$ . Une connexion arbitraire sur  $FM$  n'est pas nécessairement réductible. On dira qu'une connexion sur  $FM$  est une *connexion métrique*, ou encore, qu'elle est compatible avec la métrique, si elle est réductible. Bien entendu, on pourrait tout aussi bien choisir directement une connexion sur un fibré  $OM$  lui-même caractérisé par le choix d'une métrique. Nous y reviendrons également.

## 4.4 Cas particulier des connexions linéaires

### 4.4.1 Définition et généralités

*A priori*, un fibré principal donné n'est pas nécessairement relié au fibré des repères linéaires d'une variété. Cela étant, il est certain que le fibré des repères linéaires fournit un exemple particulièrement remarquable d'espace fibré. Il en va de même, plus généralement, pour n'importe quel fibré principal associé au fibré tangent d'une variété et pour lequel, donc, le groupe structural est un sous-groupe de  $GL(n, \mathfrak{R})$ .

On dira qu'une connexion est une *connexion linéaire* si elle est définie dans le fibré principal des repères linéaires ou dans un sous-fibré de ce dernier. Ce qu'il y a de particulier dans ce cas est que les indices de fibre (que nous avons noté  $i, j, k \dots$  dans les sections précédentes) peuvent coïncider — ou tout au moins être canoniquement associés — avec les indices de base (que nous avons noté  $\mu, \nu, \rho, \dots$  dans les sections précédentes). Dans le paragraphe consacré aux différentielles extérieures covariantes, nous nous sommes efforcés de bien établir une distinction entre ces deux types d'indices. Le fait de pouvoir les confondre, dans le cas des connexions linéaires, ouvre de nouvelles possibilités (on peut ainsi, par exemple, “contracter” un indice de fibre avec un indice de base) mais est également à l'origine de confusions dangereuses. . .

Bien évidemment, les connexions dans des fibrés vectoriels associés quelconques (non reliés au fibré tangent) sont aussi “linéaires” que “nos” connexions linéaires mais il se trouve qu'une grande partie de la planète (en particulier la communauté des physiciens théoriciens) a adopté cette terminologie, par ailleurs commode.

Nous venons de définir une connexion linéaire comme connexion définie dans le fibré des repères linéaires ou dans un sous-fibré de ce dernier. Il y a là une subtilité qu'il faut bien comprendre : il est certain qu'une forme de connexion à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe  $H$ , avec  $H \subset G$ , peut s'étendre à une forme de connexion à valeurs dans l'algèbre de Lie de  $G$  puisque tout fibré principal peut être élargi (relire à ce sujet la section consacrée au changement de groupe structural dans les fibrés principaux) et qu'il suffit alors de mettre à zéro les composantes supplémentaires de la forme de connexion choisie. Par contre, et même dans le cas où le fibré des repères linéaires peut être réduit (relire la même section), il n'est pas du tout évident que la forme de connexion puisse l'être. Nous reviendrons à ce problème dans la section consacrée à l'étude des connexions riemanniennes.

Il faut enfin attirer l'attention du lecteur sur le fait qu'il est *a priori* possible de fabriquer, à partir d'une variété différentiable de dimension  $n$  donnée, différents fibrés principaux ayant pour groupe structural  $GL(n, \mathfrak{R})$

et ne coïncidant pas entre eux. Par exemple, on peut choisir une variété non parallélisable (comme la sphère  $S^4$ ) et construire d'une part le fibré principal (non trivial) des repères linéaires  $P$  ainsi que le fibré principal trivial  $Q = S^4 \times GL(4, \mathfrak{R})$ .

#### 4.4.2 Potentiel de jauge et courbure des connexions linéaires

Une connexion linéaire étant un cas particulier de connexion principale, tout ce qui a été écrit précédemment à ce sujet reste vrai. Nous nous contenterons donc de re-écrire les formules les plus utiles dans le contexte présent.

*Pour des raisons historiques, le potentiel de jauge se note plutôt  $\Gamma$  (et non  $A$ ) et le tenseur de courbure se note plutôt  $R$  (et non  $F$ ).*

- Soit  $\{X_a\}$  une base de *Lie*  $GL(n, \mathfrak{R})$  et  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  le repère naturel associé à une carte locale sur  $M$ . On pourra écrire

$$\Gamma = \Gamma_\mu^a X_a dx^\mu$$

- En gardant la même notation  $X_a$  pour les matrices qui représentent les générateurs, matrices qui agissent donc sur les  $n$ -uplets de composantes des vecteurs tangents,  $\Gamma$  devient alors une *matrice de connexion* dont les éléments de matrice  $\Gamma_\rho^\nu$  sont des 1-formes, puisque

$$\Gamma_\rho^\nu = \Gamma_{\rho\mu}^\nu dx^\mu \text{ avec } \Gamma_{\rho\mu}^\nu = \Gamma_\mu^a (X_a)_\rho^\nu$$

Les nombres  $\Gamma_{\rho\mu}^\nu$  sont les *coefficients de connexion* qu'on désigne souvent, dans ce cas, sous le nom de *Symboles de Christoffel*. En fait, les symboles de Christoffel désignent traditionnellement les coefficients de connexion associés à la connexion riemannienne (connexion de Levi-Civita) écrits dans un repère naturel (voir plus loin).

- Attention, rien ne nous oblige à choisir la même base dans la fibre au point  $P$  (i.e. dans  $T(M, P)$ ) et dans l'espace tangent au point  $P$  (encore  $T(M, P)$ !). Ainsi donc, nous pouvons choisir sur la base un repère naturel  $\{\partial_\mu\}$  et, sur la fibre —qui coïncide avec la base— un repère mobile  $\{e_\alpha = \Lambda_\alpha^\mu \partial_\mu\}$ ; dans ce cas, les éléments de matrice se noteront  $\Gamma_\beta^\alpha$  et ce seront évidemment toujours des 1-formes  $\Gamma_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\mu}^\alpha dx^\mu$ .
- Par ailleurs, rien ne nous oblige, non plus, à choisir un repère naturel sur la base... On pourrait, en effet, très bien choisir un autre repère mobile  $e_\mu$ , avec co-repère dual  $e^\mu$ , auquel cas, on écrirait  $\Gamma_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\mu}^\alpha e^\mu$ .
- Dans le cas où nous choisissons les indices de base différents des indices de fibre, les diverses formules données dans les sections précédentes

- pour un fibré vectoriel quelconque restent absolument identiques (remplacer seulement les indices de fibre “ $i, j$ ” par les indices appropriés).
- Dans le cas où l’on décide d’utiliser un seul et unique repère local (par exemple un repère naturel  $e_\mu = \partial_\mu$  et co-repère correspondant  $e^\mu = dx^\mu$ ), il faut faire très attention à la position de l’indice de forme (il n’existe pas de conventions universelles!) En général,

$$\boxed{\nabla e_\rho = e_\nu \Gamma_\rho^\nu = e_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\nu e^\mu}$$

Pour un vecteur  $v = e_\nu(\cdot) v^\nu \in TM$ , on obtient

$$\begin{aligned} \nabla v &= \nabla(e_\rho v^\rho) \\ &= (e_\nu \Gamma_\rho^\nu) v^\rho + e_\rho dv^\rho \\ &= (\Gamma_{\rho\mu}^\nu v^\rho + e_\mu[v^\nu]) e_\nu e^\mu \\ &= \nabla_\mu v e^\mu \end{aligned}$$

Notons que

$$\nabla_\mu v = \langle \nabla v, e_\mu \rangle = v_{;\mu}^\nu e_\nu$$

Pour les éléments du dual, la différentiation covariante introduit, comme d’habitude, un signe “moins” :

$$\boxed{\nabla e^\nu = -e^\rho \Gamma_\rho^\nu = -e^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\nu e^\mu}$$

Attention : conformément à nos conventions générales (que nous ne respectons pas toujours!) nous avons écrit les composantes à droite des vecteurs de base, mais, bien que  $e_n u$  soit une dérivation de l’algèbre des fonctions, il ne faut pas confondre le champ de vecteurs  $v = e_\nu v^\nu$ , qui signifie, en fait,  $v[\cdot] = e_\nu[\cdot] v^\nu$  avec la fonction scalaire  $e_\nu[v^\nu]$ !

Re-écrivons, pour terminer, la loi de transformation des coefficients de connexion (avec, par exemple  $e'_{\nu'} = \Lambda_{\nu'}^\mu e_\mu$ )

$$\Gamma_{\rho'\mu'}^{\nu'} = (\Lambda^{-1})_\sigma^{\nu'} \Gamma_{\tau\mu}^\sigma \Lambda_{\rho'}^\tau \Lambda_{\mu'}^\mu + (\Lambda^{-1})_\sigma^{\nu'} \partial_\mu \Lambda_{\rho'}^\sigma \Lambda_{\mu'}^\mu$$

- En ce qui concerne le tenseur associé à l’opérateur de courbure, il se nomme le *tenseur de Riemann* et ses composantes sont notées  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  (au lieu de  $F_{\beta\mu\nu}^\alpha$ ). Si on choisit la même base dans la fibre et dans l’espace tangent au point considéré, il se note alors  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$  et il faut bien entendu se rappeler qu’il est antisymétrique sur les indices  $\mu$  et  $\nu$  puisqu’il provient d’une matrice  $R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$  dont les éléments de matrice  $R_\sigma^\rho$  sont des 2-formes.

Si le repère choisi est un repère naturel  $\{e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ , on a donc

$$R_\sigma^\rho = \frac{1}{2} R_{\sigma\mu\nu}^\rho dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Si le repère choisi est un repère mobile  $\{e_\mu\}$  avec fonctions de structure  $f_{\mu\nu}^\rho$  définies par  $[e_\mu, e_\nu] = f_{\mu\nu}^\rho e_\rho$ , on a

$$R_\sigma^\rho = \frac{1}{2} R_{\sigma\mu\nu}^\rho e^\mu \wedge e^\nu$$

où  $e^\mu$  désigne le corepère mobile dual.

L'expression  $R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ , ou, plus simplement, l'équation de structure pour la courbure,

$$R(u, v) = [\nabla_u, \nabla_v] - \nabla_{[u, v]}$$

équation établie en section 4.3.3, équation qui est, bien sûr, encore valable dans le cas des connexions linéaires, nous permet de calculer explicitement les composantes de  $R$  en fonction des coefficients de connexion et des fonctions de structure du repère. On calcule simplement

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^\alpha &= \langle e^\alpha, R(e_\mu, e_\nu)e_\beta \rangle \\ &= (\Gamma_{\beta\nu, \mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu, \nu}^\alpha) + (\Gamma_{\tau\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\tau - \Gamma_{\beta\tau}^\alpha f_{\mu\nu}^\tau) \end{aligned}}$$

où, comme d'habitude, on a noté  $h_{, \mu} = e_\mu[h]$ , pour toute fonction  $h$ , que  $\{e_\mu\}$  soit un repère mobile ou un repère naturel (dans ce dernier cas,  $f_{\mu\nu}^\tau = 0$ ). L'alignement des indices haut et bas dans la formule précédente est *pour l'instant* sans importance, car on n'a pas encore de métrique (de produit scalaire) pour identifier un espace vectoriel avec son dual, c'est à dire pour "monter" ou "descendre" les indices. Cela dit, c'est une bonne habitude d'écrire  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$  et  $f_{\mu\nu}^\rho$  plutôt que  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$  et  $f_{\mu\nu}^\rho$ , car, dans la section suivante, consacrée aux connexions métriques, nous poserons  $\Gamma_{\alpha\beta\mu} = g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\mu}^\gamma$  et  $f_{\mu\nu\rho} = g_{\rho\sigma} f_{\mu\nu}^\sigma$

#### 4.4.3 Différentielle extérieure covariante (cas des connexions linéaires)

Nous avons déjà défini l'opérateur  $d^\nabla : \Omega^p(M, E) \mapsto \Omega^{p+1}(M, E)$  agissant sur les sections- $p$ -formes d'un fibré vectoriel quelconque. Lorsque  $E = TM$  (ou une puissance tensorielle quelconque d'icelui), ce qui a été précédemment

écrit reste vrai. La nouveauté vient du fait que, par suite de l'identification possible entre indices de base et indices de fibre, un seul et même objet peut être regardé de plusieurs façons différentes. Nous allons directement définir l'action de l'opérateur  $D$ , agissant sur des objets indexés (par exemple  $B^\mu{}_{\nu\rho}$ ) en décidant de *ne jamais faire apparaître les indices de forme* : c'est ainsi que si nous nous intéressons à une 2-forme à valeurs dans le fibré vectoriel  $TM \otimes T^*M \otimes T^*M$ , objet dont la décomposition complète par rapport à un repère naturel s'écrirait

$$B = \frac{1}{2!} B^\mu{}_{\nu\rho\sigma\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho \right) \otimes (dx^\sigma \wedge dx^\tau)$$

ou, mieux encore, plus simplement (c'est à dire en passant le  $\otimes$  sous silence)

$$B = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho \right) \frac{1}{2!} B^\mu{}_{\nu\rho\sigma\tau} (dx^\sigma \wedge dx^\tau)$$

Nous conviendrons de sous-entendre les indices de forme  $\sigma, \tau$  et d'appliquer  $D$  à l'objet  $B^\mu{}_{\nu\rho}$  qui, évidemment, n'est plus une fonction mais une 2-forme, puisque

$$B^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} B^\mu{}_{\nu\rho\sigma\tau} dx^\sigma \wedge dx^\tau$$

C'est donc la notation elle-même qui définit le fibré dans lequel on se place, puisque seuls apparaissent les indices de fibre. On voit donc que

$$B = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho \right) B^\mu{}_{\nu\rho}$$

Pour ce qui est de l'opérateur  $D$  nous obtenons,

$$DB^\mu{}_{\nu\rho} = dB^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma_\lambda^\mu \wedge B^\lambda{}_{\nu\rho} - \Gamma_\nu^\lambda \wedge B^\mu{}_{\lambda\rho} - \Gamma_\rho^\lambda \wedge B^\mu{}_{\nu\lambda}$$

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser (de manière évidente) ces formules pour un objet  $B$  quelconque ayant un nombre quelconque d'indices en haut et en bas. Dans le cas présent, l'objet obtenu est donc une 3-forme à valeurs dans  $TM \otimes T^*M \otimes T^*M$  et on pourrait le noter, de façon intrinsèque, sous la forme  $d^\nabla B$ , avec, par conséquent

$$d^\nabla B = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho \right) DB^\mu{}_{\nu\rho}$$

L'inconvénient de la notation  $d^\nabla B$  est qu'il faut se rappeler dans quel fibré on se place ; en effet, rien ne nous interdit de considérer  $B$  comme une 0-forme à valeurs dans  $TM \otimes (T^*M)^{\otimes 4}$  ou même, comme une 1-forme à valeurs dans  $TM \otimes (T^*M)^{\otimes 3} \dots$  le problème étant alors que les opérateurs

$d^\nabla$  relatifs à ces différents fibrés sont différents et que donc, les objets  $d^\nabla B$  obtenus sont également différents (et tous absolument intrinsèques!). L'action de l'opérateur  $D$ , quant à elle, est bien déterminée, à condition, bien sûr, d'adopter la convention précédemment décrite, à savoir le fait d'écrire systématiquement les indices de fibre et de simultanément masquer les indices de forme. Le lecteur saura donc immédiatement calculer  $DB^\mu{}_{\nu\rho}$  aussi bien que  $DB^\mu{}_{\nu\rho\sigma\tau}$  ou que  $DB^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ .

Pour lever l'ambiguïté concernant la notation  $d^\nabla$ , il faudrait écrire  $d^\nabla_{(p,q)}$  pour la différentielle extérieure covariante agissant sur les formes de degré quelconque à valeurs dans  $(TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}$ .

Pour illustrer notre propos, nous considérons un premier exemple donné par un tenseur antisymétrique de rang 2, noté  $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ , sur la variété  $M$ . Nous pouvons considérer cet objet comme

- Une 2-forme sur  $M$  à valeurs réelles. Dans ce cas, la différentielle extérieure covariante, que nous devrions noter  $d^\nabla_{0,0}$  coïncide avec la différentielle extérieure. En effet, puisqu'il n'y a aucun indice de fibre, l'opérateur  $D$  agit sur  $F$  et

$$DF = dF = d^\nabla_{0,0}F$$

Le résultat est une 3-forme.

- Une 0-forme sur  $M$  à valeur dans le fibré  $T^*M \otimes T^*M$  (en l'occurrence, dans la partie antisymétrique de ce dernier). Dans ce cas l'opérateur  $D$  agit sur  $F_{\mu\nu}$  et

$$DF_{\mu\nu} = dF_{\mu\nu} - \Gamma_\mu^\sigma F_{\sigma\nu} - \Gamma_\nu^\sigma F_{\mu\sigma}$$

Quant à la différentielle extérieure covariante, que nous devrions noter  $d^\nabla_{0,2}$ , elle est donnée par

$$d^\nabla_{0,2}F = (dx^\mu \otimes dx^\nu) \frac{1}{2} DF_{\mu\nu}$$

et coïncide donc tout simplement avec la différentielle covariante usuelle puisque  $F$  est considérée comme 0-forme :  $\nabla F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu;\rho} dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho$  avec  $F_{\mu\nu;\rho} = F_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma F_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma F_{\mu\sigma}$ . Comme d'habitude, la différentielle extérieure covariante d'une 0-forme coïncide avec la différentielle covariante. Notons également que  $\nabla F$  n'est pas complètement antisymétrique : ce n'est pas une 3-forme mais une 1-forme à valeurs dans la partie antisymétrique du produit tensoriel  $T^*M \otimes T^*M$ .

- Une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans le fibré vectoriel  $T^*M$ . Conformément à nos habitudes, nous faisons agir  $D$  sur un objet dont on n'écrit jamais les indices de forme. On pose donc  $F = dx^\mu F_\mu$ , ce qui définit en même temps la 1-forme  $F_\mu = F_{\mu\nu} dx^\nu$ , et on calcule  $DF_\mu = dF_\mu - \Gamma_\mu^\sigma F_\sigma$ . La différentielle extérieure covariante  $d^\nabla_{0,1}F = dx^\mu DF_\mu$  est donc une 2-forme sur  $M$  à valeurs dans  $T^*M$ .
- Les deux indices de  $F_{\mu\nu}$  jouant des rôles semblables, on peut également définir la 1-forme  $F'_\nu = F_{\mu\nu} dx^\mu (= -F_\nu)$ , calculer  $DF'_\nu = dF'_\nu - \Gamma_\nu^\sigma F'_\sigma$  et poser  $d^\nabla_{0,1}F = dx^\nu DF'_\nu (= -d^\nabla_{0,1}F)$

Notre deuxième exemple sera un tenseur symétrique de rang 2 noté  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ . Cet objet peut être considéré comme une 0-forme à valeurs dans le fibré  $T^*M \otimes T^*M$ , en l'occurrence, dans la partie symétrique de ce dernier, ou encore, de deux façons différentes, comme une 1-forme à valeurs dans le fibré  $T^*M$ . Pour être en accord avec nos conventions d'écriture, on devrait plutôt écrire  $g = (dx^\mu \otimes dx^\nu) g_{\mu\nu}$  lorsqu'on veut considérer  $g$  comme 0-forme. Dans ce cas, on posera

$$Dg_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu} - \Gamma_\mu^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_\nu^\sigma g_{\sigma\mu}$$

La différentielle extérieure covariante  $d_{0,2}^\nabla$  coïncide alors avec la différentielle covariante  $\nabla$  puisqu'elle est appliquée à une 0-forme :

$$d_{0,2}^\nabla g = \nabla g = dx^\mu \otimes dx^\nu Dg_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\rho} dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho$$

En tant que 1-forme, on écrira plutôt  $g = dx^\mu g_\mu$ , ce qui définit la 1-forme  $g_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu$ . Dans ce cas, on posera

$$Dg_\mu = dg_\mu - \Gamma_\mu^\sigma g_\sigma$$

et la différentielle extérieure covariante  $d_{0,1}^\nabla g$  sera donnée par

$$d_{0,1}^\nabla g = dx^\mu Dg_\mu$$

Les deux indices de  $g_{\mu\nu}$  jouant des rôles semblables, on peut également “geler” l'indice  $\nu$  et définir un autre objet  $d_{1,0}^\nabla g$ , d'ailleurs égal à  $d_{0,1}g$  puisque  $g$  est symétrique. Nous reviendrons à ces diverses différentielles extérieures en donnant la définition du laplacien de Lichnerowicz, page 205.

#### 4.4.4 Forme canonique (ou forme de soudure)

Le lecteur est maintenant familiarisé avec ce qui fait l'originalité des connexions linéaires par rapport aux connexions principales en général, à savoir la possibilité d'identifier “les indices de base” avec “les indices de fibre”. Il est donc largement temps d'examiner cette identification sous un angle un peu plus géométrique, ceci va nous conduire à découvrir un nouvel objet : la torsion.

Soit  $P = P(M, G)$  le fibré principal des repères sur  $M$ , ou un sous-fibré de ce dernier. Soit  $e$  un élément de  $P$ , c'est à dire, un repère de  $M$ . Considérons un vecteur  $u$  en  $e$ , c'est à dire un élément de  $T(P, e)$ , c'est à dire encore, intuitivement, un “petit déplacement” du repère  $e$  dans l'espace des repères. Grâce à la projection  $\pi : P \mapsto M$  qui, à un repère, associe son origine, ou plutôt, grâce à son application tangente  $\pi_*$ , nous pouvons prendre l'image  $v = \pi_* u$  de  $u$ . Le vecteur  $v$  est un vecteur tangent à  $M$  situé à l'origine du repère  $e : v \in T(M, \pi(e))$ . Ce qu'il y a d'absolument unique dans le

cas du fibré des repères, c'est que nous pouvons maintenant décomposer  $v$  sur l'élément  $e$  de  $P$  d'où nous sommes partis (puisque  $e$  est un repère!) :  $v = e_\mu \cdot v^\mu$ ,  $v^\mu \in \mathfrak{R}$ . Nous avons donc construit une application  $\theta$  qui, à tout vecteur  $u$  tangent au fibré principal  $P$ , associe un  $n$ -uplet de nombres (les composantes de  $v$ ), c'est à dire un élément de  $\mathfrak{R}^n$ . Cette application  $\theta$  est donc une 1-forme sur  $P$  à valeurs dans  $\mathfrak{R}^n$  et est désignée sous le nom de *forme canonique* (le mot "canonique" faisant référence au fait que sa définition ne dépend d'aucun choix de système de coordonnées) et quelquefois sous le nom de *forme de soudure* puisqu'elle permet de "souder" la fibre type  $\mathfrak{R}^n$  (considéré comme espace de représentation pour le groupe linéaire) avec l'espace tangent à la base. Cette forme  $\theta$  est évidemment équivariante puisque  $v = e_\mu \cdot v^\mu = e_\mu \Lambda \cdot \Lambda^{-1} v^\mu$ . Elle définit donc une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans le fibré tangent  $TM = P \times_G \mathfrak{R}^n$ . A ce propos, nous suggérons au lecteur de relire la discussion générale, section 3.3.10, décrivant la correspondance bi-univoque existant entre sections de fibrés associés —ou  $p$ -formes à valeurs dans un fibré associé— et les fonctions —ou les  $p$ -formes— équivariantes, définies sur le fibré principal et à valeurs dans la fibre type. On identifie en général :  $\Omega_{eq}^p(P, \mathfrak{R}^n) \simeq \Omega^p(M, TM)$ .

La 1-forme obtenue sur  $M$  se note encore  $\theta$  et son expression, relativement au choix d'un repère mobile  $\{e_\mu\}$  et du corepère mobile dual  $\{\theta^\mu\}$ , est tout simplement

$$\theta = e_\mu \cdot \theta^\mu \in \Omega^1(M, TM)$$

où, conformément à la convention déjà utilisée précédemment, nous avons omis de faire figurer le symbole du produit tensoriel entre les éléments pris comme base de la fibre (ici  $e_\mu$ ) et ceux pris comme base de l'espace des formes (ici  $\theta^\mu$ ). Nous avons aussi, conformément à nos conventions, écrit les formes à droite des vecteurs de la fibre. Notons enfin que  $\theta$  est bien tel que

$$\theta(v) = e_\mu \cdot \theta^\mu(e_\nu v^\nu) = e_\mu \cdot \theta^\mu(e_\nu) v^\nu = e_\mu \cdot \delta_\nu^\mu v^\nu = e_\mu \cdot v^\mu = v$$

$\theta$  n'est donc rien d'autre que l'application identique... mais considérée comme 1-forme sur  $M$  à valeurs dans le fibré tangent, c'est à dire, comme un élément de  $\Omega^1(M, TM)$ . Dans la littérature physique, le repère mobile  $\{e_\mu\}$  entrant dans l'expression de la forme de soudure est quelquefois appel/ *vierbein* ("quatre pattes").

#### 4.4.5 Torsion

Le lecteur trouve peut-être un peu longue (tordue?) cette variation sur l'application identique... mais il se trouve que c'est elle qui fait la spécificité du fibré principal des repères. Lorsque ce dernier est muni d'une connexion,

la différentielle covariante de  $\theta$  n'est pas nécessairement nulle et n'est autre que la torsion.

Reprenons :

$$\theta = e_\mu \theta^\mu \in \Omega^1(M, TM)$$

est la 1-forme canonique

Définissons la 2-forme de torsion

$$T = d^\nabla \theta \in \Omega^2(M, TM)$$

$T$  est ainsi une 2-forme à valeurs dans le fibré tangent, on peut donc l'écrire

$$T = e_\mu T^\mu$$

où  $T^\mu$  est la 2-forme,

$$T^\mu = D\theta^\mu = \frac{1}{2} T^\mu_{\nu\rho} \theta^\nu \wedge \theta^\rho$$

Bien entendu, on peut également considérer la torsion comme un tenseur de rang 3, de type (1, 2), antisymétrique sur les indices  $\nu$  et  $\rho$ , et écrire

$$T = T^\mu_{\nu\rho} e_\mu \otimes \theta^\nu \otimes \theta^\rho.$$

Calculons à présent la torsion à partir de sa définition :

$$\begin{aligned} T &= d^\nabla \theta = d^\nabla (e_\mu \cdot \theta^\mu) \\ &= (\nabla e_\mu) \wedge \theta^\mu + e_\mu \cdot d\theta^\mu \\ &= e_\nu \Gamma^\nu_\mu \wedge \theta^\mu + e_\mu d\theta^\mu \\ &= e_\mu (d\theta^\mu + \Gamma^\mu_\nu \wedge \theta^\nu) = e_\mu D\theta^\mu \equiv e_\mu \cdot T^\mu \end{aligned}$$

Ainsi

$$T^\mu = d\theta^\mu + \Gamma^\mu_\nu \wedge \theta^\nu$$

et ses composantes sont  $T^\mu_{\nu\rho} = T^\mu(e_\nu, e_\rho)$

La différentielle extérieure ordinaire  $d$  n'agissant que sur les indices de forme, on a  $d\theta = d(e_\mu \cdot \theta^\mu) = e_\mu \cdot d\theta^\mu$  et on peut donc écrire, encore plus simplement

$$T = d\theta + \Gamma \wedge \theta$$

Si on utilise également la notation  $D$  décrite avec force détails en section 4.2.7, on voit que

$$d^\nabla \theta = e_\mu \cdot D\theta^\mu$$

(puisque  $\theta = e_\mu \cdot \theta^\mu$ ), et donc

$$T^\mu = D\theta^\mu$$

On pourra également écrire  $T_{\nu\rho} = T(e_\nu, e_\rho)$ .

### 4.4.6 Equation de structure pour la torsion

Nous avons établi, en section 4.2.8, l'égalité suivante, valable pour la différentielle extérieure covariante d'une 1-forme  $\sigma$  quelconque, à valeurs dans un fibré vectoriel  $E$  : soit  $\sigma \in \Omega^1(M, E)$ , alors

$$d^\nabla \sigma(e_\mu, e_\nu) = \nabla_\mu \sigma(e_\nu) - \nabla_\nu \sigma(e_\mu) - \sigma([e_\mu, e_\nu])$$

Dans le cas particulier où  $E = TM$  et où  $\sigma$  est égale à la forme canonique  $\theta$ , l'égalité précédente se simplifie considérablement puisque  $\theta$  n'est autre que l'identité ( $\theta(v) = v$ ). Il vient donc

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - [e_\mu, e_\nu]$$

Cette dernière égalité, qui est quelquefois prise comme définition de la torsion, est l'équation de structure cherchée. L'expression du tenseur de torsion en termes de coefficients de connexion et des fonctions de structure du repère mobile ( $[e_\mu, e_\nu] = f_{\mu\nu}^\rho e_\rho$ ) est donc la suivante

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}^\rho$$

On retrouve, bien sur, la propriété d'antisymétrie qu'on connaissait déjà :

$$T^\rho_{\mu\nu} = -T^\rho_{\nu\mu}$$

Notons que, si on se place dans un repère naturel ( $f_{\mu\nu}^\rho = 0$ ) l'expression du tenseur de torsion est simplement donnée par la partie antisymétrique des coefficients de connexion. En conséquence, si, dans un repère naturel, la connexion est telle que  $\Gamma^\rho_{\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}$ , la torsion est nulle.

### 4.4.7 Identités de Bianchi pour les connexions linéaires

Nous avons, en section 4.3.4 établi l'identité de Bianchi relative à la courbure  $F$  d'une connexion quelconque  $A$ . Rappelons qu'elle s'écrit  $dF + A \wedge F = F \wedge A$ . Dans le cas des connexions linéaires on obtient donc directement l'identité

$$dR + \Gamma \wedge R = R \wedge \Gamma.$$

Rappelons que cette identité s'obtient en calculant la différentielle extérieure de  $R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ , en substituant  $d\Gamma$  par  $R - \Gamma \wedge \Gamma$  dans le résultat. Pour des raisons historiques cette identité relative à la courbure est connue sous le nom de "deuxième identité de Bianchi". Le qualificatif "deuxième" vient du fait qu'il existe une "première identité de Bianchi" ; c'est une identité

relative à la torsion, elle n'a donc un sens que pour les connexions linéaires. Elle s'obtient par une méthode analogue à la précédente, mais cette fois-ci en calculant la différentielle extérieure de la torsion.

$$\begin{aligned}
T &= d\theta + \Gamma \wedge \theta \\
\implies dT &= 0 + d\Gamma \wedge \theta - \Gamma \wedge d\theta \\
\implies dT &= (R - \Gamma \wedge \Gamma) \wedge \theta - \Gamma \wedge (T - \Gamma \wedge \theta) \\
\implies dT &= R \wedge \theta - \Gamma \wedge \Gamma \wedge \theta - \Gamma \wedge T + \Gamma \wedge \Gamma \wedge \theta
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{dT + \Gamma \wedge T = R \wedge \theta}$$

Les deux identités de Bianchi s'écrivent, comme on vient de le voir, de façon assez simple lorsqu'on utilise des notations suffisamment compactes. On peut même "compactifier" davantage en écrivant  $d^\nabla T = dT + \nabla T = dT + \Gamma \wedge T$  et en utilisant le fait que  $T = d^\nabla \theta$ ; l'identité de Bianchi relative à la torsion s'écrit donc

$$\boxed{(d^\nabla)^2 \theta = R \wedge \theta}$$

ce qui est d'ailleurs bien évident puisque le carré de la différentielle extérieure covariante n'est autre que l'opérateur de courbure. Par contre, si on veut absolument écrire ces identités avec tous les indices, les choses peuvent devenir assez compliquées... Pour apprécier tout le sel de cette remarque, il n'est peut-être pas inutile de nous vautrer, pour un court paragraphe, dans la "débauche des indices", activité qui fut très prisée au début du siècle et qui reste encore presque indispensable lorsqu'on veut effectuer des calculs totalement explicites.

### Première identité (relative à la torsion)

Le membre de droite de cette identité s'écrit explicitement

$$\begin{aligned}
R_\tau^\mu \wedge \theta^\tau &= \frac{1}{2} R^\mu_{\tau\rho'\sigma'} \theta^{\rho'} \wedge \theta^{\sigma'} \wedge \theta^\tau \\
\implies \langle R_\tau^\mu \wedge \theta^\tau, e_\nu \otimes e_\rho \otimes e_\sigma \rangle &= \frac{1}{2} R^\mu_{\tau\rho'\sigma'} \langle \theta^{\rho'} \wedge \theta^{\sigma'} \wedge \theta^\tau, e_\nu \otimes e_\rho \otimes e_\sigma \rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2!} \frac{1}{3!} R^\mu_{\tau\rho'\sigma'} \delta_{\nu\rho\sigma}^{\rho'\sigma'\tau'} = \frac{1}{2} (R^\mu_{\nu\rho\sigma} + R^\mu_{\rho\sigma\nu} + R^\mu_{\sigma\nu\rho})$$

Le membre de gauche, quant à lui,  $dT^\mu + \Gamma_\tau^\mu \wedge T^\tau$  peut également s'évaluer sur  $e_\nu \otimes e_\rho \otimes e_\sigma$ . Il est donc possible d'écrire la première identité de Bianchi

de façon telle que seuls les tensions de courbure et de torsion apparaissent explicitement :

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} + R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} = T^\mu{}_{\nu\rho;\sigma} + T^\mu{}_{\rho\sigma;\nu} + T^\mu{}_{\sigma\nu;\rho} + T^\tau{}_{\nu\rho}T^\mu{}_{\tau\sigma} + T^\tau{}_{\rho\sigma}T^\mu{}_{\tau\nu} + T^\tau{}_{\sigma\nu}T^\mu{}_{\tau\rho}$$

Si on introduit l'opérateur de cyclicité  $\Sigma_\lambda$  défini pour tout tenseur  $B$  de rang trois par

$$\Sigma_\lambda B(x, y, z) = B(x, y, z) + B(y, z, x) + B(z, x, y)$$

cette identité s'écrit encore :

$$\Sigma_\lambda\{R(x, y)z\} = \Sigma_\lambda\{(\nabla_X T)(y, z)\} + \Sigma_\lambda\{T(T(x, y), z)\}$$

### Deuxième identité (relative à la courbure)

On peut soumettre la deuxième identité de Bianchi (celle relative à la courbure) à un traitement similaire : le membre de gauche  $dR + \Gamma \wedge R$  se transcrit immédiatement en une somme cyclique de dérivées covariantes du type  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma;\tau}$  et le membre de droite  $R \wedge \Gamma$  peut se retranscrire en une somme de termes du type  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}T^\rho{}_{\tau\kappa}$  en utilisant la relation entre torsion et coefficients de connexion établie en 4.4.6. Il vient

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma;\tau} + R^\mu{}_{\nu\sigma\tau;\rho} + R^\mu{}_{\nu\tau\rho;\sigma} + R^\mu{}_{\nu\kappa\rho}T^\kappa{}_{\sigma\tau} + R^\mu{}_{\nu\kappa\sigma}T^\kappa{}_{\tau\rho} + R^\mu{}_{\nu\kappa\tau}T^\kappa{}_{\rho\sigma} = 0$$

Cette identité s'écrit encore

$$\Sigma_\lambda\{(\nabla_z R)(x, y, w)\} + \Sigma_\lambda\{R(T(x, y), z)w\} = 0$$

### 4.4.8 Dérivées covariantes secondes, hessien et identités de Ricci

**Commentaires concernant  $D^2$ .** Tout d'abord, on sait que le carré de l'opérateur de différentiation extérieure covariante  $d^\nabla$  n'est autre que la courbure. Retrouvons tout d'abord cette propriété, à titre d'exercice, dans quelques cas particuliers, en utilisant l'opérateur  $D$ .

Soit  $v \in \Omega^p(M, TM)$ , on a

$$v = e_\alpha \cdot v^\alpha$$

où  $v^\alpha$  est une  $p$ -forme sur  $M$ .

$$\begin{aligned}
d^\nabla v &= e_\alpha.Dv^\alpha = e_\alpha.(dv^\alpha + \Gamma^\alpha_\beta \wedge v^\beta) \in \Omega^{p+1}(M, TM) \\
(d^\nabla)^2 v &= e_\alpha.D^2v^\alpha = e_\alpha.(Ddv^\alpha + D(\Gamma^\alpha_\beta \wedge v^\beta)) \\
&= e_\alpha.(d^2v^\alpha + \Gamma^\alpha_\gamma \wedge dv^\gamma + d(\Gamma^\alpha_\beta \wedge v^\beta) + \Gamma^\alpha_\gamma \wedge \Gamma^\gamma_\beta \wedge v^\beta) \\
&= e_\alpha.(0 + \Gamma^\alpha_\gamma \wedge dv^\gamma + (d\Gamma^\alpha_\beta \wedge v^\beta) - (\Gamma^\alpha_\beta \wedge dv^\beta) + \Gamma^\alpha_\gamma \wedge \Gamma^\gamma_\beta \wedge v^\beta) \\
&= e_\alpha.((d\Gamma^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_\gamma \wedge \Gamma^\gamma_\beta) \wedge v^\beta) \\
&= e_\alpha.(R^\alpha_\beta \wedge v^\beta) \in \Omega^{p+2}(M, TM)
\end{aligned}$$

Ainsi donc,  $D^2v^\alpha = R^\alpha_\beta \wedge v^\beta$ , comme il se doit.

Soit maintenant  $v \in \Omega^p(M, TM \otimes T^*M)$ , donc  $v = e_\alpha \otimes \theta^\beta v^\alpha_\beta$  où  $v^\alpha_\beta$  est une  $p$ -forme. Un calcul parfaitement analogue conduit à

$$(d^\nabla)^2 v = e_\alpha \otimes \theta^\beta D^2V^\alpha_\beta$$

avec

$$D^2V^\alpha_\beta = R^\alpha_\rho \wedge V^\rho_\beta - R^\rho_\beta \wedge V^\alpha_\rho$$

Le fait d'obtenir une somme de deux termes faisant intervenir la 2-forme de courbure ne doit pas surprendre : cela est fondamentalement lié à la façon dont se représente l'algèbre de Lie du groupe linéaire dans la définition du fibré vectoriel  $TM \otimes T^*M$ .

La généralisation est évidente : si, par exemple,  $v \in \Omega^p(M, TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$  c'est à dire  $v = e_\alpha \otimes \theta^\beta \otimes \theta^\gamma.v^\alpha_{\beta\gamma}$ , avec  $v^\alpha_{\beta\gamma} \in \Omega^p(M)$ , alors  $(d^\nabla)^2 v = e_\alpha \otimes \theta^\beta \otimes \theta^\gamma D^2v^\alpha_{\beta\gamma}$  et  $D^2v^\alpha_{\beta\gamma} = R^\alpha_\rho \wedge V^\rho_{\beta\gamma} - R^\rho_\beta \wedge V^\alpha_{\rho\gamma} - R^\rho_\gamma \wedge V^\alpha_{\beta\rho}$

**Opérateurs  $\nabla\nabla\nabla \dots$**  Soit  $S$  est un tenseur quelconque de rang  $(r, s)$ , considéré comme section de  $E = TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s}$ , c'est à dire  $S \in \Omega^0(M, E)$ , nous voulons donner un sens à  $\nabla\nabla S$ . Nous savons que  $\nabla S$  est une 1-forme à valeurs dans  $E$ , (ainsi  $\nabla S = d^\nabla S \in \Omega^1(M, E)$ , puisque que  $\nabla$  et  $d^\nabla$  coïncident sur les 0-formes), et que  $(d^\nabla)^2 S \in \Omega^2(M, E)$ , mais  $\nabla$ , par définition, n'agit que sur les 0-formes (à valeurs dans n'importe quel fibré). Pour pouvoir appliquer  $\nabla$  sur  $\nabla S$  il suffira donc de considérer les 1-formes à valeurs dans  $E$  comme des 0-formes à valeurs dans  $E \otimes T^*M$ . Encore une fois, nous identifions  $\Omega^1(M, E)$  avec  $\Omega^0(M, E \otimes T^*M)$  (l'application identique sera notée  $Id$ ). Explicitement, si  $v = e_I V^I \in \Omega^1(M, E)$ , avec  $V^I = V^I_\mu \theta^\mu \in \Omega^1(M)$  et si "I" désigne un multi-indice relatif à une base de  $E$ , on écrira simplement  $v = e_I \theta^\mu V^I_\mu \in \Omega^0(M, E \otimes T^*M)$ , avec  $V^I_\mu \in \Omega^0(M)$ . Pour ne pas alourdir les notations, on note encore  $v$  l'image de  $v$  par l'application identique! Cette application identique déguisée  $Id$  se généralise

d'ailleurs de façon évidente pour fournir un homomorphisme injectant l'espace vectoriel  $\Omega^p(M, E)$  dans  $\Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes p})$ . Il faut donc comprendre  $\nabla\nabla S$  comme

$$(\nabla \circ Id \circ \nabla) S$$

mais, bien entendu, nous n'écrivons jamais  $Id$  explicitement. Noter que rien n'interdit au lecteur un peu pervers de considérer des objets comme

$$\nabla\nabla\nabla d^\nabla\nabla d^\nabla d^\nabla\nabla S$$

... qu'il faut comprendre comme la composée

$$\begin{aligned} & \Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^2(M, E) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^3(M, E) \\ \xrightarrow{Id} & \Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 3}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 3}) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^2(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 3}) \\ \xrightarrow{Id} & \Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 5}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 5}) \xrightarrow{Id} \Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 6}) \\ \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 6}) \xrightarrow{Id} \Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 7}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 7}) \\ & \simeq \Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 8}) \end{aligned}$$

et de comparer cet opérateur avec, par exemple  $\nabla\nabla\nabla d^\nabla d^\nabla\nabla d^\nabla\nabla S!$

**Hessien.** Nous nous contenterons d'examiner d'un peu plus près l'opérateur  $Hess = \nabla\nabla$ . Prenons  $S \in \Omega^p(M, E)$ ,  $S = e_I S^I$  avec  $S^I \in \Omega^p(M)$ . Alors  $\nabla S = e_I DS^I \in \Omega^{p+1}(M, E)$  qu'on peut considérer (application  $Id$ ) comme  $\nabla S = e_I \theta^\beta S^I_{;\beta} \in \Omega^p(M, E \otimes T^*M)$  puisque  $DS^I = \theta^\beta S^I_{;\beta}$ . Alors  $\nabla\nabla S = e_I \otimes \theta^\beta \otimes (S^I_{;\beta})_{;\gamma} \theta^\gamma \in \Omega^1(M, E \otimes (T^*M))$  qu'on peut considérer comme  $\nabla\nabla S = e_I \otimes \theta^\beta \otimes \theta^\gamma (S^I_{;\beta\gamma}) \in \Omega^0(M, E \otimes (T^*M)^{\otimes 2})$ . On a noté  $S^I_{;\beta\gamma} = (S^I_{;\beta})_{;\gamma}$  les composantes de  $\nabla\nabla S$ . On note également  $\nabla_\beta S = \langle \nabla S, e_\beta \rangle = e_I \cdot S^I_{;\beta} \in \Omega^0(M, E)$  la dérivée covariante de  $S$  dans la direction  $e_\beta$ . La dérivée covariante de  $\nabla S$  —considérée comme élément de  $\Omega^0(M, E \otimes T^*M)$ — dans la direction  $e_\gamma$  sera donc  $\nabla_\gamma \nabla S = \langle \nabla(\nabla S), e_\gamma \rangle = e_I \otimes \theta^\beta (S^I_{;\beta})_{;\gamma} \in \Omega^0(M, E \otimes T^*M)$ , par conséquent  $e_I \cdot S^I_{;\alpha\gamma} = \langle \langle \nabla\nabla S, e_\gamma \rangle, e_\alpha \rangle = \langle \nabla\nabla S, e_\alpha \otimes e_\gamma \rangle$ . Attention :  $\nabla_\beta S \in \Omega^0(M, E)$ ,  $\beta$  étant fixé, est une brave section de  $E$  et on peut donc aussi calculer  $\nabla\nabla_\beta S$  qui est un élément de  $\Omega^1(M, E)$ , mais alors, l'indice  $\beta$  étant gelé, il n'y a pas à introduire de  $\Gamma$  relatif à l'indice  $\beta$  dans le calcul de  $\nabla\nabla_\beta S$ . La conclusion est alors que  $\nabla_\alpha(\nabla_\beta S) = \langle \nabla(\nabla S, e_\beta), e_\alpha \rangle$  n'est absolument pas égal à  $S_{;\alpha\beta} = \langle \langle \nabla\nabla S, e_\beta \rangle, e_\alpha \rangle$ ; il faut donc faire très attention ! En pratique, les choses sont assez simples car ce sont les composantes de  $\nabla\nabla S$  (ou d'autres expressions d'ordre supérieur du même type) qui sont intéressantes et non les composantes de  $\nabla(\nabla_\beta S)$ . La raison pour laquelle nous consacrons ces quelques lignes à attirer l'attention du lecteur

sur ce sujet assez trivial, c'est que la confusion possible dont on vient de parler est à l'origine de bien des erreurs. . . A ce sujet, il est assez inexact de prétendre (comme on l'entend parfois) que "de toutes façons, un objet tel que  $\nabla_\beta S$  n'est pas un objet covariant", c'est faux. La situation que nous avons ici est parfaitement analogue à celle qu'on rencontre en relativité restreinte : bien que "l'énergie d'une particule" soit une quantité dont la valeur dépende du repère (de l'observateur) choisi et donc une caractéristique non intrinsèque de la particule, "l'énergie d'une particule mesurée par un observateur déterminé" est néanmoins une quantité digne d'intérêt qu'on peut d'ailleurs calculer dans n'importe quel repère.

**Hessien d'une fonction scalaire.** Abandonnons là ces remarques semi-pédagogiques et illustrons les considérations précédentes avec un exemple très simple, le calcul de  $\nabla\nabla h$  où  $h$  est une fonction sur la variété  $M$ .

Prenons  $h \in \Omega^0(M, \mathfrak{R})$  et donc  $\nabla h \in \Omega^1(M, \mathfrak{R}) \stackrel{Id}{\simeq} \Omega^0(M, T^*M)$  avec  $\nabla h = \theta^\alpha h_{;\alpha}$ , et  $h_{;\alpha} = h_{,\alpha} = e_\alpha[h]$ . Partant de  $\nabla h \in \Omega^0(M, T^*M)$  on obtient  $\nabla\nabla h \in \Omega^1(M, T^*M) \stackrel{Id}{\simeq} \Omega^0(M, T^*M \otimes T^*M)$ , ainsi

$$\boxed{Hess(h) = \nabla\nabla h = \theta^\alpha \otimes \theta^\beta h_{;\alpha\beta}}$$

En vertu des règles de calcul déjà établies, on obtient directement  $h_{;\alpha\beta} = e_\beta[h_{;\alpha}] - h_{;\rho}\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = e_\beta[h_{,\alpha}] - h_{,\rho}\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = e_\beta[e_\alpha[h]] - e_\rho[h]\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ . Ainsi

$$\boxed{h_{;\alpha\beta} = e_\beta[e_\alpha[h]] - e_\rho[h]\Gamma_{\alpha\beta}^\rho}$$

Notons que

$$\nabla\nabla h = \nabla(\theta^\alpha h_{;\alpha}) = \theta^\alpha Dh_{,\alpha} = \theta^\alpha \otimes \theta^\beta h_{;\alpha;\beta} = \theta^\alpha \otimes \theta^\beta h_{;\alpha\beta}$$

Dans un système de coordonnées locales  $\{x^\mu\}$ , on écrira

$$Hess(h) = h_{;\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

avec

$$\boxed{h_{;\mu\nu} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial h}{\partial x^\rho}}$$

**Hessien d'une 0-forme à valeurs vectorielles.** Plus généralement, soit  $\xi \in \Omega^0(M, E)$ ,  $\{e_i\}$  un repère dans les fibres de  $E$  et  $\{\theta^\alpha\}$  un corepère mobile sur  $M$ . Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} Hess(\xi) &= \nabla\nabla\xi = \nabla\nabla(e_i \xi^i) \\ &= \nabla(e_i D\xi^i) = \nabla(e_i \theta^\alpha \xi_{;\alpha}^i) \\ &= e_i \theta^\alpha D\xi_{;\alpha}^i = e_i \theta^\alpha \otimes \theta^\beta \xi_{;\alpha;\beta}^i \\ &= e_i \theta^\alpha \otimes \theta^\beta \xi_{;\alpha\beta}^i \end{aligned}$$

avec

$$\xi_{;\alpha}^i = \xi_{,\alpha}^i + A_{j\alpha}^i \xi^j$$

et

$$\xi_{;\alpha\beta}^i = e_\beta[\xi_{;\alpha}^i] - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \xi_{;\gamma}^i + A_{j\beta}^i \xi_{;\alpha}^j$$

Noter que nous devons “corriger”, dans le calcul des dérivées covariantes, aussi bien les indices de type  $TM$  (grâce à la connexion  $\Gamma$ ) que les indices de type  $E$  (grâce à la connexion  $A$ ). Noter aussi que notre symbole  $\nabla$  est “global” en ce sens que nous n’introduisons pas de symboles particuliers pour les différentes connexions.

Nous reparlerons du hessien dans la section consacrée aux laplaciens (en page 205).

**Non commutation des dérivées covariantes secondes.** — Si  $\{e_\mu\}$  est un repère naturel  $\{e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ , il est bien évident que  $\partial_\mu \partial_\nu h = \partial_\nu \partial_\mu h$ , ce qu’on peut écrire  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ .  
— Si  $\{e_\alpha\}$  est un repère mobile ( $[e_\alpha, e_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$ ), il faut déjà remarquer le fait que  $h_{,\alpha\beta} \neq h_{,\beta\alpha}$  puisque  $h_{,\alpha\beta} = e_\beta[e_\alpha[h]]$  et  $h_{,\beta\alpha} = e_\alpha[e_\beta[h]]$ , ainsi,

$$\boxed{h_{,\alpha\beta} - h_{,\beta\alpha} = -f_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma[h]}$$

- Nous avons déjà calculé  $\nabla \nabla h$ .
- Calculons maintenant la différence

$$\begin{aligned} h_{,\alpha\beta} - h_{,\beta\alpha} &= [e_\beta e_\alpha - e_\alpha e_\beta][h] - e_\rho[h](\Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho) \\ &= [\Gamma_{\beta\alpha}^\rho - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - f_{\beta\alpha}^\rho] e_\rho[h] \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l’expression du tenseur de torsion,

$$\boxed{h_{,\alpha\beta} - h_{,\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma[h]}$$

Cette identité est désignée sous le nom d’*Identité de Ricci*. Plus généralement, on obtient des identités de ce type lorsqu’on calcule des différences telles que  $S_{;\alpha\beta}^I - S_{;\beta\alpha}^I$ ,  $S$  désignant un tenseur quelconque. Il faut donc remarquer le fait que *les dérivées covariantes secondes ne commutent pas en général*.

Finalement, notons que  $h_{;\alpha} \sim h_{,\alpha}$ , l’indice  $\alpha$  étant fixé, est une brave fonction sur la variété (pas un vecteur tangent !). En conséquence,  $\nabla_\beta h_{,\alpha} = e_\beta[h_{,\alpha}] = e_\beta[e_\alpha[h]]$  et cette quantité, qu’on peut même noter  $\nabla_\beta \nabla_\alpha h$  **n’est pas** égale à  $h_{;\alpha\beta}$ . A ce propos, relire la section 4.2.3 consacrée aux notations.

- Afin de familiariser le lecteur avec la manipulation des indices (activité parfois fort utile), établissons l'identité de Ricci relative aux tenseurs de type  $(1, 0)$ . Prenons  $V = V^\mu e_\mu$ . Tout d'abord, voici le résultat :

$$V^\mu{}_{;\alpha\beta} - V^\mu{}_{;\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}^\gamma V^\mu{}_{;\gamma} - R^\mu{}_{\gamma\alpha\beta} V^\gamma$$

La démonstration est immédiate, il suffit de calculer  $V^\mu{}_{;\alpha\beta}$ . Indications : dans l'expression de  $V^\mu{}_{;\alpha\beta} - V^\mu{}_{;\beta\alpha}$ , on reconnaît un terme  $R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma$  lorsqu'on utilise l'écriture explicite du tenseur de courbure  $R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta}$  donnée en fin de section 4.4.2 ainsi qu'un terme  $T_{\alpha\beta}^\sigma (V^\mu{}_{;\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\rho) = T_{\alpha\beta}^\sigma V^\mu{}_{;\sigma}$  lorsqu'on utilise l'expression explicite du tenseur de torsion donnée en fin de section 4.4.6. Les autres termes se compensent (noter en particulier que  $V^\mu{}_{;\alpha\beta} - V^\mu{}_{;\beta\alpha} = [e_\beta, e_\alpha](V^\mu) = f_{\alpha\beta}{}^\rho V^\mu{}_{;\rho}$  et que ce terme se compense avec le terme du même type apparaissant lorsqu'on écrit  $-\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma V^\mu{}_{;\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma V^\mu{}_{;\sigma} = T_{\alpha\beta}^\sigma V^\mu{}_{;\sigma} + f_{\alpha\beta}{}^\sigma V^\mu{}_{;\sigma}$ ).

Le lecteur pourra généraliser sans peine les identités de Ricci relatives à des tenseurs  $S$  d'ordre quelconque : en plus d'un unique terme de type " $TS$ ", on voit apparaître, pour chaque indice du tenseur considéré, une contribution —signée— de type ' $RS$ ', au membre de droite de l'identité de Ricci. Par exemple, prenons  $S = e_\mu \otimes e_\nu \otimes \theta^\rho S_\rho^{\mu\nu}$ , il vient

$$S_{\rho;\alpha\beta}^{\mu\nu} - S_{\rho;\beta\alpha}^{\mu\nu} = T_{\alpha\beta}^\gamma S_{\rho;\gamma}^{\mu\nu} - R_{\gamma\alpha\beta}^\mu S_\rho^{\gamma\nu} - R_{\gamma\alpha\beta}^\nu S_\rho^{\mu\gamma} + R_{\rho\alpha\beta}^\gamma S_\gamma^{\mu\nu}$$

#### 4.4.9 Tenseur de Ricci

Le tenseur de courbure  $F$  pour une connexion principale quelconque possède des composantes  $F_j^i{}_{\mu\nu}$  et il est impossible de contracter l'indice  $i$  avec l'indice  $\mu$  puisque ces indices sont de nature différente : l'un est un indice de fibre et l'autre un indice de base. Par contre, pour une connexion linéaire, on peut choisir le même repère dans les fibres et sur la base, il devient donc possible de contracter un indice de fibre avec un indice de base : à partir du tenseur de courbure  $R \equiv F$  de composantes  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ , on peut fabriquer un tenseur covariant de rang 2, le *tenseur de Ricci*, que nous noterons  $\rho$  et qui est donc défini par l'égalité

$$\rho_{\sigma\nu} = R_{\sigma\mu\nu}^\mu$$

Notons que nous n'avons pas eu besoin de métrique pour définir ce tenseur alors que l'utilisation d'une métrique est nécessaire, comme nous le verrons, pour définir la courbure scalaire. Nous reviendrons au tenseur de Ricci dans le cadre de l'étude des connexions métriques.

#### 4.4.10 Courbes autoparallèles

Un champ de vecteurs  $v$  est dit *parallèle* ou *transporté par parallélisme* le long d'un arc de courbe  $\mathcal{C} : \tau \in \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{C}(\tau)$  lorsque sa dérivée covariante est nulle dans la direction du vecteur tangent  $u = \frac{d}{d\tau}$  à  $\mathcal{C}$ . Ce vecteur tangent possède des composantes  $u^\alpha = \frac{d\mathcal{C}^\alpha}{d\tau}$  dans un repère donné. La loi du transport parallèle s'écrit donc

$$\begin{aligned}\nabla_u v = 0 &\Leftrightarrow u[v^\mu] + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} v^\sigma u^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} v^\sigma \frac{d\mathcal{C}^\alpha}{d\tau} = 0\end{aligned}$$

La courbe  $\mathcal{C}(\tau)$  est dite *courbe autoparallèle* si son vecteur tangent  $u$  est lui-même transporté par parallélisme le long de  $\mathcal{C}$ . Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\tau) \text{ est autoparallèle} &\Leftrightarrow \nabla_u u = 0, \text{ avec } u = \frac{d}{d\tau} \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2\mathcal{C}^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\mathcal{C}^\beta}{d\tau} \frac{d\mathcal{C}^\gamma}{d\tau} = 0\end{aligned}$$

Nous verrons, dans la section consacrée aux connexions riemanniennes, comment ces courbes autoparallèles sont reliées aux géodésiques. De fait, les autoparallèles d'une connexion donnée sont quelquefois désignées sous le nom de "géodésiques de la connexion", mais nous préférons réserver cette terminologie au cas de connexions très particulières.

#### 4.4.11 Connexions linéaires sur les groupes et espaces homogènes

Soit  $G$  un groupe, que nous supposons ici compact, et  $G/H$  un espace homogène. Au niveau des algèbres de Lie, grâce au choix d'un produit scalaire dans  $Lie G$  on peut écrire  $Lie G = Lie H \oplus \mathfrak{s}$  où  $\mathfrak{s}$  peut s'identifier avec l'espace tangent à  $G/H$  en l'origine. La forme de Maurer-Cartan sur  $G$  est à valeurs dans  $Lie G$  et on peut considérer sa projection sur  $Lie H$ . On montre qu'on obtient ainsi une forme de connexion (dite canonique) sur le fibré principal  $G = G(G/H, H)$ . Par ailleurs nous supposons (cas usuel) que  $[Lie H, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$  et même que  $\forall h \in H, h\mathfrak{s}h^{-1} \subset \mathfrak{s}$ . En d'autres termes, l'espace vectoriel  $\mathfrak{s}$  est le support d'une représentation linéaire du groupe  $H$  (c'est la représentation  $ad_H$ ). En conséquence, on obtient un homomorphisme de  $H$  dans  $End \mathfrak{s}$ . Cet homomorphisme permet d'étendre le fibré principal  $G = G(G/H, H)$  au fibré des repères linéaire au dessus de  $G/H$  (c'est un fibré de base  $G/H$  et de fibre type  $GL(s)$  avec  $s = dim(\mathfrak{s})$ ). La connexion canonique donne ainsi naissance à une connexion linéaire sur l'espace homogène  $G/H$ .

Ce type de construction et les géométries qui lui sont associées constituent un vaste chapitre de la géométrie différentielle et nous renvoyons le lecteur à un ouvrage tel que [9] pour plus de détails. Notons pour finir qu'on obtient ainsi également une connexion linéaire sur  $G$  lui-même lorsqu'on considère la variété sous-jacente comme quotient de  $G \times G$  par son sous-groupe diagonal (isomorphe à  $G$ ).

## 4.5 Connexions métriques

REMARQUE : La théorie des connexions métriques en général et la géométrie riemannienne en particulier mériterait à elle seule plusieurs volumes... Malgré l'importance du sujet, la présente section est relativement brève et doit être considérée par le lecteur comme un simple survol permettant d'illustrer certaines des constructions générales précédentes. Nous voulons considérer la notion de connexion métrique comme un cas particulier de la notion de connexion réductible, et l'ensemble des repères orthonormés associés à une métrique comme un cas particulier de réduction d'espace fibré principal. Nous engageons le lecteur à discuter de façon analogue d'autres types de géométries (par exemple les structures presque complexes).

### 4.5.1 La métrique

Soit  $FM = FM(M, GL(n, \mathfrak{R}))$  le fibré principal des repères sur la variété  $M$ . On considère une réduction de  $FM$  à un fibré principal de repères orthonormés  $OM = OM(M, SO(n))$ . Cette réduction est caractérisée par une métrique  $g$  qui, en chaque point, est donnée par une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace tangent. On sait que  $g$  peut être considérée comme une section globale du fibré en espaces homogènes  $E = E(M, GL(n, \mathfrak{R})/SO(n))$ . Le lecteur aura noté que nous considérons une réduction à  $SO(n)$  et non à  $O(n)$ , en d'autres termes, la variété est supposée orientable et orientée. Localement, c'est à dire relativement au choix d'un repère mobile  $(e_\alpha)$  ou d'un repère naturel  $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$ ,  $g$  est donnée par

$$g = g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

L'écriture  $g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  justifie la notation  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  des vieux manuels et l'appellation *élément de longueur*. Lorsque le repère mobile choisi est orthonormé, on aura simplement

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

Ceci suppose, d'ailleurs, que nous utilisons  $SO(n)$  plutôt que  $SO(p, q)$  et que  $g$  est définie positive. Dans ce cas, on dit que la variété  $M$  est une variété riemannienne. En fait, toutes les considérations qui suivent restent valables lorsque la signature de  $g$  est  $(p, q)$ , avec  $p + q = n = \dim M$  c'est à dire lorsque  $M$  est une variété pseudo-riemannienne. Dans le cas pseudo-riemannien, lorsque le repère choisi est orthonormé, on a

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

où  $\eta$  désigne la matrice diagonale  $\text{diag}(1, 1, \dots, -1, \dots, -1)$  avec  $p$  signes  $+$  et  $q$  signes  $-$ .

La matrice  $g_{\mu\nu}$  étant non dégénérée en chaque point, nous pouvons considérer son inverse, notée  $(g^{\mu\nu})$ . Ainsi  $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$ . On obtient donc ainsi une forme bilinéaire symétrique sur l'espace cotangent. Cette forme est le plus souvent également notée  $g$  (mais il peut arriver de la noter  $g^{-1}$ !).

$$g = g^{\alpha\beta} e_{\alpha} \otimes e_{\beta}$$

$$g = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

*Le lecteur est également invité à relire la dernière section du chapitre consacré aux variétés différentiables, section dans laquelle nous avons déjà introduit la notion de métrique de façon élémentaire et où nous avons établi un certain nombre de propriétés générales pour les variétés riemanniennes.*

### 4.5.2 Compatibilité avec la métrique

On se donne une connexion linéaire dans  $FM$ . Une métrique étant donnée, on suppose que cette connexion est compatible avec la réduction de  $FM$  à  $OM$ . On peut aussi supposer, de manière équivalente, qu'on se donne directement une connexion principale dans le fibré  $OM$ . On dit alors qu'on s'est donné une connexion métrique. Par construction, la métrique est orthonormée lorsqu'on l'écrit à l'aide des repères de  $OM$ . Soit  $\{e_a\}$  un repère mobile orthonormé, alors  $g = e_a \otimes e_b \eta^{ab}$  ou  $\eta$  est diagonal et constant (composantes  $\pm 1$ ). Lorsqu'on considère la métrique comme 0-forme à valeurs dans le fibré des tenseurs symétriques de rang 2, qui est inclus dans  $\Omega^0(M, TM \otimes TM)$ , on voit immédiatement que

$$\boxed{\nabla g = 0}$$

puisque  $\nabla g = e_a \otimes e_b D\eta^{ab}$  et que  $D\eta^{ab} = 0$  (on utilise l'opérateur  $D$  introduit au 4.2.7).

La différentielle covariante de  $g$  est donc nulle, mais ceci peut alors s'écrire dans n'importe quel repère, orthonormé ou non  $\{e_\alpha\}$ . Ainsi,  $\nabla g = (e^\alpha \otimes e^\beta) D g_{\alpha\beta}$  et

$$\boxed{D g_{\alpha\beta} = 0}$$

Explicitement, et en notant, comme d'habitude,  $\Gamma^\alpha_\beta$  les éléments de la matrice de connexion, on obtient

$$\boxed{d g_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_\alpha g_{\gamma\beta} - \Gamma^\gamma_\beta g_{\alpha\gamma} = 0}$$

L'existence d'un produit scalaire non dégénéré  $g$  permet d'identifier un espace vectoriel avec son dual et de "monter" ou "descendre" les indices à volonté. On pose donc

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\delta_\beta g_{\alpha\delta}$$

Il ne devrait pas y avoir de confusion possible au niveau des notations : lorsqu'on écrit  $\Gamma_{\alpha\beta}$ , c'est que cet objet est une 1-forme ( $\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} e^\gamma$ ) et qu'on a utilisé la métrique pour abaisser le premier indice de fibre. Si on écrit, au contraire,  $\Gamma_\gamma$ , c'est qu'on parle alors du potentiel de jauge et qu'on a simplement fait apparaître l'indice de forme (qui est toujours en troisième — et dernière — position).

L'équation de compatibilité (condition de métricité) s'écrit alors

$$d g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha} = 0$$

Si on se place dans un repère orthonormé, les fonctions  $g_{\alpha\beta}$  sont des constantes. Il en va de même dans un "repère mobile de forme invariable" (précisément défini en imposant la constance des  $g_{\alpha\beta}$ ). Dans ce(s) cas,  $d g_{\alpha\beta} = 0$  et la condition de métricité s'écrit simplement

$$\Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha} = 0$$

On sait que les éléments de la matrice de connexion ( $\Gamma^\gamma_\alpha$ ) sont les 1-formes  $\Gamma^\gamma_\alpha = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e^\beta$ . En "abaissant" comme précédemment le premier indice avec la métrique, on pose

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^\delta_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}$$

En repère orthonormé (ou de forme fixe) la condition de métricité se traduit par l'antisymétrie des  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  sur les deux premiers indices.

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma_{\beta\alpha\gamma}$$

Une autre façon de retrouver de façon très naturelle (et sans calcul!) cette propriété d'antisymétrie est de se rappeler que les 1-formes  $\Gamma^\alpha_\beta$  ne sont

autres que les éléments de matrice  $\Gamma^\alpha_\beta = \Gamma^a(X_a)^\alpha_\beta$  où les  $X_a$  constituent une représentation de l'algèbre de Lie du groupe structural, en l'occurrence  $SO(n)$ , et ce sont donc, automatiquement, des matrices antisymétriques.

Nous verrons un peu plus loin que, pour une connexion bien particulière (la connexion de Levi-Civita) et dans des repères particuliers (les repères naturels), les coefficients de connexion possèdent également une propriété de symétrie sur les deux derniers indices.

Si, contrairement à ce que nous supposons ci-dessus, on se donne séparément une métrique  $g$  et une connexion linéaire  $\Gamma$  *quelconque*, il n'y a aucune raison pour que la connexion soit réductible. En d'autres termes, il n'y a aucune raison de supposer que cette connexion soit compatible avec la métrique. Si  $\nabla$  désigne la différentielle covariante associée à  $\Gamma$ , on définit alors le *tenseur de non-métricité*

$$\boxed{Q = \nabla g}$$

C'est à dire,  $Q(u, v, w) = \nabla g(u, v, w) = \nabla_w g(u, v)$ . Dans un (co)-repère  $e^\mu$ , on a  $Q = Q_{\mu\nu\rho} e^\mu \otimes e^\nu \otimes e^\rho$  avec

$$Q_{\nu\rho\mu} = Q(e_\nu, e_\rho, e_\mu) = \nabla_\mu g_{\nu\rho} = g_{\nu\rho;\mu}$$

### 4.5.3 Calcul des coefficients de connexion

Etant donnée une métrique et une connexion linéaire compatible (qui, *a priori*, possède de la torsion), nous allons voir qu'il est possible d'exprimer les coefficients de connexion en terme de la métrique, de ses dérivées premières, du tenseur de torsion et des fonctions de structure du repère mobile choisi.

Utilisant la métrique, on définit

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= g_{\alpha\alpha'} \Gamma^{\alpha'}_{\beta\gamma} \\ T_{\alpha\beta\gamma} &= g_{\alpha\alpha'} T^{\alpha'}_{\beta\gamma} \\ f_{\beta\gamma\alpha} &= g_{\alpha\alpha'} f_{\beta\gamma}^{\alpha'}\end{aligned}$$

Le tenseur de torsion (avec ses trois indices covariants) s'écrit alors (voir section 4.4.6)

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - f_{\beta\gamma\alpha}$$

Nous avons vu que la condition de métricité s'écrivait  $\nabla g = 0$ , c'est à dire, en terme de composantes  $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ . Ceci implique

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 &\Rightarrow g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \\ g_{\beta\gamma;\alpha} = 0 &\Rightarrow g_{\beta\gamma,\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha} \\ -g_{\gamma\alpha;\beta} = 0 &\Rightarrow -g_{\gamma\alpha,\beta} = -\Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta}\end{aligned}$$

En conséquence

$$g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\gamma\alpha,\beta} = (\Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha}) + (\Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta}) + (\Gamma_{\gamma\beta\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta})$$

En utilisant l'expression du tenseur de torsion, il vient

$$g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\gamma\alpha,\beta} = (\Gamma_{\beta\gamma\alpha} + f_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha}) + (-T_{\alpha\beta\gamma} - f_{\beta\gamma\alpha}) + (-T_{\gamma\beta\alpha} - f_{\beta\alpha\gamma})$$

En utilisant la symétrie de  $g$  et en renommant les indices, on obtient finalement

$$\boxed{2 \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}) + (-T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\beta\gamma\alpha}) + (f_{\alpha\beta\gamma} - f_{\gamma\alpha\beta} - f_{\beta\gamma\alpha})}$$

Les trois lignes ci-dessus sont quasiment identiques mais attention à notre façon de “descendre” les indices (comparer la définition de  $T_{\alpha\beta\gamma}$  et celle de  $f_{\alpha\beta\gamma}$ ). Nos conventions concernant la position des indices ne sont pas universelles. . .

L'expression ci-dessus des coefficients de connexion  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  a été calculée en travaillant dans un *repère quelconque* (ainsi, par exemple,  $g_{\alpha\beta,\gamma} = e_\gamma[g_{\alpha\beta}]$ ). En travaillant dans un repère naturel on a, plus simplement,  $g_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}[g_{\mu\nu}]$  et  $f_{\mu\nu\rho} = 0$ .

L'expression

$$\boxed{\{\nu\rho\}^\mu = 1/2(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu})}$$

est souvent désignée sous le nom de *Symbole de Christoffel*.

Le tenseur

$$S_{\alpha\beta\gamma} = (T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha})$$

est souvent désigné sous le nom de *tenseur de contorsion* (si ! si !). Ce tenseur peut être nul sans que  $T$  le soit ; lorsque  $S$  est nul, la torsion disparaît de l'expression des coefficients de connexion  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ .

Le calcul précédent montre donc qu'une connexion linéaire compatible avec une métrique donnée est entièrement caractérisée par cette dernière et par la torsion de cette connexion (on peut toujours faire disparaître les fonctions de structure du repère mobile en se plaçant dans un repère naturel).

Le calcul précédent montre aussi que, étant donnée une métrique, *si on impose une torsion nulle*, on obtient une unique connexion compatible qui s'exprime entièrement en terme de la métrique. Cette (unique) connexion s'appelle *la connexion de Levi-Civita* ou encore *la connexion riemannienne*. Re-exprimons ce résultat sous la forme suivante :

*Soit OM le fibré principal des repères orthonormés associé à une métrique donnée. Alors, parmi toutes les connexions possibles sur le fibré OM, il en*

existe une et une seule qui soit sans torsion. On l'appelle la connexion de Levi-Civita.

Pour cette connexion, et en repère naturel, on a donc simplement

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \{\nu\rho\}^\mu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\nu\rho,\mu})$$

De façon générale, l'expression du tenseur de torsion en terme des coefficients de connexion et des fonctions de structure du repère mobile (expression rappelée ci-dessus) montre que, si on utilise la connexion de Levi-Civita ( $T_{\mu\nu\rho} = 0$ ) dans un repère naturel ( $f_{\mu\nu\rho} = 0$ ), les coefficients de connexions possèdent la symétrie suivante :

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu}$$

ou encore

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \Gamma_{\mu\rho\nu}$$

Il faut se garder de confondre cette symétrie sur les deux derniers indices avec l'antisymétrie sur les deux premiers indices (voir plus haut), antisymétrie qui est valable pour toute connexion compatible avec la métrique, à condition toutefois de travailler dans un repère orthonormé (ce qui est rarement le cas des repères naturels).

Il n'est pas difficile de démontrer que, dans le cas où la connexion n'est pas compatible avec la métrique, il faut rajouter, au second membre de l'équation donnant l'expression de  $2\Gamma_{\mu\nu\rho}$ , la quantité

$$-(Q_{\mu\nu\rho} + Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\nu\rho\mu})$$

où  $Q$  est le tenseur de non-métricité.

#### 4.5.4 Compléments sur le tenseur de Riemann. Propriétés de symétrie.

Nous avons déjà analysé en détail les propriétés du tenseur de courbure, pour une connexion linéaire quelconque, et il n'y a pas grand chose à rajouter lorsqu'on suppose que cette connexion est une connexion métrique, si ce n'est la propriété d'antisymétrie suivante : en posant

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\alpha'} R^{\alpha'}_{\beta\gamma\delta}$$

on s'aperçoit que non seulement ce tenseur est antisymétrique sur ses deux derniers indices (comme toujours, puisqu'il provient de la 2-forme de courbure) mais que, en outre, il est également antisymétrique sur ces deux premiers indices (utiliser l'expression de la courbure en terme de la connexion

et l'antisymétrie déjà discutée des éléments de la matrice de connexion, ou, plus directement, se rappeler que les générateurs de  $SO(n)$  sont des matrices antisymétriques).

En résumé, pour une connexion quelconque :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$$

Pour une connexion métrique :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$$

Pour une connexion métrique, sans torsion, c'est à dire pour la connexion de Levi-Civita, les deux identités précédentes impliquent une propriété de symétrie par échange de paires (utiliser les identités de Bianchi) :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

Par ailleurs, les expressions des identités de Bianchi se simplifient pour la connexion de Levi-Civita (puisque la torsion disparaît). Il vient :

Bianchi-1 sans torsion ( $R \wedge \theta = 0$ ) :

$$\boxed{R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha{}_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha{}_{\delta\beta\gamma} = 0}$$

Bianchi-2 sans torsion :

$$\boxed{R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta;\epsilon} + R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon;\gamma} + R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0}$$

### 4.5.5 Equation des géodésiques

Nous avons déjà défini la notion de courbe autoparallèle dans la section précédente. Il s'agissait là d'une notion liée à la donnée d'une connexion linéaire. Dans le cas où cette connexion est *la* connexion de Levi-Civita déterminée par une métrique, une telle courbe est, par définition, une géodésique de la variété riemannienne. En fait, la terminologie ("le plus court chemin") vient du fait qu'une telle courbe est également solution d'un problème variationnel ( $\delta \int (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ ) mais nous n'étudierons pas cet aspect de la question. Notons que, dans le cas où nous nous donnons séparément une métrique (et donc la connexion de Levi-Civita correspondante), ainsi qu'une seconde connexion compatible avec la métrique donnée, mais possédant de la torsion, il faut distinguer entre les courbes autoparallèles associées à cette dernière et les géodésiques. Une telle distinction est physiquement importante lorsqu'on traite du mouvement des particules à spin en Relativité Générale :

les particules scalaires suivent en effet les géodésiques du champ gravitationnel mais les particules ayant un moment cinétique intrinsèque suivent les autoparallèles d'une connexion avec torsion.

Plaçons nous dans un repère naturel. Nous avons déjà établi l'équation des autoparallèles dans la section consacrée aux connexions linéaires. L'équation des géodésiques est donc identique, à ceci près que les coefficients de connexion  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  doivent être donnés par les symboles de Christoffel  $\{\Gamma^\mu_{\nu\rho}\}$ . On voit donc que pour que géodésiques et autoparallèles coïncident, il faut et il suffit que le tenseur de contorsion  $S_{\alpha\beta\gamma}$  soit nul. Ce sera évidemment le cas si la torsion est nulle mais cette condition n'est pas nécessaire.

De façon plus générale, le lecteur pourra se convaincre que si,  $\nabla$  et  $\nabla'$  désignent deux connexions, une condition nécessaire et suffisante pour que les autoparallèles des deux connexions coïncident est que la partie symétrique  $s(x, y) = (c(x, y) + c(y, x))/2$  du tenseur différence  $c(x, y) = \nabla_x y - \nabla'_x y$  s'annule (noter que  $c(x, y)$  est bien un tenseur).

#### 4.5.6 Tenseur de Ricci, courbure scalaire et tenseur d'Einstein, courbures sectionelles

- Tenseur de Ricci. Nous avons déjà défini le tenseur de Ricci  $\rho$  de composantes

$$\rho_{\sigma\nu} = R^\mu_{\sigma\mu\nu}$$

dans la section consacrée aux connexions linéaires puisque l'utilisation d'une métrique n'était pas nécessaire. Pour la connexion de Levi-Civita la torsion est nulle et on sait que, dans ce cas, le tenseur de Riemann de composantes  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  est invariant lorsqu'on permute les deux premiers indices avec les deux derniers. On en déduit immédiatement que, pour cette connexion, le tenseur de Ricci est symétrique ( $\rho_{\mu\nu} = \rho_{\nu\mu}$ ) et définit donc une forme bilinéaire symétrique ainsi qu'une forme quadratique  $r(u) = \rho(u, u)$  où  $u \in TM$ . L'application polaire associée est l'application linéaire  $\hat{r}(u) = \Sigma_\mu \rho(u, e_\mu) e_\mu$  et les valeurs propres de  $\hat{r}$  sont les *courbures principales de Ricci*.

- Courbure scalaire. La courbure scalaire  $\tau$  est définie par l'égalité

$$\tau = g^{\mu\nu} \rho_{\mu\nu}$$

- Tenseur d'Einstein. Pour la connexion de Levi-Civita, le tenseur d'Einstein  $G$  est défini par l'égalité

$$G_{\mu\nu} = \rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tau$$

ce nouveau tenseur, comme  $\rho$  et  $g$ , est manifestement symétrique. Son nom provient bien entendu de la théorie de la Relativité Générale, puisque les équations d'Einstein décrivant la réaction de la géométrie (décrite par la métrique  $g$ ) à la matière (décrite par un tenseur d'énergie-impulsion noté traditionnellement  $T$  — ce n'est pas la torsion!—) s'écrivent simplement

$$\boxed{G = 8 \pi T}$$

L'étude de ces équations et de la physique qui leur correspond sort du cadre de cet ouvrage. Notons simplement que ces équations sont des équations différentielles du second ordre par rapport à la métrique puisque le tenseur de courbure s'écrit en terme des dérivées des coefficients de connexion et que ces derniers (rappelons que nous supposons choisie la connexion de Levi Civita) s'expriment en terme des dérivées de la métrique.

Par ailleurs mentionnons qu'une variété pour laquelle le tenseur d'Einstein est proportionnel à la métrique est, par définition, une *variété d'Einstein*. L'étude des variétés d'Einstein —un sujet fascinant de la géométrie Riemannienne— sort également du cadre de cet ouvrage et nous renvoyons le lecteur aux articles spécialisés ainsi qu'au beau livre d'Arthur Besse (autre mathématicien imaginaire, comme Bourbaki) intitulé "Einstein Manifolds" [1].

Remarque : si la connexion, supposée métrique, possède une torsion, la propriété pour  $R$  d'être invariant par échange de paires n'est plus vérifiée, le tenseur de Ricci n'est plus symétrique et, dans ce cadre, on ne connaît pas de généralisation naturelle du tenseur d'Einstein.

— Courbures sectionnelles. On définit tout d'abord la fonction bi-quadratique de courbure

$$K(u, v) = g(R(v, u)u, v)$$

Cette fonction définie dans le fibré tangent associe un réel à tout couple de vecteurs. Cette fonction est 1) symétrique (puisque  $R$  est symétrique par échange de paires), 2) bi-quadratique, 3) telle que  $K(u, u) = 0$ . Réciproquement (démonstration non triviale que nous omettons), toute fonction  $K(u, v)$  vérifiant ces trois propriétés peut être considérée comme la fonction bi-quadratique de courbure associée à une certaine métrique. L'ensemble des fonctions symétriques, bi-quadratique avec  $K(u, u) = 0$  forme un espace vectoriel de dimension  $n^2(n^2 - 1)/12$ ; en d'autres termes, il faut préciser  $n^2(n^2 - 1)/12$  nombres réels pour décrire la courbure Riemannienne d'une variété de dimension  $n$  en un point.

La fonction  $K$  associe un nombre à tout sous-espace de dimension 2

de l'espace tangent. Soit  $u, v$  une base orthonormale d'un 2-plan, on définit alors la *courbure sectionnelle* de ce sous-espace de dimension 2 par  $K = K(u, v)$  et on démontre que  $K$  est indépendant du choix de  $u$  et  $v$  dans ce sous-espace. On démontre que, géométriquement,  $K$  n'est autre que la courbure Gaussienne de la 2-surface engendrée par les géodésiques ayant des vecteurs tangents de la forme  $\lambda u + \mu v$ . Nous renvoyons le lecteur à un traité élémentaire de géométrie des surfaces pour les notions relatives aux courbures de Gauss etc.

### 4.5.7 Dualité de Hodge et laplaciens

Nous nous contenterons de rassembler ici quelques définitions et résultats généraux. Cette section mériterait également un traitement plus approfondi. Nous suggérons au lecteur de relire la section 1.11 consacré à la définition de l'élément de volume  $\epsilon$ .

#### Appariement entre $\Omega^k(M)$ et $\Omega^{n-k}(M)$

Soit  $\epsilon$  la forme volume canonique d'une variété riemannienne orientée. On définit une opération  $\{, \}$  associant un nombre réel à la donnée d'une  $k$ -forme et d'une  $n - k$ -forme.

$$(\omega, \alpha) \in \Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \rightarrow \omega \wedge \alpha = \lambda \epsilon \in \Omega^n(M) \rightarrow \{\omega, \alpha\} = \lambda \in \mathfrak{R}$$

Le réel  $\lambda$  est bien déterminé puisque l'espace des  $n$ -formes est de dimension 1. On a donc

$$\omega \wedge \alpha = \{\omega, \alpha\} \epsilon$$

#### L'isomorphisme $\star$ : La dualité de Hodge

On définit un isomorphisme  $\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$  comme la composition de l'isomorphisme  $\omega \in \Omega^k(M) \rightarrow \{\omega, \cdot\} \in (\Omega^{n-k}(M))^*$  et de l'isomorphisme musical entre  $\Omega^{n-k}(M)$  et son dual, induit par la métrique.

Explicitement, soit  $\{\epsilon_\mu\}$  une base orthonormée de sens direct et  $\{\omega^\mu\}$  sa base duale. Soit  $\mu_1 \leq \mu_2 \dots \leq \mu_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$  et soit  $\nu_1 \leq \nu_2 \dots \leq \nu_{n-k}$  la suite complémentaire. Alors

$$\star(\omega^{\mu_1} \wedge \omega^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\mu_k}) = \pm \omega^{\nu_1} \wedge \omega^{\nu_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\nu_{n-k}}$$

où  $\pm$  désigne la signature de  $[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-k}]$ . Ainsi

$$\star 1 = \epsilon$$

Soit  $\{\epsilon_\mu\}$  une base orthonormée de sens direct et  $\{\omega^\mu\}$  sa base duale, alors

$$\omega^{\mu_1} \wedge \omega^{\mu_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\mu_k} \wedge \star(\omega^{\nu_1} \wedge \omega^{\nu_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\nu_{n-k}}) = \delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \cdot \epsilon$$

Soit  $S \in \Omega^k(M)$ , alors,  $\star S$  est le seul élément de  $\Omega^{n-k}(M)$  tel que

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_{n-k} \in TM, \star S(v_1, v_2, \dots, v_{n-k})\epsilon = S \wedge v_1^\flat \wedge v_2^\flat \wedge \dots \wedge v_{n-k}^\flat$$

où  $v^\flat$  désigne la forme linéaire correspondant au vecteur  $v$  via l'isomorphisme musical induit par la métrique.

Explicitement, soit  $S$  une  $k$ -forme de composantes  $S_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ . Son dual est la  $(n-k)$ -forme  $\star S$  de composantes

$$\star S_{\mu_{k+1} \dots \mu_n} = \frac{1}{k!} S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n}$$

Lorsque la métrique possède une signature  $(p, q)$  (avec  $q$  signes  $-$  et  $p+q = n$ ), on voit que  $\star \epsilon = 1/n! \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = (-1)^q$  puisque  $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = (-1)^q n!$ .

$$\star \epsilon = (-1)^q$$

Notons que si  $\omega$  est une  $n$ -forme, et qu'il existe donc un nombre réel  $\lambda$  tel que  $\omega = \lambda \epsilon$ , alors  $\star \omega = (-1)^q \lambda$ .

On voit que  $\star \star 1 = (-1)^q 1$  et que  $\star \star \epsilon = (-1)^q \epsilon$ . Plus généralement, pour une  $k$ -forme  $S$ ,

$$\star \star S = (-1)^{k(n-k)} (-1)^q S$$

L'opérateur  $\star$ , agissant sur  $\Omega^k(M)$  est donc inversible, avec  $\star^{-1}$ , agissant sur  $\Omega^{n-k}(M)$ , donné par  $\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)+q} \star$ .

Notons que, dans le cas d'une signature purement euclidienne  $(n, 0)$ , il n'y a pas à se préoccuper du signe supplémentaire  $(-1)^q$ .

Pour des applications à la physique de l'espace-temps (signature  $(3, 1)$ ), les formules suivantes sont particulièrement utiles :

pour une 1-forme  $J$ ,  $\star J_{\alpha\beta\gamma} = J^\mu \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$  et  $\star \star J = J$ .

pour une 2-forme  $F$ ,  $\star F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  et  $\star \star F = -F$ .

pour une 3-forme  $B$ ,  $\star B_\alpha = \frac{1}{3!} B^{\lambda\mu\nu} \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}$  et  $\star \star B = B$ .

### Le produit $\langle\langle, \rangle\rangle$ dans l'espace des $k$ -formes

Soient  $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ . On pose

$$\omega \wedge \star \eta = \eta \wedge \star \omega = \langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle \cdot \epsilon$$

Notons que  $\langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle$  est une fonction sur  $M$  et que  $\langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle = \{\omega, \alpha\}$  où  $\alpha = \star \eta$ .

On en déduit un produit scalaire global dans  $\Omega^k(M)$ . Nous supposons maintenant que la variété  $M$  est compacte. Soient  $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ . On pose

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge \star \eta = \int_M \langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle \epsilon$$

Cette forme est bilinéaire symétrique et non dégénérée sur  $\Omega^k(M)$ .

On démontre que  $\star$  est unitaire pour  $(\cdot, \cdot)$  :

$$(\star\omega, \star\eta) = (\omega, \eta)$$

### La codifférentielle $\delta$ sur les formes

$\delta : \Omega^k(M) \mapsto \Omega^{k-1}(M)$  est défini comme l'adjoint de  $d$  pour le produit scalaire global, c'est à dire

$$\boxed{(\alpha_k, d\beta_{k-1}) = (\delta\alpha_k, \beta_{k-1})}$$

En écrivant la définition et en intégrant par parties, on obtient l'expression de  $\delta$  agissant sur une  $k$ -forme  $\alpha_k \in \Omega^k(M)$ . Pour une variété de dimension  $n$  munie d'une métrique de signature  $(p, q)$ , il vient :

$$\delta\alpha_k = (-1)^{nk+n+1} (-1)^q \star d \star \alpha_k \in \Omega^{k-1}(M).$$

On en déduit immédiatement que

$$\delta^2 = 0$$

Par ailleurs  $\delta$  est nul sur les fonctions (sur  $\Omega^0(M)$ ).

Notons également que

$$\star\delta\omega_k = (-1)^k d \star \omega_k$$

et que

$$\delta \star \omega_k = (-1)^{k+1} \star d\omega_k$$

Notons enfin qu'on peut définir  $\delta$  même si  $M$  n'est pas orientable. En effet, la définition est locale et changer l'orientation revient à changer  $\star$  en  $-\star$ , de sorte que  $\delta$  est inchangé.

Le lecteur pourra vérifier que, relativement à un système de coordonnées locales  $x^\mu$ , la codifférentielle d'une  $k$ -forme

$$\boxed{\omega = \sum_{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}}$$

s'écrit

$$\delta\omega = -g^{\rho\mu} \sum_{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{k-1}} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1} \rho, \mu} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{k-1}}$$

Le lecteur pourra également vérifier qu'on peut remplacer les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes dans la formule ci-dessus (remplacer la virgule par le point virgule) car, bien que  $\omega_{\rho\mu_1\mu_2\dots\mu_{k-1},\mu}$  soit en général différent de  $\omega_{\rho\mu_1\mu_2\dots\mu_{k-1};\mu}$ , tous les termes dépendant de la connexion disparaissent dans la somme.

On peut considérer une  $k$ -forme comme un tenseur covariant (particulier) c'est à dire comme une 0-forme à valeur dans le fibré  $(T^*M)^{\otimes k}$ . On peut donc considérer la différentielle covariante  $\nabla\omega$  ainsi que la dérivée covariante  $\nabla_v\omega$  dans la direction d'un vecteur  $v$ . Soit  $\{e_\mu\}$  un repère mobile orthonormée et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita, la formule précédente, donnant l'expression de  $\delta\omega$  peut se re-écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \delta\omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_{k-1}}) &= -\sum_\mu \nabla_\mu \omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_{k-1}}, e_\mu) \\ &= -\sum_\mu \nabla \omega(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_{k-1}}, e_\mu, e_\mu) \end{aligned}$$

Il est parfois commode d'utiliser un symbole  $Tr$  (trace) qui contracte les deux derniers indices d'un tenseur donné à l'aide de la métrique (on suppose que ces deux derniers indices sont tous deux covariants ou tous deux contravariants, sinon, on n'a pas besoin de métrique). La relation précédente s'écrit alors

$$\delta\omega = -Tr \nabla\omega$$

### La divergence *div* sur les tenseurs quelconques

La codifférentielle  $\delta$  n'était définie que sur les formes extérieures, mais la formule  $\delta\omega = -Tr \nabla\omega$  a un sens pour des tenseurs quelconques. Soit  $T$  un tenseur de rang quelconque. On pose

$$div T = Tr \nabla T$$

En particulier, pour une forme, on a  $div \omega = -\delta\omega$ .

### Le laplacien de De Rham sur les formes

On définit le laplacien de De Rham (encore appelé laplacien de Hodge ou opérateur de Beltrami) comme

$$\Delta_{DR} = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$$

Voici quelques unes de ses propriétés :

$\Delta_{DR}$  est self adjoint pour  $(\cdot, \cdot) : (\omega, \Delta_{DR} \eta) = (\Delta_{DR} \omega, \eta)$ .

$\Delta_{DR}$  est un opérateur positif (on suppose maintenant que  $M$  est proprement riemannienne) :  $(\omega, \Delta_{DR} \omega) \geq 0$ .

On dit que  $\omega$  est *harmonique* si et seulement si  $\Delta_{DR} \omega = 0$  c'est à dire si et seulement si  $\omega$  est à la fois fermée ( $d\omega = 0$ ) et cofermée ( $\delta\omega = 0$ ).

*Théorème de Hodge* ( $M$  est supposée compacte) :

$$\forall \omega_p \in \Omega^p(M) \exists ! (\alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \in \Omega^{p-1}(M) \times \Omega^p(M) \times \Omega^{p+1}(M) \mid \omega_p = d\alpha_{p-1} + \alpha_p + \delta\alpha_{p+1}$$

où  $\alpha_p$  est harmonique. Il y a unicité du triplet  $(\alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1})$ .

Toute classe de cohomologie de De Rham  $H^p$  contient un unique représentant harmonique.

Nous définissons un peu plus bas le laplacien usuel (naïf) qu'on notera  $\Delta$  sur les fonctions ( $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ). Attention, il s'avère que le laplacien de De Rham sur les fonctions et le laplacien naïf diffèrent par un signe :  $\Delta f = -\Delta_{DR} f$ .

Au lieu de considérer des formes différentielles (éléments de  $\Omega^p(M)$ ) on peut considérer des formes différentielles à valeur dans un fibré vectoriel (éléments de  $\Omega^p(M, E)$ ). L'existence d'une métrique sur la base ainsi que d'un produit scalaire dans les fibres permet là encore, avec les mêmes hypothèses, de définir un produit scalaire global. On définit alors une codifférentielle covariante  $\delta^\nabla$  comme l'adjoint de la différentielle extérieure covariante  $d^\nabla$ . On définit ensuite un laplacien de De Rham

$$\boxed{\Delta_{DR}^\nabla = d^\nabla \delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla}$$

et la théorie se généralise...

Mentionnons l'existence du *laplacien de Lichnerowicz* associé à une métrique  $g$  et agissant sur les tenseurs symétriques  $2 \times 2$  :

$$\Delta_L h_{\mu\nu} = \Delta h_{\mu\nu} + \rho_\mu^\lambda h_{\lambda\nu} + \rho_\nu^\lambda h_{\mu\lambda} + 2g^{\lambda\lambda'} g^{\sigma\sigma'} g_{\nu\nu'} R_{\sigma'\mu\lambda'} h_{\lambda\sigma}$$

A titre d'exercice, on peut voir que ce dernier opérateur peut s'obtenir comme somme pondérée  $\Delta_L = \Delta_{02} - \Delta_{01} - \Delta'_{01}$  où les laplaciens généralisés  $\Delta_{ij}$  sont eux-mêmes associés aux différentielles covariantes généralisées introduites en page 180.

### Hessiens et Laplaciens naïfs

Nous avons consacré une section aux différentielles covariantes généralisées (section 4.2.9). Nous avons vu, en particulier, que si  $\xi$  est une 0-forme à valeurs dans un fibré vectoriel  $E$ , on pouvait tout d'abord considérer  $\nabla\xi$  qui

est un élément de  $\Omega^1(M, E)$  puis identifier  $\Omega^1(M, E)$  avec  $\Omega^0(M, E \otimes T^*M)$ , ce qui nous autorise, dans la mesure où les fibrés  $E$  et  $T^*M$  sont tous deux équipés de connexion, à considérer l'objet  $\nabla\nabla\xi$ , qui sera donc un élément de  $\Omega^1(M, E \otimes T^*M)$  qu'on peut identifier avec  $\Omega^0(M, E \otimes T^*M \otimes T^*M)$ . De façon générale, nous avons défini le *hessien* de  $\xi$  comme  $Hess(\xi) = \nabla\nabla\xi$ . Dans le cas le plus simple où  $\xi$  est une fonction scalaire  $f$  et si nous choisissons la connexion de Levi-Civita, la torsion est nulle, auquel cas les dérivées covariantes secondes commutent (voir section 4.4.8) et  $Hess(f)$  est une forme bilinéaire symétrique sur le fibré tangent.

Plus généralement, soit  $\xi \in \Omega^0(M, E)$ ,  $e_i$  un repère local dans les fibres de  $E$  et  $\{\theta^\alpha\}$  un corepère mobile sur  $M$ . Nous avons calculé explicitement  $Hess(\xi)$  en section 4.4.8. Le laplacien naïf sur  $\Omega^0(M, E)$  (on dit souvent "laplacien brut") est défini par l'égalité

$$\Delta(\xi) = Tr Hess(\xi)$$

Explicitement, on a

$$\Delta(\xi) = e_i g^{\alpha\beta} \xi_{;\alpha\beta}^i$$

C'est encore un élément de  $\Omega^0(M, E)$ .

Dans le cas particulier d'une fonction  $f$ , et en utilisant un repère naturel, on obtient simplement

$$\Delta(f) = -\Delta_{DR} f = g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial f}{\partial x^\rho} \right]$$

En jouant avec les différentes sortes de différentielles covariantes généralisées, on peut définir plusieurs autres sortes de Laplaciens. On peut aussi trouver les formules reliant ces différents Laplaciens. . .

### Equations de Maxwell et équations de Yang-Mills

Les équations de Maxwell décrivent la physique de l'électromagnétisme. Nous avons vu comment écrire la moitié de ces équations, en l'occurrence, les équations "sans terme de source",  $dF = 0$ , qui résultent directement de la définition  $F = dA$  du champ électromagnétique  $F$  en terme du potentiel électromagnétique  $A$ . Ces équations, qui sont en quelque sorte des équations structurelles, n'utilisent pas la notion de métrique. A ce propos, si on souhaite écrire explicitement ces équations "avec des indices", dans un repère naturel, on obtiendra indifféremment

$$F_{\mu\nu;\rho} + F_{\rho\mu;\nu} + F_{\nu\rho;\mu} = F_{\mu\nu;\rho} + F_{\rho\mu;\nu} + F_{\nu\rho;\mu} = 0$$

en effet, les coefficients de la connexion linéaire se compensent dans la seconde équation, ce qui est *a priori* bien évident, du fait de la définition de  $F$  en termes de  $A$ , laquelle ne fait aucunement appel à la notion de connexion linéaire. De la même façon, dans un repère naturel,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$$

Attention, dans un repère mobile  $\{\theta^\rho\}$ , les valeurs de  $d\theta^\rho$  ne sont pas nulles puisque les fonctions de structure du repère ne sont pas nulles (voir section 1.6.3) : les coefficients de la connexion linéaire se compensent comme auparavant, mais il faut tenir compte des fonctions de structure du repère (cela n'a rien à voir avec l'existence, ou non, d'un champ gravitationnel décrit par la métrique  $g$ ). Puisque  $F = dA = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\theta^\mu \wedge \theta^\nu$ , on obtient

$$F_{\mu\nu} = (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) - A_\rho f_{\mu\nu}{}^\rho$$

Les charges électriques, quant à elles, sont les “sources” du champ et ces charges sont décrites par une 1-forme  $J = J_\mu dx^\mu$  (le “vecteur courant”). Le couplage entre champ et charges doit être tel que toutes les équations de Maxwell soient vérifiées. En dimension  $4 = 3 + 1$  (physique de l'Espace-Temps) le dual de Hodge de  $J$  est une 3-forme et les équations de Maxwell “avec sources” s'écrivent

$$d \star F = \star J$$

Ici, par contre, la métrique intervient explicitement (via l'opération  $\star$ ). De manière explicite, ces équations s'écrivent

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J^\mu$$

Notons qu'à l'aide de la codifférentielle  $\delta$ , les équations de Maxwell avec sources  $d \star F = \star J$  s'écrivent simplement  $\delta F = J$ .

Le lecteur pourra bien entendu écrire les deux équations “quadrimensionnelles” à l'aide des composantes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  de  $F$  (les champs électriques et magnétiques) et à l'aide des composantes  $\rho$  (la charge) et  $\vec{j}$  (le courant électrique tridimensionnel) de  $J$  et redécouvrir ainsi les quatre équations de Maxwell habituelles. On rappelle que

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne les théories de jauge non abéliennes (par exemple la chromodynamique décrivant les interactions fortes élémentaires entre quarks), le potentiel de jauge  $A$  et la courbure  $F$  sont maintenant des formes à valeurs matricielles (l'algèbre de Lie de  $SU(3)$  dans le cas de la chromodynamique). Il en est de même du vecteur courant  $J$ . Les équations de Yang-Mills “sans sources” s'écrivent

$$\boxed{DF = dF - F \wedge A + A \wedge F = 0}$$

Ce sont donc simplement les identités de Bianchi. Dans un repère naturel, et en utilisant des indices, notons que

$$\begin{aligned} F \wedge A - A \wedge F &= \frac{1}{2} [F_{\mu\nu}, A_\rho] dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{3!} ([F_{\nu\rho}, A_\mu] + [F_{\mu\nu}, A_\rho] + [F_{\rho\mu}, A_\nu]) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0}$$

avec

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\rho F_{\mu\nu} + [A_\rho, F_{\mu\nu}]$$

Les équations de Yang-Mills “avec sources” s'écrivent

$$\boxed{D \star F = \star J}$$

c'est à dire encore, si on utilise les indices,

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} + [A_\nu, F^{\mu\nu}] = J^\mu}$$

Notons que, même lorsque  $J = 0$ , c'est à dire dans “le vide”, l'ensemble des équations de Yang-Mills  $DF = 0$  et  $D \star F = 0$  constitue un système d'équations différentielles hautement non trivial dont la discussion générale sort du cadre de cet ouvrage.

#### 4.5.8 Connexions spinorielles et opérateur de Dirac

##### Complément sur l'algèbre de Lie du groupe *Spin*

Soit  $P = OFM$  le fibré des repères orthonormés correspondant à une certaine métrique  $g$  sur une variété orientée  $M$ ,  $\widehat{P} = \widehat{OFM}$ , le fibré des repères spinoriels correspondant (on suppose qu'il existe — c'est à dire que la variété est spinorielle — et qu'il est unique — c'est à dire que la variété possède une seule structure spinorielle).

Nos considérations sont valables pour une signature quelconque  $(p, q)$  et on désignera par  $\eta$  la forme diagonale de la métrique  $g$ , c'est à dire la matrice donnant l'expression de la métrique  $g$  dans un repère orthonormé, ainsi,  $\eta_{ab} = \pm 1$ . Pour simplifier on posera  $Spin(\eta) = Spin(p, q)$ . Rappelons que nous avons également une inclusion  $Spin^\uparrow(\eta) \subset Spin(\eta)$  et que l'existence d'une structure  $spin^\uparrow$  sur une variété implique non seulement que  $M$  est orientée mais encore orientée temporellement (le "temps" pouvant avoir plusieurs directions).

Soit  $V$  un espace vectoriel réel, complexe (ou même quaternionique) sur lequel est donnée une représentation  $\rho$  de l'algèbre de Clifford  $Cliff(\eta)$ . On sait (voir la section consacrée aux groupes  $Spin$ ) que  $Spin(\eta)$  est un sous-ensemble de  $Cliff(\eta)$ , on a donc ainsi automatiquement une représentation, encore notée  $\rho$ , du groupe  $Spin(\eta)$ . Nous pouvons également, dans le cas pair, parler de spineurs de Weyl (demi-spineurs) mais il n'est pas utile d'établir ici une distinction entre la droite et la gauche ni d'ailleurs de mentionner les propriétés de réalité des spineurs considérés. Nous travaillerons donc avec des spineurs définis comme section d'un fibré vectoriel  $SM = \widehat{P} \times_{Spin(\eta)} V$ .

On choisit un ensemble de générateurs  $\{\gamma_a\}$  de  $Cliff(n)$ , avec

$$\boxed{\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2 \eta_{ab}}$$

Soit  $g \in Spin(n)$ , on sait que  $\rho(g)\gamma_a\rho(g^{-1}) = \gamma_b\Lambda(g)_a^b$ , où  $\rho(g)$  est la représentation du groupe  $Spin(\eta)$  et  $\Lambda$  est celle du groupe orthogonal  $SO(\eta)$  correspondant (le groupe de Lorentz). Nous avons besoin de savoir écrire explicitement la représentation  $\rho$  pour l'algèbre  $Lie(SO(\eta)) = Lie(Spin(\eta))$ . Soit  $M^{ab}$  l'ensemble des matrices antisymétriques en dimension  $n$ , c'est à dire  $M^{ab} + M^{ba} = 0$ . On sait que  $Lie(SO(\eta))$  est engendrée par les matrices  $M$  du type  $M_{ab} = \eta_{ac} M^{cb}$ . Notons encore

$$\rho(M) = \frac{1}{8} M^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] = \frac{1}{2} M^{ab} \Sigma_{ab}$$

avec

$$\Sigma_{ab} = 1/4 [\gamma_a, \gamma_b]$$

On vérifie immédiatement que  $[\rho(M1), \rho(M2)] = \rho([M1, M2])$  et que  $[\rho(M), \gamma_a] = \gamma_b M_a^b$ . On voit donc que  $\rho$ , défini comme ci-dessus, nous fournit la représentation de  $Lie(Spin(\eta))$  cherchée.

### Connexion spinorielle

Une *connexion spinorielle* est une connexion principale sur le fibré  $\widehat{P}$ . Il existe une bijection entre l'ensemble des connexions sur le fibré  $P$  des repères

orthonormés et l'ensemble des connexion sur le fibré des repères spinoriels. En effet, si  $\omega$  est une connexion sur  $P$ , si  $\lambda$  désigne l'homomorphisme d'espaces fibrés  $\widehat{e} \in \widehat{P} \rightarrow e \in P$ , et si  $V_{\widehat{e}} \in T(\widehat{P}, \widehat{e})$ , on obtient une connexion  $\widehat{\omega}$  sur  $\widehat{P}$  en posant

$$\widehat{\omega}(V_{\widehat{e}}) = \omega(V_e) \quad \text{avec} \quad V_e = \lambda_*(V_{\widehat{e}})$$

La connexion métrique  $\omega$  s'écrivait localement à l'aide de la forme  $\Gamma$ , c'est à dire explicitement à l'aide de la matrice de connexion  $\Gamma^a_b = \Gamma^a_{b\mu} dx^\mu$ . En utilisant la représentation trouvée précédemment pour  $Lie(Spin(\eta))$ , nous obtenons

$$\widehat{\Gamma} = \rho(\Gamma) = \frac{1}{8} \Gamma^{ab} [\gamma_a, \gamma_b]$$

Posons  $\boxed{\gamma^a = \eta^{ab} \gamma_b}$ , nous obtenons,

$$\boxed{\widehat{\Gamma} = \frac{1}{8} \Gamma_{ab} [\gamma^a, \gamma^b] = \frac{1}{4} \Gamma_{ab} \gamma^a \gamma^b}$$

L'opérateur de courbure peut être obtenu de la même façon. On part de l'opérateur de courbure écrit comme endomorphisme  $R = (R^a_b)$  et on obtient :

$$\boxed{\widehat{R} = \frac{1}{4} R_{ab} \gamma^a \gamma^b}$$

avec

$$R_{ab} = \frac{1}{2} R_{ab\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Si on décide de n'utiliser qu'un seul repère mobile orthonormé  $e_a$ , ainsi que le co-repère mobile correspondant  $e^a$ , il vient

$$R_{ab} = \frac{1}{2} R_{abcd} e^c e^d$$

Enfin, mentionnons les deux formules bien utiles suivantes, donnant le tenseur de Ricci  $\rho$  et la courbure scalaire  $\tau$ . Elles s'obtiennent en utilisant simplement les relations de commutations des générateurs de l'algèbre de Clifford :

$$R_{abcd} \gamma^d \gamma^a \gamma^b = 2\rho_{ce} \gamma^e$$

$$R_{abcd} \gamma^c \gamma^d \gamma^a \gamma^b = -2\tau$$

### Dérivée covariante sur les champs de spineurs

En vertu de l'étude générale sur les différentielles et dérivées covariantes, on voit immédiatement que si  $\Psi$  est un champ de spineurs (une section du fibré vectoriel  $SM$ ), sa différentielle covariante est donnée par

$$\boxed{\nabla \Psi = d\Psi + \widehat{\Gamma} \Psi = d\Psi + \frac{1}{4} \Gamma_{ab} \gamma^a \gamma^b \Psi}$$

La quantité  $\nabla\Psi$  est un spineur-1-forme, et son évaluation, sur un vecteur tangent  $v$  à  $M$ , c'est à dire la dérivée covariante de  $\Psi$  dans la direction  $v$  est le champ de spineurs  $\nabla_v\Psi = \nabla\Psi(v)$ . Un spineur pour lequel  $\nabla\Psi = 0$  est un *spineur parallèle*.

### L'opérateur de Dirac

Soit  $(e_a)$  un repère mobile orthonormé (en général local), on peut construire les dérivées covariantes  $\nabla_a\Psi = \nabla_{e_a}\Psi$  et on définit l'*opérateur de Dirac*  $\mathcal{D}$  par :

$$\boxed{\mathcal{D}\Psi = \gamma^a\nabla_a\Psi}$$

On voit que l'opérateur de Dirac transforme également les champs de spineurs en d'autres champ de spineurs. Ceux pour lesquels  $\mathcal{D}\Psi = 0$  sont appelés *spineurs harmoniques*. Par ailleurs, le carré  $\widehat{\Delta} = \mathcal{D}^2$  s'appelle le *laplacien spinoriel* et on peut vérifier que sa relation avec le laplacien naïf  $-\eta^{ab}\nabla_a\nabla_b$  est donnée par la formule

$$\boxed{\widehat{\Delta} = -\eta^{ab}\nabla_a\nabla_b + \frac{1}{4}\tau}$$

$\tau$  étant la courbure scalaire.

L'opérateur de Dirac est sans doute l'opérateur différentiel le plus important de la géométrie (et de la physique!) Ne pouvant y consacrer plus de place ici, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages (ou articles) spécialisés (le résumé qui précède s'inspire de [4]).

### Le fibré de Clifford

On part du fibré principal  $\widehat{P}$  des repères spinoriels et on utilise l'action adjointe du groupe structural  $Spin(\eta)$  sur l'algèbre de Clifford  $Cliff(\eta)$  (voir plus haut) pour construire le fibré associé en algèbres de Clifford  $Cliff(M) = \widehat{P} \times_{Spin(\eta)} Cliff(\eta)$ . On peut définir une inclusion  $\gamma$  du fibré tangent  $TM$  dans le fibré de Clifford  $Cliff(M)$  et on note  $\gamma_\mu = \gamma(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$ . Plus simplement, on peut considérer les  $\gamma_\mu$  comme des "matrices gamma" dépendant du point  $x \in M$ . Soit  $\{e_a\}$  un repère mobile orthonormé et  $\partial_\mu$  un repère naturel, alors  $\partial_\mu = e_\mu^a e_a$ . On peut alors utiliser la matrice  $e_\mu^a$  (qui dépend de  $x$ ) pour définir  $\gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x)\gamma_a$ . En posant  $\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\nu$ , on vérifie immédiatement que  $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$  et que l'opérateur de Dirac s'écrit  $\mathcal{D} = \gamma^\mu\nabla_\mu$ .

Remarque : Il existe un sous-fibré de  $Cliff(M)$  dont les fibres sont des groupes spinoriels, puisque  $Spin(\eta) \subset Cliff(\eta)$ . Ce sous-fibré ne coïncide pas avec le fibré principal  $\widehat{P}$  des repères spinoriels puisque l'action du groupe  $Spin(\eta)$  sur lui-même, définie par restriction, est l'action adjointe. On en

déduit que le sous-fibré en question n'est autre que le fibré adjoint  $Ad\widehat{P}$ . C'est un fibré en groupes, mais il n'est pas principal. On sait que ses sections ne sont autres que les transformations de jauge du fibré principal  $\widehat{P}$  dont on est parti.

#### 4.5.9 Métriques sur les groupes et espaces homogènes

Il n'entre pas dans nos intentions d'étudier ici ce vaste chapitre de la géométrie riemannienne. Nous voulons simplement attirer l'attention du lecteur sur le fait suivant : un groupe de Lie donné possède en général une infinité de métriques. Si, pour simplifier, le groupe est simple et compact, il existe une métrique particulièrement "symétrique" désignée généralement sous le nom de *métrique de Killing*. Comme tous ses multiples, elle est bi-invariante, en ce sens que son groupe d'isométries est  $G \times G$ . Par contre il existe des métriques invariantes par  $G \times 1$ , des métriques invariantes par  $1 \times G$ , des métriques invariantes par  $H \times K$  où  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes de  $G$ , mais aussi des métriques n'ayant aucune isométrie particulière... Par ailleurs, il est intéressant de comparer la connexion riemannienne (sans torsion) induite par la métrique de Killing sur un groupe de Lie avec la connexion canonique définie à l'aide de la forme de Maurer Cartan (celle de gauche ou celle de droite) qui généralement a de la torsion mais est de courbure nulle (revoir l'équation de Maurer-Cartan sur les groupes de Lie). L'étude des métriques invariantes sur les espaces homogènes est également un chapitre important de la géométrie riemannienne, et là encore, nous renvoyons au traité [9].

# Chapitre 5

## Un saut dans l'infini

### 5.0.1 Action du groupe de jauge sur l'espace des connexions

Soit  $Ad P = P \times_{Ad} G$  le fibré adjoint en groupes et  $ad P = P \times_{ad} \mathfrak{g}$  le fibré adjoint en algèbres de Lie (voir le chapitre “Espaces fibrés”). On se souvient que l'ensemble des sections globales de  $Ad P$  n'est autre que le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  (automorphismes verticaux de  $P$ ) et que l'ensemble des sections globales de  $ad P$  est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  du groupe de jauge. La fibre type de  $ad P$  est une algèbre de Lie, et donc, en particulier, un espace vectoriel. Puisque  $ad P$  est un fibré vectoriel, toute connexion  $\omega$  sur  $P$  donne naissance à une différentielle covariante  $\nabla^\omega$  agissant sur les sections de  $ad P$  (qui sont des transformations de jauge infinitésimales) et plus généralement à une différentielle extérieure covariante  $d^{\nabla^\omega}$  agissant sur  $\mathcal{G}^p = \Omega^p(M, ad P)$ .

$$d^{\nabla^\omega} : \mathcal{G}^p = \Omega^p(M, ad P) \mapsto \mathcal{G}^{p+1} = \Omega^p(M, ad P)$$

Noter que  $\Omega^p(M, ad P) \simeq \Omega_{ad}^p(P, Lie \mathfrak{G})$  (voir section 3.3.10 (2)). On supposera aussi qu'il est possible de plonger le groupe structural  $G$  dans une algèbre de matrices  $M(n, \mathfrak{C})$ , pour  $n$  assez grand et donc considérer  $Ad P$  comme sous-fibrés du fibré vectoriel  $P \times_{Ad} M(n, \mathfrak{C})$ . On peut donc également considérer la différentielle covariante  $\nabla^\omega$  agissant sur une transformation de jauge finie,  $\Phi$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble de toutes les connexions qu'on peut définir sur un fibré principal donné  $P = P(M, G)$ . Il est facile de voir que le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  agit sur  $\mathcal{A}$  par “pull-back”. Soit  $\Phi \in \mathfrak{G}$ ,  $\omega \in \mathcal{A}$ ,  $z \in P$  et  $V \in T(P, z)$ . On définit  $\omega^\Phi \equiv \omega \cdot \Phi$  par

$$\omega^\Phi_z(V) = \omega_{\Phi(z)}(\Phi_*(V))$$

L'équivariance d'une connexion peut s'écrire, comme on le sait, en terme du potentiel de jauge, sous la forme  $A \rightarrow A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ . Le second

membre de cette égalité peut encore s'écrire  $A + g^{-1}(dg + [A, g])$  et la quantité  $dg + [A, g]$  apparaît comme une différentielle covariante  $\nabla g$  relative à la connexion choisie. De la même façon, l'action du groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  sur l'espace  $\mathcal{A}$  des formes de connexion s'écrit

$$(\omega, \Phi) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{G} \rightarrow \omega^\Phi = \omega \cdot \Phi = \omega + \Phi^{-1} \nabla \omega \Phi$$

Cette loi de transformation nous montre que l'ensemble  $\mathcal{A}$  de toutes les connexions n'est pas un espace vectoriel mais un espace affine. En géométrie élémentaire, la différence de deux points est un vecteur de l'espace vectoriel sous-jacent. Il en est de même ici. L'objet  $\Phi^{-1} \nabla \omega \Phi$  est une 1-forme (équivariante) sur  $P$ , à valeurs dans  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . L'espace vectoriel sous-jacent à l'espace affine  $\mathcal{A}$  est donc  $\mathcal{G}^1$ . En particulier, notons que si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  désignent deux connexions, alors  $(\omega_2^\Phi - \omega_1^\Phi) = (\omega_2 - \omega_1) + \Phi^{-1}(\nabla^{\omega_2} - \nabla^{\omega_1})\Phi$ .

### 5.0.2 L'espace des orbites

Puisqu'on a une action de groupe sur un espace, on peut étudier le quotient par cette action, c'est à dire l'espace des orbites  $\mathcal{I} = \mathcal{A}/\mathfrak{G}$ . Il faut tenir compte, en fait, de quelques subtilités car l'action de  $\mathfrak{G}$  n'est pas libre, en général. En d'autres termes, certaines connexions peuvent avoir des symétries : c'est le cas lorsque le sous-groupe de  $\mathfrak{G}$  qui stabilise une connexion donnée ne se réduit pas à l'identité. Pour rendre cette action libre, il faut, soit considérer un espace des connexions plus petit (c'est à dire ne considérer que les connexions "irréductibles" pour lesquelles le stabilisateur est trivial), soit diminuer la taille du groupe de jauge (on considère le *groupe de jauge pointé*  $\mathfrak{G}_x$  obtenu en se fixant arbitrairement un point  $x$  de  $M$  et en ne considérant que les transformations de jauge  $\Phi$  telles que  $\Phi(z) = z$ , pour tout  $z$  appartenant à la fibre de  $P$  au dessus de  $x$ ). Moyennant ces quelques précautions, par exemple celle qui revient à ne considérer que l'action du groupe de jauge pointé, on montre que l'espace des connexions est lui-même un espace fibré principal, de groupe structural  $\mathfrak{G}_x$  au dessus de l'espace des orbites, qu'on note  $\mathcal{I}$ .

Lorsque la variété  $M$  est compacte, munie d'une métrique et qu'on a choisi également une métrique bi-invariante sur le groupe de structure  $G$ , on peut construire un produit scalaire global sur les espaces vectoriels  $\mathcal{G}^p$  ainsi qu'un laplacien généralisé. Le produit scalaire sur l'espace vectoriel  $\mathcal{G}^1$  (identifié avec l'espace vectoriel sous-jacent à l'espace affine  $\mathcal{A}$  en un point quelconque  $\omega$ ) fait de  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien (de dimension infinie, bien sûr !). On a donc une métrique sur  $\mathcal{A}$ . Cette métrique permet de décomposer l'espace tangent  $T(\mathcal{A}, \omega)$  en un sous-espace vertical évident (celui qui est

tangent à l'action de  $\mathfrak{G}$ ) et un sous-espace horizontal défini comme étant perpendiculaire au sous-espace vertical pour cette métrique. On obtient ainsi une connexion sur le fibré  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathfrak{G})$ . La métrique sur  $\mathcal{A}$ , étant  $\mathfrak{G}$ -invariante, permet également de définir une nouvelle métrique sur la base du fibré  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathfrak{G})$ , c'est à dire sur l'espace des orbites  $\mathcal{I}$ .

### 5.0.3 Conclusion

La géométrie riemannienne de l'espace des orbites des connexions, modulo l'action du groupe de jauge, est un sujet à la fois complexe et fascinant. Notre but, dans ce dernier chapitre n'avait d'autre but que d'entrebâiller une porte... Nous allons arrêter là notre escapade en dimension infinie, non sans faire un clin d'œil à la physique...bouclant ainsi la boucle. En effet, on sait que dans les théories de jauge, deux connexions qui diffèrent par une transformation de jauge décrivent la même situation physique. L'espace des champs de Yang-Mills possibles, celui sur lequel on doit intégrer lorsqu'on fait de la théorie quantique des champs "à la Feynman" est donc l'espace des orbites  $\mathcal{I}$ . Par ailleurs, les champs de matière sont, comme on le sait, décrits par des sections de fibrés  $E$  associés à un fibré principal  $P = P(M, G)$ , mais le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  agit sur l'espace  $\Gamma E$  de ces sections et deux sections qui diffèrent par l'action du groupe de jauge sont également physiquement équivalentes. On en déduit que la physique des champs de Yang-Mills et des champs de matière qui leur sont couplés est en définitive décrite par la géométrie de l'espace fibré

$$\mathfrak{N} = \mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathfrak{G}) \times_{\mathfrak{G}} \Gamma E$$

Une structure analogue existe lorsqu'on s'intéresse à la gravitation quantique et qu'on veut étudier l'espace des métriques qu'il est possible de définir sur une variété différentiable donnée. Le groupe de jauge  $\mathfrak{G}$  est alors remplacé par le groupe des difféomorphismes de  $M$ . La situation est d'ailleurs plus complexe dans ce cas.

C'est donc de la géométrie différentielle en dimension infinie qu'il faut faire pour comprendre, du point de vue quantique, la structure des théories physiques décrivant les interactions fondamentales. Il n'est pas exclu que le traitement mathématique le plus adapté à cette étude de la géométrie en dimension infinie passe par une "algébraïsation" complète des techniques de la géométrie différentielle et au remplacement de celle-ci par la géométrie non commutative (voir chapitre suivant).



# Chapitre 6

## Calcul différentiel pour algèbres non commutatives

### 6.1 Remarques philosophico-mathématiques sur les espaces non commutatifs

Lorsqu'on se donne un "espace"  $M$  (techniquement, un ensemble dont les éléments sont surnommés "points"), on sait construire l'algèbre des fonctions sur  $M$  à valeurs réelles ou complexes. Cette algèbre est commutative puisque multiplication et addition sont définies ponctuellement comme suit :  $(fg)[x] = f[x]g[x] = g[x]f[x] = (gf)[x]$  et  $(f + g)[x] = f[x] + g[x] = g[x] + f[x] = (g + f)[x]$ . Lorsque notre espace  $M$  est équipé d'une structure topologique, on sait construire l'algèbre  $C^0(M)$  des fonctions continues et lorsque  $M$  est équipé d'une structure différentiable, on sait construire l'algèbre  $C^\infty(M)$  des fonctions différentiables.

Il est possible de complètement inverser cette démarche : en d'autres termes, il est possible de partir d'une algèbre  $\mathcal{A}$  commutative, abstraitement définie, et de fabriquer une espace  $M$ , tel que  $\mathcal{A}$  s'identifie avec l'algèbre des fonctions sur  $M$ . Nous allons maintenant préciser cette construction.

On se donne  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach, c'est à dire une algèbre associative sur  $\mathfrak{C}$ , munie d'une norme  $\| \cdot \|$  qui soit telle que  $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$  et telle que l'espace vectoriel sous-jacent soit un espace de Banach (un espace vectoriel normé complet).

On appelle *caractère* de  $\mathcal{A}$  tout homomorphisme non nul de  $\mathcal{A}$  vers le corps  $\mathfrak{C}$  des complexes. L'ensemble des caractères  $M$  s'appelle le *spectre* de  $\mathcal{A}$ .

On suppose maintenant l'algèbre  $\mathcal{A}$  *commutative*. On appelle *transformation de Gelfand* l'application  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$  dans l'algèbre commutative  $C^0(M)$

qui à  $f \in \mathcal{A}$  associe  $\hat{f} \in C^0(M)$ , défini, pour tout caractère  $x \in M$  de  $\mathcal{A}$  par

$$\boxed{\hat{f}(x) = x(f)}$$

Résultat (sans démonstration) :  $\mathcal{F}$  est un homomorphisme d'algèbre de Banach commutative.

Encore quelques définitions :

Une algèbre de Banach involutive est une algèbre de Banach munie d'une étoile  $c$ 'est à dire une involution ( $f^{**} = f$ ), anti-linéaire  $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$  (pour  $\lambda \in \mathfrak{C}$ ) et anti-multiplicative  $((fg)^* = g^* f^*)$ , telle que l'étoile soit isométrique  $\|f^*\| = \|f\|$ .

Une  $C$ -étoile algèbre, est une algèbre de Banach involutive telle que,  $\forall f \in \mathcal{A} \|f^* f\| = \|f^*\| \|f\| = \|f\|^2$

Théorème de Gelfand (sans démonstration) : Lorsque  $\mathcal{A}$  est une  $C$ -étoile algèbre commutative, la transformation de Gelfand entre  $\mathcal{A}$  et l'algèbre  $C^0(M)$  des fonctions continues sur le spectre de  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme.

En fait, on peut préciser davantage : lorsque  $\mathcal{A}$  est une  $C$ -étoile algèbre commutative unitale (c'est à dire avec unité), l'espace  $M$  est compact. D'une certaine façon, rajouter une unité à une algèbre qui n'en a pas revient à compactifier (via Alexandrov) son spectre.

Ce qui ressort de cette discussion, c'est le fait que s'intéresser à un espace (un ensemble de points) ou s'intéresser à une algèbre commutative sont deux activités *grosso modo* essentiellement équivalentes. En langage savant, on dit que la transformation de Gelfand  $\mathcal{F}$  permet de définir un foncteur réalisant une équivalence entre la catégorie des espaces topologiques (compacts) et celle des  $\mathfrak{C}^*$  algèbres commutatives (unitales).

Une algèbre non commutative ne peut pas être considérée comme une algèbre de fonctions (à valeurs réelles ou complexes) sur un espace, puisque l'algèbre serait alors commutative. La "géométrie non commutative", au sens le plus large du terme, consiste souvent à re-écrire les diverses propriétés géométriques des "espaces" dans le langage des algèbres commutatives, c'est à dire sans utiliser la notion de point, puis à effacer, partout où cela est possible, le mot "commutatif". Ce faisant, on invente alors une nouvelle géométrie, celle des algèbres non commutatives. Les espaces non commutatifs n'existent donc pas, mais les algèbres qui les définissent, elles, existent bel et bien.

Du point de vue de la physique, il est pratique (et d'usage courant !) de décrire notre environnement à l'aide de points (pensez à la tête du voyageur à qui on dirait "Voyez-vous ce caractère de la  $C$ -étoile algèbre  $C^0(S^2)$  ?" au lieu de "Voyez-vous ce point à la surface de la Terre ?"). Cela dit, les deux points de vue sont équivalents, et on passe d'un point de vue à l'autre à l'aide

de la superbe formule  $\hat{f}(x) = x(f)$  sur laquelle il est bon de méditer... A ce sujet, nous invitons le lecteur à relire le paragraphe de l'Introduction intitulé "Du classique au quantique".

## 6.2 Calculs différentiels

### 6.2.1 Remarques

Dans le cadre commutatif, étant donné une variété  $M$ , nous avons décrit, de façon détaillée, une algèbre différentielle graduée, en l'occurrence, celle, notée  $\Lambda(M)$  des formes différentielles : le "complexe de De Rham". Cette algèbre est différentielle (puisque munie d'une différentielle  $d$ ) et différentielle graduée puisque  $d$  envoie  $\Lambda^p(M)$  dans  $\Lambda^{p+1}(M)$ . De plus, elle est telle que  $\Lambda^0(M) = C^\infty(M)$ . Comme nous le verrons un peu plus bas, le lecteur devrait se garder de croire qu'il s'agit là de la seule possibilité.

Dans le cadre non commutatif, nous supposons donnée une algèbre associative  $\mathcal{A}$ , unitale pour simplifier, mais non nécessairement commutative.  $\mathcal{A}$  va remplacer, dans la construction, l'algèbre commutative  $C^\infty(M)$ , c'est à dire, "philosophiquement", l'espace  $M$  lui-même. On veut pouvoir associer à  $\mathcal{A}$  une algèbre différentielle graduée  $\Omega$ , qui coïncide avec  $\mathcal{A}$  en degré zéro. Les éléments de  $\Omega$  vont remplacer les formes différentielles usuelles. On pourrait dire que ce sont des *formes différentielles quantiques*.

Nous cherchons à fabriquer une algèbre différentielle graduée qui, en degré zéro, coïncide avec  $\mathcal{A}$ . En fait, il existe de nombreuses possibilités, chaque possibilité définit ce qu'on appelle un *calcul différentiel sur l'algèbre  $\mathcal{A}$* . Cependant, une de ces possibilités est plus générale que les autres, en un sens que nous allons préciser. C'est celle qu'on désigne sous le nom d'algèbre  $\Omega\mathcal{A}$  des *formes universelles*.

### 6.2.2 L'algèbre différentielle des formes universelles $\Omega\mathcal{A}$

#### Universalité

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre associative unitale. On veut construire une algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée  $(\Omega\mathcal{A}, \delta)$  qui soit "la plus générale possible", et qui soit telle que  $\Omega\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}$ . Etre "la plus générale possible" signifie que tout autre algèbre du même type pourra s'obtenir à partir de celle-ci en imposant des relations supplémentaires. Techniquement, cela revient à dire que si  $(\Xi, d)$  est une autre algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée, avec  $\Xi^0 = \mathcal{A}$ , alors, c'est qu'il existe un morphisme  $\alpha$  (morphisme d'algèbre différentielle graduée) de  $\Omega\mathcal{A}$

sur  $\Xi$  tel que l'algèbre  $(\Xi, d)$  apparaisse comme un quotient de l'algèbre des formes universelles  $(\Omega\mathcal{A}, \delta)$  :

$$\Xi = \Omega\mathcal{A}/K$$

Ici, le noyau  $K$  de  $\alpha$  est un idéal bilatère gradué différentiel de  $\Omega\mathcal{A}$  (idéal bilatère car  $\Omega\mathcal{A}.K \subset K$ ,  $K.\Omega\mathcal{A} \subset K$  et différentiel car  $\delta K \subset K$ ). En d'autres termes,  $(\Omega\mathcal{A}, \delta)$  est un objet universel dans la catégorie des algèbres différentielles  $\mathfrak{Z}$ -graduées et on pourrait écrire tout ceci à l'aide de diagrammes commutatifs...

### Construction de $\Omega\mathcal{A}$ par générateurs et relations

On part de  $\mathcal{A}$ . Désignons les éléments de  $\mathcal{A}$  par des symboles  $a_p$ . On introduit alors de *nouveaux* symboles qu'on va désigner par  $\delta a_p$ . Attention, pour l'instant,  $\delta$  n'est pas (encore) un opérateur : le symbole  $\delta a_p$  doit être pris comme un tout : c'est une copie de l'élément  $a_p$ . L'espace vectoriel engendré par les symboles  $\delta a_p$  est simplement une copie de l'espace vectoriel  $\mathcal{A}$ . Ensuite, on fabrique des *mots*, en concaténant librement des éléments de  $\mathcal{A}$  (donc des  $a_p$ ) et des éléments du type  $\delta a_q$ . Ainsi  $a_0 \delta a_1 a_2 a_3 \delta a_4 \delta a_5 a_6$  est un mot. On décide alors d'additionner et de multiplier librement ces mots de façon à ce que la structure obtenue soit une algèbre. Jusque là, on n'obtient rien de très palpitant : juste une algèbre "libre" engendrée par des symboles. Pour finir, on va imposer des relations : celles de  $\mathcal{A}$ , tout d'abord, mais surtout, les deux suivantes (pour tout  $a, b$  dans  $\mathcal{A}$ ) :

$$\boxed{\delta ab = (\delta a)b + a(\delta b)}$$

$$\boxed{\mathbb{1}\delta a = \delta a \text{ et } \delta \mathbb{1} = 0}$$

La première relation identifie deux éléments, jusque là différents, de l'algèbre libre. L'ensemble obtenu est, par construction, une algèbre, qu'on note  $\Omega\mathcal{A}$ . La dernière chose à faire consiste à introduire l'opérateur noté  $\delta$ , défini pour tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  par  $\delta(a) = \delta a$  et  $\delta\delta a = 0$ . L'algèbre obtenue devient ainsi une algèbre différentielle.

On pourrait, bien entendu, formaliser la construction ci-dessus, en terme d'idéaux et de relations, mais, le résultat est, somme toute, très simple : on part des éléments  $a$  de  $\mathcal{A}$  et on introduit des différentielles  $\delta a$  (attention, ce ne sont pas des éléments de  $\mathcal{A}$ ) de façon à ce que la règle de Leibniz (la règle de dérivation d'un produit) soit vérifiée.

Les règles ci-dessus permettent de re-écrire n'importe quel élément de  $\Omega\mathcal{A}$  sous la forme d'une combinaison linéaire de termes du type  $a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_p$

où tous les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathcal{A}$  et où le seul élément qui n'est pas différentié ( $a_0$ ) se situe à *gauche*. En effet, par exemple

$$\begin{aligned} a_0 \delta a_1 \delta a_2 a_3 &= a_0 \delta a_1 \delta(a_2 a_3) - a_0 \delta a_1 a_2 \delta a_3 \\ &= a_0 \delta a_1 \delta(a_2 a_3) - a_0 \delta(a_1 a_2) \delta a_3 + a_0 \delta a_1 \delta a_2 \delta a_3 \end{aligned}$$

Cette remarque montre que  $\Omega\mathcal{A} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega^p \mathcal{A}$ , où  $\Omega^p \mathcal{A}$  est l'espace vectoriel engendré par les termes du type  $a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_p$ , avec  $a_i \in \mathcal{A}$ . Ainsi,  $\Omega\mathcal{A}$  est donc bien  $\mathfrak{Z}$ -graduée. Il est facile de vérifier, en utilisant les règles précédentes que, pour  $\sigma \in \Omega^p \mathcal{A}$  et  $\tau \in \Omega\mathcal{A}$

$$\boxed{\delta(\sigma\tau) = \delta(\sigma)\tau + (-1)^p \sigma\delta(\tau)}$$

Le fait que l'algèbre différentielle  $\Omega\mathcal{A}$  soit universelle vient du fait que, dans sa construction, nous n'avons rien imposé d'autre que la règle de Leibniz ainsi que les relations algébriques déjà présentes dans  $\mathcal{A}$ . Tout autre algèbre différentielle construite sur  $\mathcal{A}$  contiendra donc automatiquement des relations supplémentaires. Soit  $(\Xi, d)$  une autre algèbre différentielle, également associée à  $\mathcal{A}$ , on sait qu'il doit alors exister un morphisme  $\alpha$  de  $\Omega\mathcal{A}$  dans  $\Xi$ , ce morphisme est simplement défini sur les éléments de base, par  $\alpha(a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_p) = a_0 da_1 da_2 \dots da_p$  et étendu par linéarité sur toute l'algèbre  $\Xi$ .

### Construction explicite de $\Omega\mathcal{A}$ par produit tensoriel

La construction précédente est simple et, en principe suffisante. Cela dit, il est agréable de pouvoir considérer  $\delta a$  comme un objet construit concrètement "à partir" de  $a$  et non comme un symbole abstrait. Voici donc une seconde construction de l'algèbre des formes universelles qui répond à ce souci.

Soit  $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ , l'opérateur de multiplication  $m(a \otimes b) = ab$ .

Posons  $\Omega^0 \mathcal{A} = \mathcal{A}$  On décide de noter (prenons  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{A}$ ) :

$$\boxed{\delta b = \mathbf{1} \otimes b - b \otimes \mathbf{1}}$$

Ainsi,  $\delta b$  apparaît comme une sorte de différence discrète (nous verrons un peu plus loin comment, dans l'exemple où  $\mathcal{A}$  désigne une algèbre de fonctions sur une variété comment ceci est explicitement réalisé). Plus généralement, nous poserons :

$$\boxed{a\delta b = a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}}$$

Soit  $\Omega^1 \mathcal{A}$  l'espace vectoriel engendré par les éléments de  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  du type  $a\delta b$ . Notons que  $a\delta b$  appartient au noyau de l'opérateur de multiplication  $m(a\delta b) = ab - ab\mathbf{1} = 0$ . Plus généralement, il est évident que les éléments de

$Ker(m)$  sont des combinaisons linéaires d'éléments de ce type. En d'autres termes, on a

$$\Omega^1 \mathcal{A} = Ker(m)$$

On pose alors

$$\Omega^2 \mathcal{A} = \Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$$

et plus généralement

$$\Omega^p \mathcal{A} = \Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$$

Notons que  $\Omega^p \mathcal{A}$  est inclus dans la  $(p+1)$ -ième puissance tensorielle de  $\mathcal{A}$  (bien noter cette translation d'une unité!). Attention : le produit tensoriel est pris *au dessus de  $\mathcal{A}$*  et non pas au dessus du corps des scalaires! Cela signifie, en clair, la chose suivante : Considérons le produit de l'élément  $(a_0 \delta a_1) \in \Omega^1 \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  par l'élément  $(\delta a_2) \in \Omega^1 \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ . Ce produit, pris dans  $\Omega^1 \mathcal{A} \otimes \Omega^1 \mathcal{A}$  est l'élément

$$(a_0 \otimes a_1 - a_0 a_1 \otimes \mathbb{1}) \otimes (\mathbb{1} \otimes a_2 - a_2 \otimes \mathbb{1})$$

de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  tandis que le produit dans  $\Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}$  est un élément de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ , en l'occurrence, il s'agit de

$$\begin{aligned} a_0 \delta a_1 \delta a_2 &= (a_0 \otimes a_1 - a_0 a_1 \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes a_2 - a_2 \otimes \mathbb{1}) \\ &= a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 - a_0 a_1 \otimes \mathbb{1} \otimes a_2 - a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \mathbb{1} + a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

L'écriture explicite de  $a_0 \delta a_1 \delta a_2$  en termes de produit tensoriels contient donc un unique terme  $a_0 \otimes a_1 \otimes a_2$  et une somme alternée d'autres termes, chacun d'entre eux contenant l'unité de l'algèbre ainsi qu'un unique produit du type  $a_p a_{p+1}$ . On pourrait également partir de cette dernière écriture explicite pour définir l'algèbre  $\Omega \mathcal{A}$ . Noter que la multiplication, lorsqu'on écrit explicitement les éléments de cette algèbre en termes de produits tensoriels, s'écrit explicitement en concaténant les différents termes et en effectuant la multiplication dans  $\mathcal{A}$ .

### Formes universelles dans le cadre commutatif : le calcul différentiel non local

Soit  $M$  une variété différentiable, ou même, un ensemble absolument quelconque. On peut alors construire l'algèbre *commutative* des fonctions sur  $M$  (bien entendu, lorsque  $M$  est un espace topologique, ou une variété différentielle, on peut choisir les fonctions continues, les fonctions différentiables

etc). Notons encore  $\mathcal{A}$  cette algèbre, sans préciser davantage. La construction de  $\Omega\mathcal{A}$  reste valable, puisque nous n'avons rien eu à supposer d'autre que l'associativité de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Considérons l'élément

$$a\delta b = a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1} \in \Omega^1\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

Puisque les éléments de  $\mathcal{A}$  sont des fonctions sur  $M$  (des fonctions d'une variable  $x \in M$ ) les éléments de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  sont des fonctions de deux variables :

$$\boxed{[a\delta b](x, y) = a(x)b(y) - a(x)b(x) = a(x)(b(y) - b(x))}$$

Cette fonction, comme, il se doit, s'annule lorsqu'on pose  $x = y$ , puisque l'opérateur de multiplication  $m(a \otimes b) = ab$ , dans le cas présent, peut s'écrire sous la forme  $m(a(x)b(y)) = a(x)b(x)$ . Ainsi,  $\Omega^1\mathcal{A}$  est constitué de l'ensemble des fonctions de deux variables sur l'espace  $M$ , qui s'annulent sur la diagonale.

Remarque : lorsque  $M$  est discret, il est d'usage d'identifier, comme nous venons de le faire, l'algèbre des fonctions  $Fun(M \times M \dots \times M)$  du produit cartésien de l'espace  $M$  par lui-même avec l'algèbre produit tensoriel  $Fun(M) \otimes Fun(M) \otimes \dots Fun(M)$ . Lorsque  $M$  est un espace topologique (en particulier une variété), on n'a, en général, qu'une inclusion stricte de  $Fun(M) \otimes Fun(M) \otimes \dots Fun(M)$  dans  $Fun(M \times M \dots \times M)$ , et il faudrait tenir compte de la topologie utilisée pour pouvoir préciser davantage. Nous ne tiendrons pas compte de cette subtilité topologique dans ce qui suit.

Considérons maintenant un élément de  $\Omega^2\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned} a\delta b\delta c &= a \otimes b \otimes c - ab \otimes \mathbf{1} \otimes c - a \otimes bc \otimes \mathbf{1} + ab \otimes c \otimes \mathbf{1} \\ [a\delta b\delta c](x, y, z) &= a(x)b(y)c(z) - a(x)b(x)c(z) - a(x)b(y)c(y) + a(x)b(x)c(y) \\ &= a(x)[b(y) - b(x)][c(z) - c(y)] \end{aligned}$$

Cet élément peut donc s'interpréter comme une fonction de trois variables, qui s'annule lorsque  $x = y$  ou lorsque  $y = z$  (mais pas lorsque  $x = z$ ).

Plus généralement, les éléments de  $\Omega^p\mathcal{A}$  peuvent être considérés comme des fonctions de  $p + 1$  variables qui s'annulent lorsque deux arguments successifs sont égaux.

On voit que  $\delta b$  désigne bien ici la différence discrète  $b(y) - b(x)$ . Lorsque  $M$  est une variété différentiable, on peut faire tendre  $y$  vers  $x$  et obtenir ainsi la forme différentielle usuelle  $db(x) = \frac{\partial b}{\partial x^\mu} dx^\mu$ . La théorie générale s'applique évidemment dans ce cas particulier :  $\Omega^p C^\infty(M)$  est une algèbre différentielle universelle mais il existe par ailleurs une algèbre de formes différentielles  $(\Lambda M, d)$  que nous connaissons bien (le complexe de De Rham), il existe donc

un morphisme  $\alpha$  de la première algèbre sur la seconde. Ce morphisme envoie  $a_0\delta a_1\delta a_2\dots$  (dans le cas présent  $a_0(x)(a_1(y) - a_1(x))(a_2(z) - a_2(y))\dots$ ) sur la forme différentielle  $a_0da_1 \wedge da_2\dots$

Notons que le noyau de ce morphisme est très gros. D'une part, on sait que lorsque  $p > \dim(M)$ ,  $\Lambda^p M = 0$ , alors que  $\Omega^p C^\infty(M)$  n'est jamais nul (quel que soit  $p$ ). Par ailleurs, même si  $p \leq \dim(M)$  il est facile de trouver des éléments de  $\Omega C^\infty(M)$  qui s'envoient sur zéro : par exemple, l'élément  $a\delta(bc) - ab\delta c - ca\delta b$  n'est certainement pas nul dans  $\Omega^1 C^\infty(M)$ , alors que  $a d(bc) - ab dc - cadb$  est nul dans  $\Lambda^1 M$ .

### L'exemple de $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}$

L'exemple qui nous venons de considérer montre bien que cette algèbre différentielle de De Rham, dont nous avons l'habitude, est loin d'être la seule possible, même dans le cadre commutatif, lorsqu'on veut définir un calcul différentiel. L'inconvénient de l'algèbre des formes universelles, c'est qu'elle est généralement très (trop) "grosse" et peu maniable. Cependant, il est des cas, même commutatifs, où l'algèbre de De Rham n'est pas utilisable — par exemple lorsque  $M$  n'est pas différentiable — et il est bien pratique de pouvoir faire appel à la dernière construction. Un autre cas intéressant est celui d'une variété  $M$  qui n'est pas connexe : on peut alors, bien sûr, faire du calcul différentiel "à la De Rham" sur chaque composante connexe, mais, ce faisant, on perd de l'information, car les formes universelles non nulles du type  $a\delta b[x, y]$  où  $x$  et  $y$  appartiennent à deux composantes connexes distinctes n'ont aucune correspondance dans l'algèbre de De Rham. Pour illustrer ce phénomène, qui se trouve posséder une interprétation physique aussi bien inattendue que capitale, nous allons choisir l'exemple d'un espace non connexe extrêmement simple : celui fourni par la donnée de deux points. Dans ce cas, les 1-formes usuelles (celles de De Rham) n'existent pas. Par contre, on va pouvoir construire et utiliser l'algèbre des formes universelles  $\Omega = \Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$ .

Considérons donc un ensemble discret  $\{L, R\}$  constitué de deux éléments que nous désignons par les lettres  $L$  et  $R$  (penser à *Left* et *Right*). Soit  $x$  la fonction coordonnée  $x(L) = 1, x(R) = 0$  et  $y$  la fonction coordonnée  $y(L) = 0, y(R) = 1$ . Remarque :  $xy = yx = 0, x^2 = x, y^2 = y$  and  $x + y = \mathbb{1}$  où  $\mathbb{1}$  est la fonction unité  $\mathbb{1}(L) = 1, \mathbb{1}(R) = 1$ . Un élément quelconque de cette algèbre associative (et commutative)  $\mathcal{A}$  engendrée par  $x$  et  $y$  peut s'écrire  $\lambda x + \mu y$  (où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux nombres complexes) et peut être représenté par une matrice diagonale  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ . On peut écrire  $\mathcal{A} = \mathfrak{C}x \oplus \mathfrak{C}y$ . L'algèbre est donc isomorphe à  $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}$ . Nous introduisons maintenant deux symboles  $\delta x, \delta y$ ,

ainsi qu'une différentielle  $\delta$  qui satisfait à  $\delta^2 = 0$ , qui doit satisfaire à  $\delta \mathbb{1} = 0$  et à la règle habituelle de dérivation d'un produit (règle de Leibniz). Il est évident que  $\Omega^1$ , l'espace des différentielles de degré 1 est engendré par les deux quantités indépendantes  $x\delta x$  and  $y\delta y$ . En effet, la relation  $x + y = \mathbb{1}$  implique  $\delta x + \delta y = 0$ ; de plus, les relations  $x^2 = x$  and  $y^2 = y$  impliquent  $(\delta x)x + x(\delta x) = (\delta x)$ , donc  $(\delta x)x = (\mathbb{1} - x)\delta x$  and  $(\delta y)y = (\mathbb{1} - y)\delta y$ . Ceci implique également, par exemple,  $\delta x = \mathbb{1}\delta x = x\delta x + y\delta x$ ,  $x\delta x = -x\delta y$ ,  $y\delta x = (\mathbb{1} - x)\delta x$ ,  $(\delta x)x = y\delta x = -y\delta y$  etc. Plus généralement, désignons par  $\Omega^p$ , l'espace des différentielles de degré  $p$ ; les relations ci-dessus montrent qu'une base de cet espace vectoriel est fourni par les éléments  $\{x\delta x\delta x \dots \delta x, y\delta y\delta y \dots \delta y\}$ . Posons  $\Omega^0 = \mathcal{A}$  et  $\Omega = \bigoplus_p \Omega^p$ . L'espace  $\Omega$  est une algèbre : on peut multiplier les formes librement, mais il faut tenir compte de la règle de Leibniz, par exemple  $x(\delta x)x(\delta x) = x(\mathbb{1} - x)(\delta x)^2$ . Attention : l'algèbre  $\Omega$  est de dimension infinie, comme il se doit puisque  $p$  parcourt toutes les valeurs de 0 à l'infini. Bien entendu, la différentielle  $\delta$  obéit à la règle de Leibniz lorsqu'elle agit sur les éléments de  $\mathcal{A}$  mais elle obéit à la règle de Leibniz graduée lorsqu'elle agit sur les éléments de  $\Omega$ , en l'occurrence  $\delta(\omega_1\omega_2) = \delta(\omega_1)\omega_2 + (-1)^{\partial\omega_1}\omega_1\delta(\omega_2)$  où  $\partial\omega_1$  désigne 0 ou 1 suivant que  $\omega_1$  est pair ou impair.

Dans le cas particulier de la géométrie d'un ensemble à deux points,  $\{L, R\}$  nous retrouvons le fait qu'un élément  $A$  de  $\Omega^1$  considéré comme fonction de deux variables doit obéir aux contraintes  $A(L, L) = A(R, R) = 0$  et peut donc être écrit comme une matrice  $2 \times 2$  indexée par  $L$  et  $R$  dont les éléments non diagonaux sont nuls ("matrice hors diagonale"). Un élément  $F$  de  $\Omega^2$  peut être considéré comme fonction de trois variables obéissant aux contraintes  $F(L, L, R) = F(R, R, L) = F(L, R, R) = F(R, L, L) = F(R, R, R) = F(L, L, L) = 0$ . Les deux seules composantes non nulles sont donc  $F(L, R, L)$  and  $F(R, L, R)$ . Le fait que  $\dim(\Omega^p) = 2$  pour tout  $p$  suggère la possibilité d'utiliser des matrices de taille fixe (en l'occurrence des matrices  $2 \times 2$ ) pour toutes valeurs de  $p$ . Ceci ne serait pas le cas pour une géométrie à plus de deux points. En effet, on peut aisément généraliser la construction précédente, par exemple en partant de trois points au lieu de deux. Mais dans ce cas,  $\Omega^1$  est de dimension 6 et  $\Omega^2$  de dimension 12. Avec  $q$  points, la dimension de  $\Omega^p$  est  $q(q-1)^p$ . Ce dernier résultat vient du fait que  $\dim(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) - \dim(\text{Ker}(m)) = \dim(\mathcal{A})$ . On a donc  $\dim(\Omega^1) = q^2 - q$ .

Pour revenir au cas de la géométrie à deux points, nous voyons qu'il est possible de représenter  $\lambda x(\delta x)^{2p} + \mu y(\delta y)^{2p}$  comme une matrice diagonale  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  et l'élément  $\alpha x(\delta x)^{2p+1} + \beta y(\delta y)^{2p+1}$  comme la matrice "hors" diagonale  $\begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ i\beta & 0 \end{pmatrix}$ . Autrement dit nous pouvons représenter les formes paires par

des matrices paires (i.e. diagonales) et les formes impaires par des matrices impaires (i.e. “hors” diagonales); ceci est non seulement naturel mais obligatoire si on veut que la multiplication des matrices soit compatible avec la multiplication dans  $\Omega$ . En effet, les relations

$$\begin{aligned} x(\delta x)^{2p}x &= x(\delta x)^{2p} \\ x(\delta x)^{2p}y &= 0 \\ x(\delta x)^{2p+1}x &= 0 \\ x(\delta x)^{2p+1}y &= x(\delta x)^{2p+1} \end{aligned}$$

montrent que cette représentation utilisant des matrices  $2 \times 2$  est effectivement un homomorphisme d’algèbres  $\mathfrak{Z}_2$ -graduées, de  $\Omega$  (gradué par la parité de  $p$ ) dans l’algèbre des matrices complexes  $2 \times 2$  (avec graduation  $\mathfrak{Z}_2$ - associée avec la décomposition d’une matrice en une partie diagonale et hors diagonale). La présence du facteur  $i$  dans les matrices hors diagonales représentant les éléments impairs est nécessaire pour que les deux types de produits soient compatibles. L’algèbre  $\Omega$  s’obtient en effectuant la *somme directe* des espaces vectoriels  $\Omega^p$ . Comme on l’a dit, l’algèbre  $\Omega$  est donc de dimension infinie mais si nous représentons toute l’algèbre  $\Omega$  à l’aide de matrices  $2 \times 2$  agissant sur un espace vectoriel fixé de dimension 2, la  $p$ - graduation est perdue et seule la graduation  $\mathfrak{Z}_2$  est conservée.

Nous verrons un peu plus loin qu’il est possible, en géométrie non commutative, de donner un sens à la notion de connexion. Dans le cas le plus simple, la forme de connexion  $A$  n’est autre qu’une forme de degré 1 appartenant à une algèbre différentielle  $(\Xi, \delta)$  associée à l’algèbre associative  $\mathcal{A}$  choisie. On verra que la courbure  $F$ , dans ce cas, peut également s’écrire comme  $F = \delta A + A^2$ .

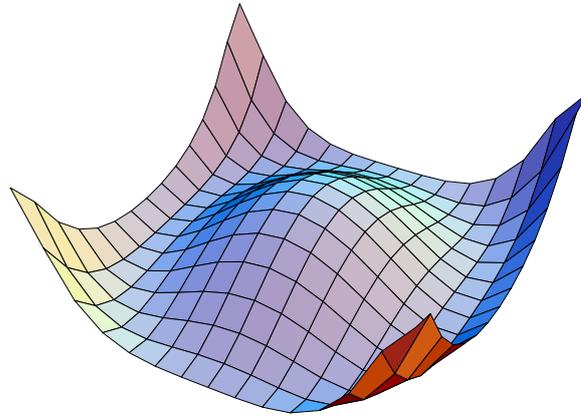
Dans le cas présent,  $\Xi = \Omega$ . Une forme de degré 1 est un élément de  $\Omega^1$ . Prenons  $A = (\varphi x\delta x + \bar{\varphi} y\delta y)$ . La représentation matricielle de  $A$  se lit donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i\varphi \\ i\bar{\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

La courbure correspondante est alors  $F = \delta A + A^2$ , mais  $A^2 = -\varphi\bar{\varphi}x^2\delta x\delta x - \bar{\varphi}\varphi y^2\delta y\delta y = -\varphi\bar{\varphi}x\delta x\delta x - \bar{\varphi}\varphi y\delta y\delta y$  et  $\delta A = \varphi\delta x\delta x + \bar{\varphi}\delta y\delta y = (\bar{\varphi} + \varphi)(x\delta x\delta x + y\delta y\delta y)$ .  $F$  peut donc s’écrire aussi

$$F = (\varphi + \bar{\varphi} - \varphi\bar{\varphi})(x\delta x\delta x + y\delta y\delta y) = \begin{pmatrix} \varphi + \bar{\varphi} - \varphi\bar{\varphi} & 0 \\ 0 & \varphi + \bar{\varphi} - \varphi\bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons choisir un produit hermitien sur  $\Omega$  en décidant que la base  $x(\delta x)^p, y(\delta y)^q$  est orthonormale. Alors  $|F|^2 = \bar{F}F = (\varphi + \bar{\varphi} - \varphi\bar{\varphi})^2$ . Le

FIGURE 6.1 – Potentiel de Higgs  $V[Re(\varphi), Im(\varphi)]$ 

lecteur familier des théories de jauge avec brisure de symétrie reconnaîtra ici un potentiel de Higgs translaté  $V[\phi] = |F|^2$ . (voir figure 6.1).

Notre calcul différentiel, dans le cas présent, est commutatif, puisque l’algèbre des fonctions sur un espace à deux points est simplement l’algèbre des matrices diagonales  $2 \times 2$  avec des coefficients complexes (ou réels) mais notre calcul différentiel est, en un sens, “non local” puisque la “distance” entre les deux points étiquetés par  $L$  et  $R$  ne peut pas tendre vers zéro... Le lecteur aura sans doute remarqué que ces résultats peuvent s’interpréter en termes de champs de Higgs. Nous y reviendrons (exemple poursuivi en 6.2.4).

### 6.2.3 L’algèbre différentielle $\Omega_{Der\mathcal{A}}$

#### Rappel sur les dérivations d’algèbre

Rappelons (relire 1.10.1) que

- $Der(\mathcal{A})$  est une algèbre de Lie
- $Der(\mathcal{A})$  n’est pas un module sur  $\mathcal{A}$
- $Der(\mathcal{A})$  est un module sur le centre de  $\mathcal{A}$
- $Int(\mathcal{A}) = \{ad_a/a \in \mathcal{A}\}$  avec  $ad_a(b) = [a, b]$  qu’on appelle *ensemble des dérivations intérieures* est un idéal d’algèbre de Lie de  $Der\mathcal{A}$  (en effet soit  $X_a = ad_a \in Int\mathcal{A}$  et  $Y \in Der\mathcal{A}$ , alors  $[Y, X_a] = ad_{Y(a)} \in \mathcal{A}$ ).
- On note  $Out\mathcal{A} = Der\mathcal{A}/Int\mathcal{A}$

### Formes différentielles

Classiquement, une forme différentielle  $\omega$  est une  $n$ -forme sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, antisymétrique, linéaire par rapport aux scalaires, bien sûr, mais aussi linéaire par rapport aux fonctions, et à valeur dans les fonctions.

On va définir ici les formes différentielles comme des objets qui soient des  $n$ -formes sur l'algèbre de Lie des dérivations de  $\mathcal{A}$ , antisymétrique, linéaire par rapport au scalaires, bien sûr, mais aussi linéaire par rapport au centre  $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  et à valeurs dans l'algèbre  $\mathcal{A}$ .

En d'autres termes, on pose

$$\underline{\Omega}_{Der}^n(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}^n(Der \mathcal{A}, \mathcal{A}) \text{ avec } \underline{\Omega}_{Der}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

Cette définition est due à [6]

C'est une algèbre différentielle graduée avec un produit défini par

$$(\alpha\beta)(v_1, v_2, \dots, v_{m+n}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{m+n}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{m!n!} \alpha(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \dots, v_{\sigma_m}) \beta(v_{\sigma_{m+1}}, v_{\sigma_{m+2}}, \dots, v_{\sigma_{m+n}})$$

où  $\alpha \in \underline{\Omega}_{Der}^m(\mathcal{A})$  et  $\beta \in \underline{\Omega}_{Der}^n(\mathcal{A})$ , et où  $d$  est une différentielle définie comme suit : la forme différentielle  $d\omega$  peut se définir directement par son action sur tout  $(k+1)$ -uplet  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  de dérivations, en posant

$$\begin{aligned} d\omega(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} v_i \left[ \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{k+1}) \right] \\ &\quad + \sum_{i \leq j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega \left( [v_i, v_j], v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1} \right) \end{aligned}$$

où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  désigne l'omission de l'argument correspondant.

En particulier, pour une 1-forme  $da$  (agissant sur la dérivation  $v$ ) on a simplement

$$\boxed{da(v) = v(a)}$$

On peut immédiatement vérifier que  $d$  est alors une dérivation graduée de degré 1 sur l'algèbre  $\underline{\Omega}_{Der}(\mathcal{A})$  et que  $d^2 = 0$ .

Les définitions qui précèdent sont tout à fait naturelles puisque ce sont exactement les mêmes que pour les différentielles habituelles (rappelons encore une fois que, dans le cas usuel de la géométrie "commutative", les dérivations d'algèbres  $v_k$  de l'algèbre  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  ne sont autres que les champs de vecteurs).

**Distinction entre  $\underline{\Omega}_{Der}$  et  $\Omega_{Der}$** 

En utilisant la règle de Leibniz, on voit qu'un produit quelconque d'éléments de  $\mathcal{A}$  et de différentielles (du type  $da$ ) peut se réordonner sous la forme d'une somme de termes du type  $a_0 da_1 \dots da_n$ . Cela dit, il y a une petite subtilité : avec la définition que nous avons adoptée, il n'est pas clair que tout élément de  $\underline{\Omega}_{Der} \mathcal{A}$  puisse s'écrire comme une somme *finie* d'éléments de ce type. Ceci conduit à introduire la définition suivante : on pose  $\Omega_{Der} \mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_{Der}^n \mathcal{A}$  où  $\Omega_{Der}^n \mathcal{A}$  est le sous-espace vectoriel de  $\underline{\Omega}_{Der} \mathcal{A}$  constitué des sommes finies du type  $a_0 da_1 \dots da_n$ . On démontre alors [6] que  $\Omega_{Der} \mathcal{A}$  est la plus petite sous algèbre différentielle graduée de  $\underline{\Omega}_{Der} \mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{A}$ .

En général, on peut oublier cette distinction entre  $\underline{\Omega}_{Der}$  et  $\Omega_{Der}$ . Dans le cas de la géométrie des variétés (variétés connexes ou réunion dénombrables de variétés connexes), on peut démontrer que les deux notions coïncident lorsque la variété  $M$  est paracompacte. Cela qui revient à dire que la variété admet une base topologique dénombrable... (et dans ce cas elle admet également un atlas comprenant au plus une infinité dénombrable de cartes). Pour des variétés paracompactes, donc (hypothèse qu'on fait presque toujours!), les deux notions coïncident et coïncident évidemment avec l'algèbre des formes différentielles usuelles (ceci découlant immédiatement de l'identité entre les définitions ci-dessus et celles qu'on peut trouver en 1.6.2). Lorsque l'algèbre  $\mathcal{A}$  n'est pas commutative, on aura également les deux possibilités :  $\underline{\Omega}_{Der} \mathcal{A}$  et  $\Omega_{Der} \mathcal{A}$  qui peuvent coïncider ou non. Le cas le moins "sauvage" est évidemment celui où les deux notions coïncident (analogue non commutatif du cas paracompact). Dans la suite de cette section, on supposera que c'est le cas.

**Exemples**

- Cas des variétés. On sait déjà que  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ , que  $Der \mathcal{A} = \Gamma TM$  (champs de vecteurs) et que  $\Omega_{Der} \mathcal{A} = \Lambda M = \Gamma T^* M$  (formes différentielles usuelles).
- Cas des matrices.  $\mathcal{A} = M(n, \mathfrak{C})$ . Il est bien connu que toutes les dérivations de cette algèbre sont intérieures, c'est à dire qu'elles sont obtenues en calculant des commutateurs avec une matrice donnée. Cela dit, prendre un commutateur avec une matrice  $X$  ou prendre un commutateur avec une matrice  $X + k\mathbb{1}$  donne le même résultat. On peut donc décider de normaliser en fixant la trace de  $X$  à zéro. L'ensemble des matrices  $n \times n$  de trace nulle coïncide, on le sait (cf chapitre 2) avec l'algèbre de Lie de  $SL(n, \mathfrak{C})$ . On voit que  $Der \mathcal{A} = Lie(SL(n, \mathfrak{C}))$ . Les éléments de  $\Omega_{Der}^n \mathcal{A}$  sont donc les  $n$  formes (anti-symétriques) sur  $Lie(SL(n, \mathfrak{C}))$  à valeurs dans l'algèbre  $\mathcal{A}$  elle-même,

c'est à dire dans  $M(n, \mathfrak{C})$ . On peut finalement écrire

$$\Omega_{Der}M(n, \mathfrak{C}) = M(n, \mathfrak{C}) \otimes \wedge(Lie(SL(n, \mathfrak{C})))^*$$

- Cas des matrices à éléments fonctions sur une variété. On prend  $\mathcal{A} = M(n, \mathfrak{C}) \otimes C^\infty(M)$ . Nous ne détaillerons pas cet exemple (voir [6]). Le résultat est assez intuitif et s'obtient à partir des deux cas précédents :  $Der\mathcal{A} = Der(C^\infty(M)) \otimes \mathbb{1} \oplus C^\infty(M) \otimes Der(M(n, \mathfrak{C}))$  et  $\Omega_{Der}(M(n, \mathfrak{C}) \otimes C^\infty(M)) = \Lambda(M) \otimes \Omega_{Der}M(n, \mathfrak{C})$ . Cet exemple a été utilisé pour la construction de certains modèles physiques généralisant les théories de jauges usuelles (voir [10])

Remarque : il existe des algèbres très simples qui n'admettent pas de dérivations... par exemple l'algèbre des nombres complexes! Dans ce cas, la construction qu'on vient d'exposer ne donne rien (bien que l'algèbre des formes universelles soit néanmoins non triviale).

#### 6.2.4 Algèbres différentielles pour espaces non connexes

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux algèbres associatives (commutatives ou non). Il est certain que l'algèbre des formes universelles pour l'algèbre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  n'est pas isomorphe au produit tensoriel gradué des algèbres universelles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  séparément.

$$\Omega(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \neq \Omega\mathcal{A} \otimes \Omega\mathcal{B}$$

En effet, par exemple,  $\Omega^1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  alors que

$$(\Omega\mathcal{A} \otimes \Omega\mathcal{B})^1 = \Omega^0\mathcal{A} \otimes \Omega^1\mathcal{B} \oplus \Omega^1\mathcal{A} \otimes \Omega^0\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \oplus \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Cependant,  $\Omega(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  et  $\Omega\mathcal{A} \otimes \Omega\mathcal{B}$  sont toutes deux des algèbres différentielles  $\mathfrak{Z}$ -graduées dont le terme de degré zéro coïncide avec  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . La première étant universelle, il existe donc un morphisme surjectif de la première sur la seconde.

Supposons maintenant que qu'on s'intéresse à une variété non connexe obtenue comme réunion (disjointe) de plusieurs copies (deux pour simplifier) d'une même variété connexe  $M$ . On se retrouve donc dans la situation précédente avec  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  et  $\mathcal{B} = \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}$ . En effet  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)$ . L'algèbre différentielle  $\Omega(C^\infty(M)) \otimes \Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$  est encore peu commode à utiliser (on se souvient que les éléments de  $\Omega(C^\infty(M))$  sont des fonctions de plusieurs variables qui s'annulent lorsque deux arguments successifs sont égaux). Par contre, rien ne nous interdit de remplacer cette dernière par l'algèbres des formes différentielles usuelles  $\Lambda M$ . On obtient ainsi le diagramme suivant, où chaque flèche désigne un morphisme surjectif d'algèbres

différentielles graduées :

$$\Omega(C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)) \mapsto \Omega(C^\infty(M)) \otimes \Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}) \mapsto \Lambda M \otimes \Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$$

L'algèbre

$$\Xi = \Lambda M \otimes \Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$$

produit tensoriel gradué du complexe de De Rham usuel par l'algèbre des formes universelles sur l'espace à deux points  $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}$ , constitue une algèbre différentielle intéressante à plus d'un titre et très facile à utiliser. Elle a été étudiée dans [12] et utilisée auparavant dans [11]. Sa structure s'obtient immédiatement à partir de notre étude de  $\Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$ . On se souvient que  $\Omega^p(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$  est toujours de dimension 2 et représentable, soit à l'aide de matrices  $2 \times 2$  diagonales (lorsque  $p$  est pair) soit à l'aide de matrices  $2 \times 2$  hors diagonales (lorsque  $p$  est impair). Les éléments de

$$\Xi^n = \sum_{p=0}^n \Lambda^p M \otimes \Omega^{n-p}(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$$

peuvent donc s'écrire à l'aide de matrices  $2 \times 2$  dont les éléments sont des formes différentielles usuelles sur la variété  $M$  (de degré  $p$  variant de 0 à  $n$ ) et positionnées soit sur la diagonale (quand  $p$  est pair) soit en dehors de la diagonale (lorsque  $p$  est impair). Le produit dans  $\Xi$  s'obtient immédiatement à partir du produit extérieur dans  $\Lambda M$  et du produit déjà étudié dans  $\Omega(\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C})$ .

$$(\rho \otimes \alpha)(\sigma \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha||\sigma|}(\rho \wedge \sigma) \otimes (\alpha\beta)$$

On peut finalement encore généraliser la construction précédente en remplaçant l'algèbre des formes différentielles sur la variété  $M$  par l'algèbre des formes différentielles sur  $M$  à valeurs dans l'algèbre (associative) des matrices  $n \times n$  complexes.

On pourrait ici continuer notre exemple des connexions sur  $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{C}$ , en choisissant cette fois-ci pour forme de connexion un élément quelconque de  $\Xi^1$ . La norme carré de la courbure s'interprète alors physiquement comme le lagrangien d'un modèle de jauge  $U(1) \times U(1)$ , avec potentiel de Higgs et symétrie brisée. Un des deux champs de jauge devient massif (le boson  $Z_0$ ) et l'autre reste sans masse (le photon).

### 6.2.5 L'algèbre différentielle $\Omega_D \mathcal{A}$

La construction qui suit est un peu plus élaborée que les précédentes, en ce sens qu'elle utilise un plus grand nombre d'ingrédients. On a vu que la construction de l'algèbre des formes différentielle universelle  $\Omega(\mathcal{A})$  était

possible, pour une algèbre associative quelconque  $\mathcal{A}$ . L'algèbre différentielle  $\Omega_{Der}(\mathcal{A})$ , quant à elle, fait jouer un rôle particulier aux dérivations de  $\mathcal{A}$  (pour autant qu'elles existent). L'algèbre différentielle que nous allons présenter maintenant, et dont la construction est due à A. Connes, repose sur la donnée d'un "triplet spectral", donnée qui englobe, non seulement l'algèbre associative  $\mathcal{A}$  elle-même, mais également d'autres données qui peuvent être considérées comme le codage d'une structure riemannienne non commutative. Certains rappels et/ou constructions annexes sont nécessaires.

Dans l'approche traditionnelle de la géométrie différentielle, on commence par se donner un espace  $M$  (on peut alors parler de l'algèbre des fonctions sur  $M$ ), on le munit tout d'abord d'une topologie (on peut alors parler de l'algèbre  $C^0(M)$  des fonctions continues sur  $M$ ), puis d'une structure différentiable (ce qui revient à choisir une sous-algèbre particulière  $C^\infty(M)$  incluse dans  $C^0(M)$ ), puis d'une structure riemannienne (choix d'une métrique), puis d'une structure spinorielle (si la variété le permet), on construit alors le fibré des spineurs, puis l'opérateur de Dirac relatif à la métrique choisie et agissant sur les champs de spineurs (sections du fibré des spineurs). Dans le cas d'une variété compacte et d'une métrique proprement riemannienne, on peut alors fabriquer un produit scalaire global et un espace de spineurs (l'espace  $L^2$  des champs de spineurs de carré intégrable). Dans le cas où la variété est de dimension paire, on peut également décomposer cet espace de Hilbert en deux sous-espaces supplémentaires correspondant à des demi-spineurs de chiralités opposées, l'opérateur de Dirac allant d'un sous-espace à l'autre (on rappelle que cet opérateur anti-commute avec l'opérateur de chiralité).

Tout ceci est maintenant bien connu du lecteur (voir chapitres précédents). L'approche "à la A. Connes" [3] de la géométrie non commutative consiste à "renverser la vapeur" en écrivant tout ceci à l'envers, et sous forme algébrique (en utilisant des algèbres commutatives), puis de promouvoir l'essentiel de ces transcriptions au rang de définitions, en effaçant l'adjectif "commutatif".

La théorie se divise alors en deux : il existe un cas dit "pair" et un cas dit "impair". Nous allons simplement ébaucher la discussion du cas pair, cas qui généralise au cas non commutatif la géométrie associée à la donnée d'un opérateur de Dirac sur une variété de dimension paire. On se donne un triplet  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  possédant les propriétés suivantes :  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}_2$  gradué (l'opérateur de graduation est alors appelé opérateur de chiralité),  $\mathcal{A}$  est une algèbre associative munie d'une involution  $(*)$  et représentée fidèlement dans  $\mathcal{H}$  à l'aide d'opérateurs bornés pairs, et  $D$  est un opérateur auto-adjoint tel que les commutateurs  $[D, a], a \in \mathcal{A}$  soient bornés ; on impose également à la résolvante  $(D + i)^{-1}$  d'être un opérateur compact.

Un tel triplet est appelé *triplet spectral* mais on pourrait peut-être, de

façon plus imagée, le désigner sous le nom d'*espace riemannien quantique*. Dans le cas de la géométrie commutative,  $\mathcal{A}$  coïnciderait avec la complexifiée de l'algèbre  $C^\infty(M)$ ,  $\mathcal{H}$  avec l'espace de Hilbert  $L^2(\mathcal{S})$  des champs de spineurs de carré intégrable, et  $D$  avec l'opérateur de Dirac lui-même.

Dans le cas classique (commutatif), si on n'impose pas de propriété de compacité pour la résolvante de  $D$ , l'algèbre  $\mathcal{A}$  (qui est telle que les commutateurs de ses éléments avec  $D$  soient bornés) n'est autre que l'algèbre des fonctions Lipschitziennes sur  $M$ , c'est à dire celle dont les éléments sont tels que  $|f(x) - f(y)| \leq c d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M$ .

Dans ce cadre commutatif, il se trouve qu'il est en fait possible de retrouver la distance riemannienne  $d(x, y)$  entre deux points quelconques  $x$  et  $y$  de  $M$  à partir de ces données. En effet, on montre que

$$d(x, y) = \text{Sup}\{|f(x) - f(y)|, f \in \mathcal{A}, |[D, f]| \leq 1\}$$

Le concept de distance, qu'on relie d'habitude à un procédé de minimisation entre différents points est alors obtenu grâce à un procédé de maximisation pour les fonctions définies sur ces points.

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour construire l'algèbre différentielle  $\Omega_D(\mathcal{A})$ . Nous savons déjà construire l'algèbre des formes universelles  $\Omega(\mathcal{A})$ . Soit  $\omega = a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_n$ , une  $n$ -forme universelle (un élément de  $\Omega^n(\mathcal{A})$ ). Nous lui associons l'opérateur borné

$$\pi[\omega] = a_0 [D, a_1] [D, a_2] \dots [D, a_n]$$

Il est facile de vérifier que cette application est une représentation de l'algèbre  $\Omega(\mathcal{A})$  dans l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  (on se souvient que  $\mathcal{A}$  est, par hypothèse, représenté dans  $\mathcal{H}$ ). Ceci vient du fait que la dérivation d'algèbre  $d$  est représentée par l'opération  $[D, \cdot]$  qui est elle-même une dérivation. La première est de carré nul, mais ce n'est malheureusement pas le cas de la seconde. En d'autres termes, la représentation  $\pi$  n'est pas une représentation d'algèbre *différentielle*. Il est cependant facile de remédier à cela. Soit  $K$  le noyau de  $\pi$ ; c'est un idéal de  $\Omega(\mathcal{A})$ , puisque  $\pi$  est une représentation d'algèbre. Mais  $K$  n'est pas en général un idéal différentiel :  $\delta K$  n'est pas dans  $K$ . On pose alors  $J = K \oplus \delta K$ . Par construction  $J$  est alors un idéal différentiel. On pose alors

$$\Omega_D(\mathcal{A}) = \Omega(\mathcal{A})/J$$

Par construction, l'algèbre obtenue  $\Omega_D(\mathcal{A})$  est bien une algèbre différentielle. On peut finalement la regraduer en considérant les intersections de  $\text{Ker}(\pi)$  avec l'algèbre universelle. La construction est donc achevée et on démontre

que, dans le cas classique (où  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ ), l'algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée  $\Omega_D(\mathcal{A})$  obtenue est isomorphe au complexe de De Rham  $\Lambda(M)$ , c'est à dire à l'algèbre des formes différentielles usuelles.

Nous n'irons pas plus avant dans cette direction. Le lecteur intéressé pourra consulter une littérature plus spécialisée. Cela dit, il est peut-être important de signaler ici que les constructions mathématiques présentées dans cette section — et même dans le présent chapitre — sont souvent récentes, ce qui signifie que les définitions et constructions proposées n'ont peut être pas encore suffisamment bénéficié du mûrissement nécessaire. Cela ne signifie pas qu'elles sont erronées mais elles n'ont peut être pas atteint le même degré de stabilité temporelle que les autres concepts présentés auparavant dans cet ouvrage.

## 6.3 Excursion au pays des mathématiques non commutatives

### 6.3.1 Remarques et présentation générale

En vertu de la dualité existant entre un espace  $M$  et l'algèbre commutative  $C(M)$  des fonctions sur cet espace (la correspondance précise a été donnée plus haut), on peut essayer de re-écrire toutes les mathématiques traitant des propriétés des “espaces” dans le langage purement algébrique de la théorie des algèbres commutatives. On peut essayer, également, de re-exprimer tous ces concepts d'une façon qui ne fasse pas explicitement appel à la commutativité de l'algèbre. Bien entendu, ce n'est pas toujours possible, mais, lorsque c'est le cas, on peut alors effacer l'adjectif “commutatif” et promouvoir le concept en question au niveau (par exemple) d'une définition, valable pour les algèbres non commutatives, en général. D'une certaine façon, on pourrait voir les *mathématiques non commutatives* simplement comme une étude des algèbres associatives non commutatives. Un tel point de vue ne correspondrait cependant pas à la démarche psychologique adoptée : c'est en effet la géométrie ordinaire — plus précisément la notion de point — qui est souvent choisie comme support de notre intuition ; les thèmes qui intéressent la *géométrie non commutative* sont précisément les propriétés des algèbres non commutatives qui généralisent les propriétés des espaces “ordinaires”, même si les points n'existent plus. De cette façon, on peut alors construire une théorie de la mesure non commutative, une topologie non commutative, un calcul différentiel pour les algèbres non commutatives (voir *supra*), une théorie des connexions, des espaces fibrés (non commutatifs) et même une généralisation de la théorie des groupes (la théorie des *groupes quantiques*).

Notre propos n'est pas ici de détailler et d'étudier toutes ces théories, mais simplement d'illustrer les considérations qui précèdent et d'effectuer un tour rapide de ce zoo non commutatif, en espérant que le lecteur aura plaisir à y retourner en consultant la littérature spécialisée. L'ouvrage présent étant essentiellement dédié à l'étude de certains aspects de la géométrie différentielle, nous avons décidé de consacrer néanmoins la section précédente à une étude un peu plus détaillée des notions relatives aux calculs différentiels non commutatifs. Pour le reste, notre étude ne sera guère plus qu'une ébauche.

### 6.3.2 Topologie non commutative et théorie de la mesure non commutative

Nous avons déjà parlé de la transformation de Gelfand établissant une correspondance entre espaces topologiques compacts et  $C^*$ -algèbres commutatives uniales (l'existence d'une unité est liée à l'hypothèse de compacité). On voit donc, en enlevant l'adjectif "commutatif" que la topologie non commutative n'est autre que l'étude des  $C^*$ -algèbres non commutatives.

Passons à la théorie de la mesure. Classiquement, au lieu de démarrer avec un espace topologique  $M$ , on peut partir de l'algèbre  $C(M)$  des fonctions continues sur  $M$  et définir les mesures (positives) comme les formes linéaires continues (positives) sur l'algèbre  $C(M)$ , c'est à dire comme des fonctionnelles  $\mu$  telles que  $\mu[\overline{f}f] \geq 0, \forall f \in C(M)$ . La correspondance avec la notion élémentaire de mesure se fait grâce au théorème de Riesz, c'est à dire en écrivant  $\mu[f] = \int_X f d\mu$ . A partir de  $C(M)$ , nous définissons les mesures ; pour une mesure  $\mu$  donnée, nous pouvons fabriquer l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(M, \mu)$  des fonctions de carré intégrable pour cette mesure.  $C(M)$  agit dans cet espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  par multiplication : nous avons une représentation  $\pi$  définie par  $\pi(f)g = fg$ , avec  $f \in C(M)$  et  $g \in \mathcal{H}$ . A partir de  $\mathcal{H}$ , nous pouvons fabriquer l'algèbre  $L^\infty(M, \mu)$  des fonctions mesurables essentiellement bornées sur  $M$ . Soit  $\mathcal{L}(H)$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ . Rappelons que l'algèbre  $L^\infty(M, \mu)$  peut être construite comme le commutant de l'action  $\pi$  de  $C(M)$  dans  $\mathcal{L}(H)$ .

$$L^\infty(M, \mu) = \{T \in \mathcal{L}(H) \text{ t.q. } T\pi(f) = \pi(f)T, \forall f \in C(M)\}$$

La mesure  $\mu$  peut alors être étendue à l'algèbre  $L^\infty(M, \mu)$  tout entière. Cette dernière algèbre possède la propriété remarquable d'être égale à son propre commutant dans  $\mathcal{L}(H)$  (cette propriété caractérise précisément un type de sous-algèbres de  $\mathcal{L}(H)$  qu'on appelle *algèbres de Von Neumann*).

Tout ce qu'on vient de rappeler figure — peut être dans un ordre différent — dans un cours standard de théorie de la mesure. Le trait essentiel, dans la

présentation qui précède est de ne pas faire intervenir les points de l'espace  $M$ . En recopiant tout ceci, mais en effaçant l'adjectif "commutatif", on peut alors *inventer* une version non commutative de la théorie de la mesure. . . Soit dit en passant, les physiciens théoriciens ont inventé la plupart de ces différents concepts, dans le cadre de la mécanique statistique quantique, bien avant qu'ils aient été formalisés par des mathématiciens! Reprenons donc rapidement ce qui précède, en partant d'une  $C^*$ -algèbre non commutative  $\mathcal{A}$ , remplaçant la donnée de  $C(M)$ . On définit les *états* (ce sont précisément des mesures non commutatives) comme ci-dessus : un état  $\mu$  est une forme linéaire positive continue sur  $\mathcal{A}$ , c'est à dire  $\mu \in \mathcal{A}^*$  et  $\mu[ff] \geq 0, \forall f \in \mathcal{A}$ . On peut supposer  $\mu$  normé :  $\mu[\mathbb{1}] = 1$ . On construit alors un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  en définissant tout d'abord le produit scalaire  $(f, g) = \mu[f^*g]$  sur l'espace  $\mathcal{A}$  lui-même (on n'a alors qu'une structure pre-Hilbertienne) puis en fabriquant l'espace de Hilbert correspondant (complété et séparé). Cette construction bien connue porte le nom — en mathématiques non commutatives — de *construction GNS* (Gelfand-Naimark-Segal). Comme dans le cas commutatif,  $\mathcal{A}$  agit dans  $\mathcal{H}$  par multiplication, ce qui fournit une représentation  $\pi$  de  $\mathcal{A}$  dans l'espace des opérateurs bornés  $\mathcal{L}(H)$ . On considère alors  $\mathcal{M}$ , le *bi*-commutant de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{L}(H)$ . Ce bi-commutant est une algèbre de Von Neumann (il est égal à son propre bi-commutant) ; c'est donc l'analogie non commutatif de  $L^\infty(M, \mu)$ .<sup>1</sup> Rappel : lorsque  $\mathcal{A}$  est une algèbre d'opérateurs,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{A}''$  sont d'ordinaire différents, mais  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$ . La dernière étape consiste à étendre la définition de l'état  $\mu$  à l'algèbre de Von Neumann  $\mathcal{M}$  tout entière (on a évidemment  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ).

La théorie que l'on vient d'ébaucher est à la base de très nombreux développements, aussi bien en mathématiques (théorie des facteurs), qu'en physique (mécanique quantique statistique des systèmes avec nombre fini ou infini de degrés de liberté). Notre but, comme nous l'avions annoncé plus haut, n'était que d'attirer l'attention du lecteur sur le parallèle évident existant entre ces deux théories : théorie de la mesure (en fait mesures de Radon) et théorie des algèbres de Von Neumann ; l'un étant en quelque sorte la généralisation non commutative de l'autre.

### 6.3.3 Calcul différentiel non commutatif

Comme on l'a vu en 6.2, étant donné une algèbre associative  $\mathcal{A}$ , on peut toujours fabriquer une algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée qui coïncide avec  $\mathcal{A}$  en degré 0. Le choix d'une telle algèbre différentielle n'est pas, en général,

---

1. Remarque : dans le cas non commutatif, il faut effectivement construire  $\mathcal{M}$  comme le bi-commutant  $\mathcal{A}''$  de  $\mathcal{A}$  (qui, dans le cas non commutatif, diffère du commutant  $\mathcal{A}'$ .)

unique : on dit qu'on fait alors le choix d'un calcul différentiel pour l'algèbre  $\mathcal{A}$ . On peut faire un choix qui soit plus "général" que les autres (formes différentielles universelles). Les différentes algèbres différentielles possibles (les autres calculs différentiels associables à une algèbre associative donnée) sont des quotients de l'algèbre des formes universelles. Nous renvoyons le lecteur à la section précédente pour une analyse plus détaillée de ces différents choix.

### 6.3.4 Espaces fibrés non commutatifs et modules projectifs

En géométrie différentielle ordinaire, un espace fibré principal peut être considéré comme un outil servant à la fabrication de fibrés associés, de la même façon que les groupes eux-mêmes servent à fabriquer des représentations. En géométrie non commutative, on pourrait, bien sur, tenter de généraliser dans un premier temps la structure de groupe elle-même (c'est la théorie des *groupes quantiques*), puis la structure de fibré principal, et enfin celle de fibré associé. Ces généralisations existent. Cependant la définition et l'étude des groupes quantiques (ou *algèbres de Hopf*) nous entrainerait trop loin. Nous préférons donc suivre ici une approche plus directe, qui n'utilise pas cette notion.

Nous partons de la constatation suivante : en géométrie différentielle ordinaire, l'ensemble  $\Gamma E$  des sections d'un fibré associé  $E$  (les *champs de matière* de la physique) constitue un module sur l'algèbre  $C^\infty(M)$  des fonctions sur la base. Par exemple, si  $x \in M \mapsto V(x) \in \Gamma E$  est un champ de tenseurs (ou de spineurs ...), et si  $x \in M \mapsto f(x) \in \mathfrak{R}$  (ou  $\mathfrak{C}$ ) est une fonction, alors  $[fV](x) = f(x)V(x)$  est aussi un champ de tenseurs (ou de spineurs etc. ...).

Ce n'est pas la notion d'espace fibré vectoriel associé que nous allons généraliser, mais celle de l'ensemble de ses sections. Etant donné une algèbre associative  $\mathcal{A}$ , possiblement non commutative, nous allons donc considérer tout module  $\Gamma$  sur  $\mathcal{A}$  comme l'analogie non commutatif d'un fibré vectoriel associé. En fait, dans le cas commutatif, les modules obtenus par construction de fibré associé sont d'un type un peu particulier. On dit qu'ils sont projectifs de type fini (théorème de Serre-Swann). Sans rentrer dans les détails, cela signifie la chose suivante. L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel trivial dont la fibre type est de dimension  $n$  est manifestement isomorphe au module  $(C^\infty(M))^n$ . Lorsque le fibré n'est pas trivial, il suffit de se placer dans un espace un peu plus grand (c'est à dire de rajouter un certain nombre de dimensions à la fibre) pour le trivialisier. Le fibré de départ est alors obtenu comme  $p(C^\infty(M))^n$ ,  $p$  désignant un projecteur ( $p^2 = p$ ) de l'algèbre des

matrices  $n \times n$  sur  $C^\infty(M)$ .

Dans le cadre non commutatif, on remplacera donc la notion d'“espace des sections d'un fibré vectoriel” (physiquement l'espace des champs de matière d'un certain type) par la notion de module projectif fini sur une algèbre associative  $\mathcal{A}$ . L'espace vectoriel  $p\mathcal{A}^n$ ,  $p$  désignant un projecteur, est manifestement un module (à droite) sur  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{A}$  n'est pas commutative, il faut évidemment faire la distinction entre les modules à droite et les modules à gauche.

Notons, pour finir, qu'un cas intéressant de module sur  $\mathcal{A}$  est celui où on choisit un module particulier égal à l'algèbre elle-même opérant sur elle-même par multiplication (c'est l'analogue non commutatif d'un fibré en droites).

### 6.3.5 Connexions généralisées en géométrie non commutative

Soit  $\Xi$  un calcul différentiel sur une algèbre  $\mathcal{A}$ , c'est à dire une algèbre différentielle  $\mathfrak{Z}$ -graduée, avec  $\Xi^0 = \mathcal{A}$ . Soit  $\mathcal{M}$  un module à droite sur  $\mathcal{A}$ . Une différentielle covariante  $\nabla$  sur  $\mathcal{M}$  est une application  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Xi^p \mapsto \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Xi^{p+1}$  telle que

$$\nabla(\psi\lambda) = (\nabla\psi)\lambda + (-1)^s \psi d\lambda$$

lorsque  $\psi \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Xi^s$  et  $\lambda \in \Xi^t$ . L'opérateur  $\nabla$  n'est certainement pas linéaire par rapport à l'algèbre  $\mathcal{A}$  mais il est facile de constater que la courbure  $\nabla^2$  est un opérateur linéaire par rapport à  $\mathcal{A}$ .

Dans le cas particulier où l'on choisit le module  $\mathcal{M}$  comme l'algèbre  $\mathcal{A}$  elle-même, toute 1-forme  $\Xi$  (tout élément de  $\Xi^1$ ) permet de définir une différentielle covariante : on pose simplement

$$\nabla \mathbb{1} = \omega$$

où  $\mathbb{1}$  est l'unité de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Lorsque  $f \in \mathcal{A}$ , on obtient

$$\nabla f = \nabla(\mathbb{1}f) = (\nabla \mathbb{1})f + \mathbb{1}df = df + \omega f$$

De plus,  $\nabla^2 f = \nabla(df + \omega f) = d^2 f + \omega df + (\nabla \omega)f - \omega df = (\nabla \omega)f$ . La courbure, dans ce cas, est égale à

$$\rho = \nabla \omega = \nabla \mathbb{1} \omega = (\nabla \mathbb{1})\omega + \mathbb{1}d\omega = d\omega + \omega^2.$$

Choisissons  $u$ , un élément inversible de  $\mathcal{A}$  et agissons avec  $d$  sur l'équation  $u^{-1}u = \mathbb{1}$ . On obtient (utilisant le fait que  $d\mathbb{1} = 0$ ) l'équation

$$du^{-1} = -u^{-1}duu^{-1}.$$

Définissons également  $\omega' = u^{-1}\omega u + u^{-1}du$  et calculons la nouvelle courbure  $\rho' = d\omega' + \omega'^2$ . On obtient immédiatement  $\rho' = u^{-1}(d\omega + \omega^2)u = u^{-1}\rho u$  où

$$\boxed{\rho = d\omega + \omega^2.}$$

Ceci montre que les formules usuelles sont valables, sans qu'il soit besoin de supposer la commutativité de l'algèbre  $\mathcal{A}$ .

Remarque : Ici nous avons choisi un module  $\mathcal{M}$  (un ingrédient nécessaire pour construire n'importe quelle théorie de jauge) égal à l'algèbre  $\mathcal{A}$  elle-même. Plus généralement, nous aurions pu choisir un module libre  $\mathcal{A}^n$ , ou même, un module projectif  $p\mathcal{A}^n$  sur  $\mathcal{A}$ . Dans ce dernier cas, le formalisme précédent doit être légèrement modifié. En effet, le projecteur  $p$  va intervenir dans le calcul de la courbure (c'est un peu comme si nous faisons de la géométrie différentielle classique de façon extrinsèque, en plongeant notre espace dans un espace "plus grand"). Comme toujours, la courbure est  $\rho = \nabla\nabla$ . La différentielle covariante est

$$\nabla = pd + \omega$$

où  $\omega$  est un élément de  $\Xi^1$  tel que  $p\omega p = \omega$ . En effet, si  $X \in \mathcal{M}$ ,  $\nabla X = pdX + \omega X$  et il est facile de vérifier que cela définit bien une connexion : prenons  $f \in \mathcal{A}$ , alors

$$\begin{aligned} \nabla(Xf) &= pd(Xf) + \omega Xf \\ &= p(dX)f + \omega Xf + pXdf \\ &= \nabla(X)f + Xdf \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que  $pX = X$ . La courbure  $\rho = \nabla^2$  se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} \nabla^2(X) &= pd(pdX + \omega X) + \omega(pdX + \omega X) \\ &= pd(pdX + \omega X) + \omega(dX + \omega X) \\ &= p(dp)dX + pd^2X + (d\omega)X - \omega(dX) + \omega dX + \omega^2 X \\ &= p(dp)dX + (d\omega)X + \omega^2 X = [pdpdp + d\omega + \omega^2]X \end{aligned}$$

Nous avons utilisé les propriétés  $\omega p = p$ ,  $dX = d(pX) = (dp)X + pdX$  ainsi que  $p(dp)p = pd(p^2) - pdp = 0$ , ce qui entraîne  $pdpdX = pdpdpX + p(dp)pX = pdpdpX$ . En conclusion, la courbure, dans le cas où le projecteur ne se réduit pas à l'identité est égale à

$$\boxed{\rho = pdpdp + d\omega + \omega^2}$$

Il faut remarquer le fait que la courbure s'obtient à partir de  $\nabla^2$  (ce qui en fait bien un opérateur linéaire par rapport aux éléments de  $\mathcal{A}$ ) et non pas en recopiant servilement la formule classique  $d\omega + \omega^2$ , ce qui serait faux !

### 6.3.6 Cohomologie des espaces non commutatifs

#### La cohomologie de Hochschild

- Nous savons que la différentielle  $\delta$  sur  $\Omega\mathcal{A}$  est presque triviale, du point de vue cohomologique. Le “presque” vient du fait que  $\delta\mathbb{1} = 0$  et on rappelle qu’il est nécessaire de supposer que  $\mathcal{A}$  possède une unité pour construire  $\Omega\mathcal{A}$  (on verra un peu plus loin comment faire si ce n’est pas le cas). Il est donc raisonnable de chercher à définir une autre théorie cohomologique ou homologique qui se restreigne, dans le cas classique, à celle déjà connue (celle de De Rham). En fait, nous allons voir que ceci se fait en deux temps : on définit tout d’abord la *cohomologie de Hochschild*, puis la *cohomologie cyclique*, et c’est cette dernière qui va nous fournir un analogue non commutatif de la cohomologie de De Rham.
- Nous avons déjà mentionné le fait que, dans le cas classique (le cas de la géométrie “commutative” usuelle où  $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ ), l’algèbre  $\Omega\mathcal{A}$  des formes universelles était “bien plus grande” que celle des formes différentielles usuelles  $\Lambda(X)$ . Nous allons voir que, dans le cas classique, il existe une façon purement (co)homologique de récupérer l’algèbre des formes différentielles usuelles, ou plutôt, en travaillant de façon duale, l’espace des courants de De Rham. Le but de cette section est donc d’ébaucher une construction qui conduise aux courants de De Rham dans le cas usuel, mais qui soit, bien entendu, valable pour une algèbre associative quelconque.
- On définit l’opérateur co-bord de Hochschild  $b$  (aussi appelé *différentielle de Hochschild*) comme suit :  
Soit  $\phi$  une  $(n+1)$ -forme linéaire  $\phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  sur l’algèbre  $\mathcal{A}$ . Alors

$$[b\phi](a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^n \phi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_n) + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n)$$

Par exemple,

$$[b\phi](a_0, a_1, a_2, a_3) = \phi(a_0 a_1, a_2, a_3) - \phi(a_0, a_1 a_2, a_3) + \phi(a_0, a_1, a_2 a_3) - \phi(a_3 a_0, a_1, a_2)$$

L’étape suivante consiste à montrer que  $b^2 = 0$ , ce qui est à la fois immédiat, et pénible...

Puisque nous avons un opérateur cobord (il est de carré nul et envoie bien les  $n$  formes dans les  $n + 1$  formes), nous pouvons définir

l'espace des cocycles de Hochschild  $Z^n = \{\phi \in C^n / b\phi = 0\}$ , l'espace des cobords de Hochschild  $B^n = \{\phi \in C^n / \phi = b\psi \text{ for } \psi \in C^{n-1}\}$  et les groupes de cohomologie (de Hochschild) correspondants  $H^n = Z^n / B^n$ . Ci-dessus, la notation  $C^n$ , l'espace des cochaines de Hochschild, désigne l'espace des formes  $n+1$  multilinéaires sur  $\mathcal{A}$  (attention à la translation d'une unité).

Remarque terminologique : un lecteur curieux, qui chercherait la définition de la cohomologie de Hochschild dans un ouvrage d'algèbre homologique pourrait être surpris car celle-ci fait d'ordinaire référence au choix d'un certain bimodule. Ici, le bimodule en question n'est autre que le dual de  $\mathcal{A}$ . Nous n'avons pas besoin de mentionner ceci plus haut mais il est bon de savoir que c'est précisément ce choix particulier de bimodule (ainsi que l'existence d'un accouplement naturel entre  $\mathcal{A}$  et son dual  $\mathcal{A}^*$ ) qui est à l'origine de la définition précédente de  $b$ .

- Dans le cas classique (celui de la géométrie différentielle “commutative” habituelle), nous savons que les courants de De Rham (voir 1.12.5) sont définis comme distributions sur les formes différentielles de De Rham. En d'autres termes, si  $C$  is un  $p$ -courant et  $\omega$  est une  $p$ -forme, alors  $\langle C, \omega \rangle$  est un nombre. Nous allons montrer qu'il existe une correspondance entre courants arbitraires et cocycles de Hochschild, dans le cas particulier des 2-formes, en laissant au lecteur le soin de généraliser cette propriété au cas  $p > 2$ .

Des courants de De Rham aux cocycles de Hochschild : étant donné  $C$ , nous construisons  $\phi(f, g, h) = \langle C, fdg \wedge dh \rangle$ . on peut alors vérifier que  $b\phi = 0$ .

Des cocycles de Hochschild aux courants de De Rham : étant donné  $\phi$ , nous construisons  $\langle C, fdg \wedge dh \rangle = \phi(f, g, h) - \phi(f, h, g)$ .

Les deux formules ci-dessus sont différentes car il n'y a aucune raison de supposer qu'un cocycle de Hochschild donné  $\phi$  soit antisymétrique. Si  $\phi$  est un cobord de Hochschild, il reste à vérifier que le courant de De Rham correspondant s'annule. Ceci est une conséquence immédiate de la définition de  $b$  et de l'antisymétrie du produit extérieur.

De façon générale, le  $p$ -ième groupe de cohomologie de Hochschild coïncide avec l'espace des courants de De Rham en degré  $p$ . On peut en particulier vérifier que la dimensionalité de l'espace  $H^p$  est triviale dès que  $p$  est plus grand que la dimension de la variété  $X$  elle-même.

- Il peut être intéressant de comparer l'expression de  $[b\phi](a_0, a_1, a_2, a_3]$  avec le calcul de  $a_0\delta(a_1)\delta(a_2)a_3$  effectué dans la section consacrée à la définition de  $\Omega\mathcal{A}$  (6.2.2). On voit que le fait de calculer  $b\phi$  revient, dans cet exemple, à évaluer  $\phi$  sur un type particulier de commutateurs

(dans  $\Omega\mathcal{A}$ ), en l'occurrence  $\phi([a_0\delta a_1\delta a_2, a_3])$ .

Cette remarque peut être généralisée, en ce sens qu'on peut être tenté de considérer les  $p$  formes sur  $\mathcal{A}$  comme des formes linéaires sur l'algèbre  $\Omega\mathcal{A}$  et de définir  $b$  non pas sur les formes  $p$ -linéaires sur  $\mathcal{A}$  mais sur les formes linéaires sur  $\Omega\mathcal{A}$ . En fait, on se heurte alors à un problème un peu subtil lié au rôle particulier joué par l'unité dans la construction de l'algèbre des formes universelles.

Notons  $\tilde{\mathcal{A}}$  l'algèbre obtenue en rajoutant une unité  $\mathbb{1}$  à  $\mathcal{A}$ , que celle-ci en possède déjà une ou non. Les éléments de cette augmentation sont, par définition, des paire  $(a, c)$ , avec  $a \in \mathcal{A}$  et  $c \in \mathfrak{C}$ . La nouvelle unité est  $\mathbb{1} = (0, 1)$ . On identifie  $a \in \mathcal{A}$  avec  $(a, 0) \in \tilde{\mathcal{A}}$ . Les éléments  $(a, c)$  de l'algèbre augmentée sont notés simplement  $a + c\mathbb{1}$ . La multiplication est telle que  $(a_1 + c_1\mathbb{1})(a_2 + c_2\mathbb{1}) = a_1a_2 + c_1a_2 + a_1c_2 + c_1c_2\mathbb{1}$ ; elle doit donc être formellement définie par

$$(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1a_2 + c_1a_2 + a_1c_2, c_1c_2)$$

Si  $\mathcal{A}$  ne possède pas d'unité, il n'y a pas de confusion possible. Si  $\mathcal{A}$  en possède déjà une, nous la désignons par  $e = (e, 0)$  et il est certain que  $e$  n'est plus l'unité de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , mais seulement un projecteur ( $e^2 = e$ ). Notons que, avec  $a \in \mathcal{A}$  et  $c \in \mathfrak{C}$ ,  $\delta(a + c\mathbb{1}) = \delta a$  dans  $\Omega\tilde{\mathcal{A}}$ . On peut donc identifier les formes multilinéaires sur  $\mathcal{A}$  avec certaines formes linéaires sur  $\Omega\tilde{\mathcal{A}}$ , en l'occurrence avec les formes  $\phi$  qui sont telles que  $\phi(\mathbb{1}\delta a_1\delta a_2 \dots \delta a_n) = 0$  en posant, pour  $a_i \in \mathcal{A}$

$$\phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \phi(a_0 \delta a_1 \dots \delta a_n)$$

Grâce à cette identification, on peut effectuer toutes les constructions de nature cohomologique en utilisant comme cochaines ce type particulier de formes linéaires sur  $\Omega\tilde{\mathcal{A}}$  plutôt que de faire appel à des formes multilinéaires sur  $\mathcal{A}$ . Nous n'irons cependant pas plus loin dans cette direction.

### La cohomologie cyclique : une cohomologie de De Rham non commutative

- Dans le cas non commutatif, nous n'avons pas encore présenté de construction qui généralise la cohomologie de De Rham (section 1.12.2). En fait, puisque nous travaillons maintenant sur les algèbres elle-mêmes (dans le cas commutatif on considère l'algèbre commutative  $C^\infty(X)$  des fonctions et non pas les points de  $X$  eux-mêmes), c'est d'un analogue de l'opérateur d'homologie  $\partial$  sur les courants dont nous

avons besoin. Rappelons que, classiquement, cet opérateur agit sur les courants de De Rham de la façon suivante (théorème de Stokes) :

$$\langle \partial C, \omega \rangle = \langle C, d\omega \rangle,$$

Ici  $\omega$  est une forme différentielle quelconque sur  $X$ .

- La définition la plus simple (mais c'est peut-être une question de goût) est celle qui suit. On définit tout d'abord la notion de cyclicité pour une forme multilinéaire

$$\boxed{\phi \text{ est cyclique} \Leftrightarrow \phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^n \phi(a_n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).}$$

On fait alors la remarque suivante [2] : Si  $\phi$  est cyclique, alors  $b\phi$  l'est aussi.

Il devient alors naturel de considérer le sous complexe cyclique du complexe de Hochschild, c'est à dire de restreindre l'opérateur  $b$  (le même que précédemment) aux cochaines de Hochschild cycliques. On définit alors les espaces  $Z_\lambda^n$ ,  $B_\lambda^n$  des cocycles et cobords cycliques, ainsi que leurs quotients, les groupes de cohomologie cyclique  $H_\lambda^n$ .

- Dans le cadre classique, i.e. avec  $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ , on montre [2] que

$$H_\lambda^k = \text{Ker} \partial \oplus H_{k-2} \oplus H_{k-4} \dots$$

où  $\text{Ker} \partial$  est le noyau de l'opérateur  $\partial$  agissant dans l'espace des courants de De Rham de degré  $k$  et où  $H_p$  désigne le groupe d'homologie de degré  $p$  (pour les courants).

Ainsi, nous n'obtenons pas une correspondance bi-univoque entre les groupes de cohomologie cyclique et les groupes d'homologie de De Rham ; néanmoins, l'information contenue est la même, puisque, en choisissant  $k$  assez grand, les groupes de cohomologie cycliques pairs ou impairs seront respectivement égaux à la somme directe des groupes d'homologie de De Rham (pairs ou impairs).

Ce résultat suggère qu'il existe une façon canonique d'envoyer  $H_\lambda^p$  dans  $H_\lambda^{p+2}$ , et c'est effectivement le cas (pour une algèbre  $\mathcal{A}$  quelconque, d'ailleurs). En fait, on peut démontrer un résultat encore plus fort : pour toute algèbre, on peut définir un opérateur  $S$ , souvent désigné sous le nom de "opérateur de périodicité de Connes", qui envoie  $C_\lambda^p$  dans  $C_\lambda^{p+2}$  — le symbole  $C_\lambda^*$  se référant aux cochaines cycliques.

- Cette façon de définir la cohomologie cyclique (comme sous complexe de celle de Hochschild), se fait donc sans qu'il soit besoin d'introduire une généralisation non commutative de l'opérateur  $\partial$ . Cela dit, un tel opérateur existe (il est noté  $B_0$ , ou  $B$  — voir ci-dessous —) et on

peut aussi définir la cohomologie cyclique grâce à lui. La définition de cette cohomologie, en utilisant les opérateurs en question, est un peu plus subtile, et nous nous contenterons de donner la définition des opérateurs  $B_0$  et  $B$ . Le lecteur intéressé pourra consulter [2], [3] et les références indiquées dans cet ouvrage.

- Outre l'opérateur de périodicité déjà mentionné,  $S : C_\lambda^p \rightarrow C_\lambda^{p+2}$ , on considère aussi les opérateurs suivants :
  - L'opérateur d'antisymétrisation cyclique.

$$[A\phi](a_0, a_1, \dots, a_n) = \phi(a_0, a_1, \dots, a_n) + (-1)^n \phi(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}) + \phi(a_{n-1}, a_n, a_0, \dots) + (-1)^n \phi(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_0, a_1, \dots) + \dots$$

- L'opérateur bord non antisymétrisé  $B_0$  défini comme

$$[B_0\phi](a_0, a_1, \dots, a_n) = \phi(e, a_0, \dots, a_n) - \phi(a_0, \dots, a_n, e)$$

Ici,  $e$  désigne l'unité de l'algèbre  $\mathcal{A}$  (et il faut effectivement supposer que l'algèbre est unitale).

- L'opérateur bord cyclique  $B = AB_0$ . (ou *différentielle de Connes*).

On montre alors que  $B$  envoie  $C^n$  sur  $C^{n-1}$ , que  $B^2 = 0$  et que  $bB + Bb = 0$ . En utilisant ces deux dernières propriétés, ainsi que  $b^2 = 0$ , on peut construire un bi-complexe (puisque  $b$  and  $B$  agissent dans des directions opposées) à partir duquel on peut également définir la cohomologie cyclique.

- En utilisant ce dernier bi-complexe on définit aussi la "cohomologie cyclique entière" de la façon suivante. Les cocycles entiers sont des suites  $(\phi_{2n})$  ou  $(\phi_{2n+1})$  de fonctionnelles paires ou impaires  $\phi$  qui doivent satisfaire à la contrainte suivante (nous ne l'écrivons que pour le cas impair) :

$$b\phi_{2n-1} + B\phi_{2n+1} = 0.$$

A l'aide de tels cocycles (techniquement, il faut aussi supposer qu'une certaine condition de croissance est satisfaite), on peut définir des fonctions entières sur l'algèbre  $\mathcal{A}$ ,

$$F_\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \phi_{2n}(x, x, \dots, x).$$

La cohomologie cyclique entière fournit un formalisme approprié pour l'étude de certaines algèbres non commutatives de dimension infinie apparaissant en théorie quantique des champs.

### 6.3.7 Remarque finale

Comme nous l'avons signalé plus haut, notre propos, dans cette dernière section était simplement d'effectuer un tour rapide dans certains secteurs du zoo non commutatif, en espérant que le lecteur aura plaisir à y retourner en consultant la littérature spécialisée. Le présent ouvrage est en effet essentiellement dédié à l'étude de plusieurs aspects de la géométrie différentielle ; en l'occurrence, la théorie des connexions et des espaces fibrés. Cependant, la physique du vingtième siècle n'est (n'était !) pas seulement courbe : elle est (était) aussi quantique. Il eût donc été dommage de passer sous silence ces quelques développements récents — et passionnants — des mathématiques, qui généralisent les notions habituelles et quasi intuitives de la géométrie "ordinaire" (celle des espaces) au monde, encore un peu mystérieux, des espaces non commutatifs.

# Index

- $C$  - étoile algèbre, 220
- états, 238
  
- action effective, 64
- action fidèle, 64
- action libre, 65
- action transitive, 66
- algèbre commutative graduée, 42
- algèbre de Banach involutive, 220
- algèbre de Clifford, 79
- algèbre de De Rham, 22
- algèbre de Lie semi-simple, 58
- algèbre de Lie simple, 58
- algèbre tensorielle, 16
- algèbres de Von Neumann, 237
- application cotangente, 28
- application de relèvement horizontal, 145
- application différentiable, 6
- atlas, 4
- atlas maximal, 5
- automorphismes verticaux, 101, 122, 138
  
- bord, 43
- bra et ket, 15
  
- calcul différentiel non local, 224
- caractère, 219
- carte, 4
- centralisateur, 66
- centre, 66
- champ de vecteurs projetable, 28
- champ électromagnétique, 25, 208
  
- champs de Killing, 69
- champs de matière, 126
- champs de vecteurs, 8, 41
- champs de vecteurs fondamentaux, 68
- Champs de vecteurs projetables, 108
- champs invariants à droite, 71
- champs invariants à gauche, 71
- classe de Stiefel-Whitney, 136
- cobords, 42
- cocycles, 42
- codifférentielle, 205
- coefficients de connexion, 149, 177
- cohomologie, 43
- cohomologie cyclique, 242, 244
- cohomologie de Hochschild, 242
- conjugaison de charge, 90
- connexion affine, 175
- connexion de Levi-Civita, 198
- connexion linéaire, 176
- connexion métrique, 175
- connexion principale, 145
- constantes de structure, 14, 76
- construction GNS, 238
- corepère mobile, 23
- corepère naturel, 23
- courants de De Rham, 44
- courbe autoparallèle, 193
- courbure scalaire, 201
- courbure sectionnelle, 203
- courbures principales de Ricci, 201
- crochet de Frölicher-Nijenhuis, 45
- crochet de Lie, 12
- crochet de Nijenhuis-Richardson, 45

- cycle, 43
- dérivée covariante, 151
- dérivée de Lie, 30
- dérivations graduées, 41
- difféomorphisme, 7
- différentielle covariante, 150
- différentielle covariante sur un fibré principal, 168
- différentielle de Connes, 246
- différentielle de De Rham, 23
- différentielle de Hochschild, 242
- différentielle extérieure, 23
- distribution horizontale, 144
- distribution horizontale équivariante, 145
- dualité de Hodge, 203
- élargissement d'espace fibré, 128
- élément de volume, 35
- équation de Maurer-Cartan, 26, 77
- équations d'Einstein, 202
- équations de Maxwell, 165, 208
- équations de Yang-Mills, 165, 209
- espace fibré localement trivial, 98
- espace riemannien quantique, 235
- espace tangent, 10
- espace tangent vertical, 104
- extension centrale, 136
- extension d'espace fibré, 132
- fibré d'holonomie, 173
- fibré tangent, 10
- fibré de spin, 133
- fibré des repères, 117
- fibré des repères linéaires, 104
- fibré des repères spinoriels, 133
- fibré des spineurs, 134
- fibré en boucles, 136
- fibré en groupes, 122
- fibration, 97
- fibre type, 98
- fonctions de structure, 14
- fonctions de transition, 103
- fonctions différentiables, 8
- forme canonique, 183
- forme de connexion, 146
- forme de soudure, 183
- forme de torsion, 184
- forme extérieure, 17
- forme volume, 35, 37
- formes basiques, 107
- formes différentielles, 22
- formes différentielles associées au choix d'un opérateur de Dirac, 233
- formes différentielles associées aux dérivations, 229
- formes différentielles pour espaces non connexes, 232
- formes différentielles quantiques, 221
- formes différentielles universelles, 221
- formes exactes, 42
- formes fermées, 42
- formes horizontales, 107
- formes invariantes, 107
- générateurs infinitésimaux, 53
- gradient, 40
- groupe adjoint, 73
- groupe d'holonomie, 173
- groupe de Clifford, 81
- groupe de jauge, 101, 119
- groupe de jauge pointé, 216
- groupe structural, 100
- groupes localement isomorphes, 57
- harmonique, 207
- Hessien, 208
- Higgs, 229, 233
- homologie, 43
- identité de Ricci, 191
- identités de Bianchi, 165, 170, 185–187, 200

- image directe, 27
- isomorphismes musicaux, 38
- laplacien de De Rham, 206
- laplacien de Lichnerowicz, 207
- métrique, 36
- métrique de Killing, 214
- matrice de connexion, 149, 177
- matrices de Pauli, 55
- mesures, 237
- mesures non commutatives, 238
- nombre de Betti, 43
- normalisateur, 66
- octonions, 116
- opérateur d'orientation, 80
- opérateur de chiralité, 88
- opérations de Cartan, 108
- parallèle, 151, 193
- partition de l'unité, 35
- potentiel de jauge, 148
- produit extérieur, 17
- produit intérieur, 20
- prolongement d'espace fibré, 128
- quotient d'espace fibré, 132
- réduction d'espace fibré, 128
- rang, 54
- relèvement, 145
- repère mobile, 13
- repère naturel, 12
- représentation, 78
- représentation fidèle, 78
- section, 96
- section locale, 96
- sous-espace horizontal, 105
- sous-groupe d'isotropie, 65
- sous-groupe distingué, 66
- spineurs de Majorana, 91
- spineurs de Weyl-Majorana, 92
- stabilisateur, 65
- strate, 67
- strate générique, 67
- structure encordée, 136
- structure spinorielle, 133
- superalgèbre de Lie, 42
- supersymétrique, 41
- symboles de Christoffel, 177, 198
- tenseur d'Einstein, 201
- tenseur de contorsion, 198
- tenseur de non-métricité, 197
- tenseur de Ricci, 192
- tenseur de Riemann, 178
- théorème de Stokes, 43
- théorème spin-statistique, 135
- torsion, 175
- torsion de Nijenhuis, 46
- torsion généralisée, 175
- transformation de Gelfand, 219
- transformations de jauge globales, 101, 137
- transformations de jauge locales, 101, 122, 137, 138
- transport par parallélisme, 145
- transport par parallélisme, 193
- triplet spectral, 235
- trivialisations locales, 99
- variété d'Einstein, 202
- variété différentiable, 4
- variété parallélisable, 125
- variété riemannienne, 36
- variété topologique, 1
- variétés presque-complexes, 131
- vecteur tangent, 10
- volume, 35, 41