

# Evolução de um universo com pressão de radiação e constante cosmológica

R. Coquereaux, A. Grossmann

*Centre de Physique Théorique, Campus de Luminy, Marseille, France*

## Resumo

Em vista de novos resultados experimentais que sugerem fortemente uma constante cosmológica não nula, torna-se interessante rever o modelo de Friedman-Lemaître para a evolução de um universo com pressão de radiação e constante cosmológica. Nestas aulas <sup>1</sup>, discutimos as soluções explícitas para esse modelo, e exploramos numericamente valores razoáveis dos parâmetros cosmológicos.

---

<sup>1</sup>Este conjunto de aulas é baseado em nosso artigo “*Large scale geometry and evolution of a universe with radiation pressure and cosmological constant*” (versão em inglês, [astro-ph/0101369](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0101369), dos mesmos autores), que também contém uma discussão do comportamento dos deslocamentos para o vermelho (*redshifts*) em modelos homogêneos e uma descrição das “características geométricas de escala muito grande”, quando analisadas por observadores distantes (por exemplo, gráficos de deslocamento para o vermelho). Os tópicos relativos à “geometria de grande escala” do nosso universo foram analisados durante as aulas, mas, por falta de espaço, tiveram que ser excluídos da presente contribuição escrita.

# 1 Introdução

De acordo com vínculos experimentais determinados no presente, o universo é, hoje em dia, quase espacialmente plano; além disso, o efeito do termo de radiação na equação de Friedman também é desprezível. Deve-se, no entanto, distinguir entre a descrição do universo tal como aparece “agora” e a descrição de como ele foi e como será.

A maioria dos artigos que tratam da determinação dos parâmetros cosmológicos hoje em dia lidam com o universo como ele aparece “experimentalmente” no momento presente. Muitos outros artigos lidam com aspectos complicados ligados ao(s) mecanismo(s) de inflação, reaquecimento, etc. No presente artigo, começando com vínculos experimentais recentes (veja [1]–[4]) dos parâmetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ , queremos estudar analiticamente a história completa do universo, i.e., como ele era (*após* os primeiros poucos minutos), e como ele será. Uma discussão analítica detalhada dos universos de Friedman com constante cosmológica e pressão de radiação foi feita anos atrás [5, 6], mas, naquele momento, muitos acreditavam que a constante cosmológica fosse nula, de tal forma que essa análise – embora justificada por uma análise fenomenológica particular [7] – podia ser considerada como um exercício puramente matemático. À luz dos recentes resultados experimentais, parte do trabalho realizado nas Ref. [5, 6] torna-se fenomenologicamente relevante: não planejamos realizar uma discussão completa das soluções analíticas de todos os casos possíveis – o que já foi feito por nós – mas restringir nossa atenção aos casos que são compatíveis com as observações recentes e apresentar uma discussão analítica atualizada. Não estamos preocupados, neste artigo, com o problema de inflação (há vários cenários teóricos . . .), pois está claro que em épocas tão remotas não se espera mesmo que a equação de Friedman forneça um modelo matemático adequado à evolução do universo. Entretanto, parece ser razoável supor que houve um tempo, em algum passado remoto, no qual o universo já era quase homogêneo e ainda bastante quente. Pode-se então extrapolar a equação de Friedman, de volta para o passado, até essa época prévia. Fazer artificialmente o termo de radiação igual a zero é uma simplificação desnecessária que impediria a realização de uma extrapolação til em direção a esse passado remoto; além do mais, os vínculos experimentais para esse termo são bastante bem conhecidos devido à medida da Radiação Cósmica de Fundo (RCF).

Pode-se fazer um comentário similar sobre o valor do parâmetro constante ( $k = \pm 1$  ou  $0$ ) que permite que se distinga entre universos fechados ( $k = 1$ ) e abertos ( $k = 0$  or  $-1$ ): pode ser que a densidade de curvatura cosmológica reduzida  $\Omega_k$  seja muito pequena no presente e experimentalmente compatível com zero; no entanto, essa quantidade é função do tempo, e zerar artificialmente o valor da constante  $k$  não permitiria o estudo de algumas características possivelmente interessantes na história do universo (por exemplo, a existência de um ponto de inflexão em um momento particular durante a expansão requer  $k = 1$ ). Pelos motivos acima, não iremos, em geral, desprezar o termo de radiação e iremos manter  $k$  como um parâmetro discreto desconhecido com valores  $\pm 1$  ou  $0$ . Nosso principal objetivo, porém, é estudar os efeitos de uma constante cosmológica não nula (e positiva) nas soluções analíticas que descrevem a dinâmica do nosso universo.

Na próxima seção, lembraremos as relações entre diferentes grandezas cosmológicas de interesse (parâmetros que são experimentalmente disponíveis não necessariamente coincidem com as quantidades que dão uma boa descrição matemática para as soluções da equação de Friedman). Então, numa seção subsequente partiremos dessa equação (escrita com um “bom” conjunto de variáveis), e analisaremos possíveis histórias do universo, tanto qualitativa (usando um modelo mecânico bem conhecido [8]), quanto analiticamente, usando técnicas matemáticas (que podem ser encontrados em [9]) explicadas em [5] e usadas nas Ref. [5], [6]). Quando a constante cosmológica  $\Lambda$  é não nula, as equações de Friedman diferenciais correspondentes não podem ser expressadas em termos de funções trigonométricas; a observação que fazemos neste artigo, (e num anterior [5]) é que essa equação pode ser manipulada com uma classe mais geral de funções periódicas. Diferentes expressões explícitas podem ser encontradas nos artigos de G. Lemaître [9],

mas essas expressões, que envolvem integrais elípticas, não são muito transparentes quando escritas em função do tempo cósmico. Porém, um truque simples – a saber, escrever a equação de Friedman diferencial para o inverso do “raio do universo” em termos do tempo *conforme*, no lugar de escrevê-la em termos do tempo cósmico – permite que se encontre soluções explícitas e analíticas, em termos de funções elípticas muito básicas, como a função elíptica de Weierstrass, conhecida há mais de um século. Não conseguimos achar nenhuma descrição desse truque simples em vários livros e artigos de revisão (por exemplo, a Ref.[10]) – mesmo os mais recentes, como a Ref.[11] – dedicados à descrição de um universo com constante cosmológica. Talvez devêssemos ressaltar que as funções elípticas de Weierstrass são objetos muito simples (se não elementares!), que generalizam tanto as funções trigonométricas circulares quanto as hiperbólicas; por exemplo, a função  $\mathcal{P}$  de Weierstrass é uma função duplamente periódica no plano complexo (no limite em que um dos períodos torna-se infinito, ela pode ser expressa em termos das funções trigonométricas usuais). Ela também satisfaz a relações interessantes, tais como a fórmula de duplicação análoga àquela válida para as funções trigonométricas. Isso leva a uma relação entre quantidades cosmológicas medidas em tempos diferentes (mais sobre isso na seção 4.2.2).

## 2 Relações entre parâmetros cosmológicos

### 2.1 Pano de fundo para os modelos de Friedman-Lemaître

A maior parte da presente seção é bem conhecida e pode ser encontrada nos livros texto tradicionais. A temperatura reduzida  $T(\tau)$ , que parece preferível ao raio  $R(t)$  quando se deseja discutir analiticamente a equação de Friedman, foi introduzida na Ref.[5]. Nosso objetivo aqui é principalmente fornecer um resumo de fórmulas teís e apresentar nossa notação.

#### 2.1.1 Unidades

Trabalharemos num sistema de unidades em que  $\hbar = c = 1$ , no qual todas as quantidades com dimensão são, portanto, dadas como potências de comprimento [cm]. Nestas unidades, energias são em  $[cm^{-1}]$ . Como as temperaturas (denominadas por  $\tilde{T}$  neste artigo) aparecem somente em produtos  $k_B \tilde{T}$  (onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann), podemos tomar a temperatura como adimensional, e  $k_B$  como uma energia.

#### 2.1.2 Considerações métricas e topológicas

Como é bem conhecido, os modelos de Friedman-Lamaître supem que o universo é, em em primeira aproximação, homogêneo e isotrópico.

**A métrica** Há três possibilidades:

- $k = 1$ ,  $ds^2 = -dt^2 + R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$
- $k = -1$ ,  $ds^2 = -dt^2 + R^2[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$
- $k = 0$ ,  $ds^2 = -dt^2 + R^2[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$

**A topologia** O primeiro caso,  $k = 1$ , é muitas vezes chamado de “caso compacto” (universo fechado), pois o universo espacial é então compacto; a topologia global para o espaço-tempo pode ser tomada como  $S^3 \times \mathbb{R}$ , mas deve-se lembrar que a expressão acima para a métrica é apenas local, de forma que pode-se tomar, no lugar de  $S^3$ , qualquer quociente  $S^3/\Gamma$ , 3-esfera por um grupo finito  $\Gamma$  que opera sem ponto fixo (por exemplo, um dos subgrupos binários tetraédricos, octaédricos ou icosaédricos do  $SU(2)$ ). No caso de  $S^3$ , o grupo de isometria completo é  $SU(2) \times SU(2)$ , pois o próprio  $S^3$  é homeomorfo ao grupo das matrizes unimodulares e unitárias.

Nos casos  $k = 0$  or  $k = -1$ , a componente espacial é não-compacta (aberta) e o universo é chamado respectivamente, “plano” ou “hiperbólico”. Intuitivamente, e independentemente dos ajustes experimentais, poderia-se argumentar que o modelo com  $k = 1$  é preferível aos outros pois a equação de Friedman foi derivada supondo homogeneidade da energia, o que é difícil de alcançar em um universo aberto se a quantidade total de matéria é finita.

#### 2.1.3 Equação de Friedman

Essa equação é obtida escrevendo-se a equação de Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum de um fluido perfeito e  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein associado com as métricas acima. A energia local média se divide em três partes:

- Contribuição do vácuo,  $\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica,
- Contribuição da radiação,  $\rho_{rad}$  tal que  $R^4(t)\rho_{rad}(t) = const. = \frac{3}{8\pi G}C_r$ ,
- Contribuição da matéria (tomada a média)  $\rho_m$  tal que  $R^3(t)\rho_m(t) = const. = \frac{3}{8\pi G}C_m$ .

A evolução de  $R(t)$  é governada pela equação de Friedman

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{C_r}{R^4} + \frac{C_m}{R^3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} .$$

é conveniente introduzir o *tempo conforme*  $\tau$ , definido, a menos de uma constante aditiva, por

$$d\tau = \frac{dt}{R} .$$

Esta variável é natural, tanto geométrica (ela fornece distâncias geodésicas tridimensionais) quanto analiticamente (como iremos ver adiante). As quantidades  $C_r$ ,  $C_m$  e  $\Lambda$  têm dimensões de  $L^2$ ,  $L$ ,  $L^{-2}$ , respectivamente. Para substituir  $R$  por uma quantidade adimensional, introduzimos a escala de comprimento característica da matéria,

$$\Lambda_c = \frac{4}{9C_m^2} ,$$

e substituímos  $R(\tau)$  pela *temperatura reduzida adimensional*[5]

$$T(\tau) = \frac{1}{\Lambda_c^{1/2} R(\tau)} . \quad (1)$$

Com essa nova variável, a equação de Friedman é

$$(dT/d\tau)^2 = \alpha T^4 + \frac{2}{3} T^3 - k T^2 + \frac{\lambda}{3} , \quad (2)$$

onde

$$\lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda_c}$$

e

$$\alpha = C_r \Lambda_c$$

são dois parâmetros constantes e adimensionais.

A razão para denominar  $T$  de “temperatura reduzida adimensional” é que ela é proporcional à temperatura  $\tilde{T}$  da radiação de corpo negro. De fato,  $\rho_{rad} = 4\sigma\tilde{T}^4$ , onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann. Como  $\rho_{rad} = \frac{3}{8\pi G} \alpha \Lambda_c T^4$ , encontra-se

$$\tilde{T}^4 = \frac{3}{8\pi G} \frac{\alpha \Lambda_c}{4\sigma} T^4 . \quad (3)$$

Este pode ser o lugar correto para lembrar que Lemaître[9] realizou, há muito tempo, um estudo analítico das soluções das equações de Friedman; sua discussão, realizada em termos de  $R$  e  $t$  envolve, obviamente, funções elípticas, mas é somente quando expressamos as quantidades cosmológicas em termos de  $T(\tau)$  (a temperatura reduzida, em função do tempo conforme) que essas quantidades podem ser escritas como funções elípticas em relação a uma rede particular (a função correspondente  $\mathcal{P}$  de Weierstrass aparece então naturalmente). O estabelecimento dessa conexão direta com a teoria de Weierstrass deveria ficar claro a partir do fato que, com nossa parametrização, o lado direito da equação (2) é um polinômio de quarto grau.

A *função de Hubble* que descreve a taxa de expansão, é definida, como de costume, por  $H = R^{-1}(dR/dt)$  e pode ser escrita, em termos de  $T(\tau)$  como

$$H(\tau) = -\Lambda_c^{1/2} \frac{dT}{d\tau} .$$

Outra quantidade til é a *função de desaceleração*  $q = -R(dR/dt)^{-2}(d^2R/dt^2)$  que pode ser expressa em termos de  $T(\tau)$  como

$$q = \frac{-\frac{\lambda}{3} + \frac{1}{3} T^3 + \alpha T^4}{\frac{\lambda}{3} - k T^2 + \frac{2}{3} T^3 + \alpha T^4} .$$

Na verdade, a escolha do sinal de  $q$  (e do nome) é um erro histórico, já que os limites recentes no valor da constante cosmológica levam a um valor negativo para  $q$  (um universo em expansão acelerada).

Multiplicando a equação de Friedman por  $\Lambda_c/H^2$ , obtemos a famosa relação

$$1 = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda , \quad (4)$$

com

$$\Omega_k = -kT^2 \frac{\Lambda_c}{H^2} \quad (5)$$

$$\Omega_m = \frac{2}{3} T^3 \frac{\Lambda_c}{H^2} \quad (6)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\lambda}{3} \frac{\Lambda_c}{H^2} \quad (7)$$

$$\Omega_r = \alpha T^4 \frac{\Lambda_c}{H^2} \quad (8)$$

Note que o famoso “triângulo cósmico” da Ref.[3] – um tipo de gráfico de Dalitz cósmico – torna-se um triângulo somente quando se esquece o termo de radiação ( então, de fato,  $1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda$ ). Em termos da temperatura usual  $\tilde{T}$ , o termo de radiação é dado por:

$$\Omega_r = \frac{32\pi G}{3} \frac{\sigma \tilde{T}^4}{H^2} . \quad (9)$$

#### 2.1.4 Descrição da História do Universo pela Função Temperatura Reduzida $T(\tau)$

- Ao invés de usar  $R(t)$ , descrevemos[5] a história do universo em termos da função  $T(\tau)$ . Esta função pode ser imaginada intuitivamente como o inverso adimensional do raio; é proporcional à temperatura usual  $\tilde{T}$ . Devido ao fenômeno da expansão, estas quantidades  $T$  e  $\tilde{T}$  diminuem com  $\tau$ . O próprio argumento da função,  $\tau$ , um comprimento de arco adimensional, mede o tempo: se o universo espacial, por exemplo, é (hiper-)esférico,  $\tau$  é uma medida (em radianos) do comprimento do arco associado a um fóton que foi produzido no *big bang*. Uma dada solução (uma dada “história” de um universo adimensional) é completamente caracterizada pela solução de uma equação diferencial que depende dos dois parâmetros adimensionais  $\alpha$  e  $\lambda$ . é claro, deve-se também especificar um valor inicial para a função (toma-se  $T(\tau) \rightarrow \infty$  quando  $\tau \rightarrow 0$ ). Como veremos em uma seção posterior,  $T(\tau)$  é uma função elíptica particular; a história do nosso universo é então também completamente codificada pelos dois invariantes de Weierstrass  $(g_2, g_3)$ , ou, equivalentemente, pelos dois períodos  $\omega_1, \omega_2$  dessa função elíptica. Os invariantes de Weierstrass são dados, em termos dos parâmetros  $k$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ , pelas relações algébricas

$$g_2 = \frac{k^2}{12} + \frac{\alpha\lambda}{3} . \quad (10)$$

$$g_3 = \frac{1}{6^3} (k^3 - 2\lambda) - \frac{\alpha\lambda k}{18} . \quad (11)$$

As fórmulas que descrevem os dois períodos  $\omega_1, \omega_2$  em termos dos parâmetros cosmológicos  $k$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$  (ou  $g_1, g_2$ ) envolvem integrais elípticas e serão dadas mais tarde.

- Quantidades dimensionais serão obtidas a partir de  $T(\tau)$  graças à medida de uma nica função que tem dimensão de comprimento. Essa função é normalmente a função de Hubble  $H = H(\tau)$ . O comportamento de  $R(t)$  é dado pelas duas equações paramétricas  $R(\tau)$  e  $t(\tau)$ . Como veremos mais tarde, em todos os casos de interesse físico,  $t(\tau)$  alcança uma singularidade logarítmica para um tempo conforme finito  $\tau_f$  (o universo expande para sempre, mas em  $t \rightarrow \infty$  o comprimento de arco associado ao caminho de um nico fóton tende a um valor finito  $\tau_f$ ).
- Finalmente, resta saber “quando” nós estamos, i.e., a idade do universo. Isso pode ser expresso em termos da grandeza adimensional  $\tau_o$  (um valor particular de  $\tau$ ) ou, de maneira mais convencional, em termos de  $t_o = t(\tau_o)$ . Experimentalmente, mede-se a “constante” de Hubble  $H_o = H(\tau_o)$ , i.e., o valor da função  $H(\tau)$  atualmente.

### 2.1.5 Grandezas Cosmológicas

Aqui apenas listamos as grandezas cosmológicas de maior interesse.

**Grandezas adimensionais** Temos os parâmetros constantes  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $k = 0, \pm 1$ , as densidades adimensionais dependentes do tempo  $\Omega_k(\tau)$ ,  $\Omega_\Lambda(\tau)$ ,  $\Omega_m(\tau)$ ,  $\Omega_r(\tau)$  e a função temperatura reduzida  $T(\tau)$ . É também de interesse a função desaceleração  $q(\tau)$ . Obviamente, o próprio tempo conforme  $\tau$  é uma grandeza adimensional não-constante (!). A temperatura de corpo negro  $\tilde{T}$  (temperatura da radiação de microondas do corpo negro), experimentalmente expressa em graus Kelvin) é ela própria adimensional – veja nossa observação no começo desta seção. Ela é proporcional à temperatura reduzida adimensional  $T$  (ou ao raio inverso  $R$ ).

#### Grandezas Dimensionais

- A função de Hubble  $H(\tau)$ . Esta quantidade é normalmente a escolhida para fixar a escala de comprimento.
- A escala crítica de comprimento  $\Lambda_c$ . Ela pode ser imaginada como a quantidade que dá uma medida da “massa total” do universo. Mais precisamente, se o universo é espacialmente fechado e tem a topologia e a métrica de uma 3-esfera, sua massa total é  $M = 4\pi^2 R^3 \rho_m$ , de forma que  $\Lambda_c = \left(\frac{\pi}{2GM}\right)^2$ .
- O raio  $R$ . Intuitivamente, é uma medida da “malha” de coordenadas espaciais do nosso universo.
- A idade  $t$  do universo (tempo cósmico).

### 2.1.6 Expressão das Grandezas Cosmológicas em Termos da Função de Hubble $H$ e das Densidades Adimensionais $\Omega_\Lambda, \Omega_k, \Omega_m, \Omega_r$

Como a maioria dos resultados experimentais são expressos em termos das densidades adimensionais  $\Omega_\Lambda, \Omega_k, \Omega_m, \Omega_r$ , é em termos destas grandezas que expressamos todas as outras grandezas cosmológicas de interesse. Tipicamente, quantidades dimensionais também envolvem o valor da função de Hubble  $H(\tau)$ . Todas essas fórmulas podem ser obtidas por manipulações algébricas diretas.

#### Grandezas dimensionais constantes (parâmetros)

$$\lambda = \frac{27}{4} \frac{\Omega_\Lambda \Omega_m^2}{|\Omega_k^3|} \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{4}{9} \frac{\Omega_r |\Omega_k|}{\Omega_m^2} \quad (13)$$

#### Quantidades Adimensionais dependentes do tempo (supondo $k \neq 0$ )

$$T = -k \frac{3\Omega_m}{\Omega_k} = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m}{|\Omega_k|} \quad (14)$$

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda + \Omega_r = \frac{3\Omega_m}{2} + \Omega_k + 2\Omega_r - 1 \quad (15)$$

A temperatura da radiação CMB:

$$\tilde{T}^4 = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{4\sigma} \Omega_r H^2$$

O próprio tempo conforme  $\tau$  pode ser encontrado numericamente, se conhecermos algum valor de  $T$  através da solução da equação (não-algébrica) que expressa  $T$  como função de  $\tau$  (veja a próxima seção).

$$\Lambda = 3H^2\Omega_\Lambda \quad (16)$$

$$\Lambda_c = \frac{4}{9} \frac{|\Omega_k|^3}{\Omega_m^2} H^2 \quad (17)$$

$$C_m = \frac{\Omega_m}{|\Omega_k|^{3/2} H}$$

$$C_r = \frac{\Omega_r}{|\Omega_k|^2 H^2}$$

**Quantidades dimensionais dependentes do tempo (supondo  $k \neq 0$ )** Além da própria “constante” de Hubble  $H$ , deve-se considerar também o raio

$$R = \frac{1}{T\Lambda_c^{1/2}}, \quad (18)$$

o tempo cósmico (a idade do universo que corresponde ao tempo conforme  $\tau$ ) sendo dado por

$$t(\tau) = \Lambda_c^{-1/2} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{T(\tau')}. \quad (19)$$

## 2.2 Dimensões das Grandezas Cosmológicas

No nosso sistema de unidades, todas as quantidades são ou adimensionais ou têm uma dimensão que é alguma potência de comprimento ( $[cm]$ ). Organizamos toda a informação relevante como segue:

$$t \sim R \sim C_m \sim [cm]$$

$$G \sim C_r \sim [cm^2]$$

$$H \sim k_B \sim \text{energy} \sim [cm^{-1}]$$

$$\Lambda \sim \Lambda_c \sim [cm^{-2}]$$

$$\rho_{vac} \sim \rho_{rad} \sim \rho_m \sim \sigma \sim [cm^{-4}]$$

Aqui,  $\sigma$  denota a constante de Stefan (lembre que graus Kelvin são adimensionais). Finalmente, listamos as quantidades adimensionais:

$$\Omega_m \sim \Omega_\Lambda \sim \Omega_k \sim \Omega_r \sim q \sim T \sim \tilde{T} \sim \tau \sim \alpha \sim \lambda \sim [cm^0 = 1]$$



### 3 Vínculos Experimentais

#### 3.1 Vínculos Experimentais obtidos a partir de Supernovas com alto desvio para o vermelho anisotropias na radiação cósmica de microondas

Em geral, adicionaremos um índice  $o$  para referir aos valores *presentes* das quantidades dependentes do tempo (como  $H_o, \Omega_k^o, \Omega_r^o, \Omega_m^o, \Omega_\Lambda^o, q_o, T_o$  ou  $\tilde{T}_o$ ). Lembre que  $k, \alpha, \lambda, \Lambda, \Lambda_c$  são parâmetros constantes.

A análise da Ref.[4] (baseada nos resultados experimentais mais recentes da anisotropia da radiação cósmica de fundo e dos dados de supernovas distantes do tipo Ia[12],[1]) fornece  $0.13 < \Omega_m^o < 0.43$  e  $+0.40 < \Omega_\Lambda^o < +0.80$ . Por prudência, não nos restringimos aos limites mais severos que se pode obter de uma análise de verossimilhança combinada que usasse ambos os conjuntos de dados vindos da anisotropia da radiação CMB e das supernovas distantes do tipo Ia. Além do mais, muitos experimentos, atualmente, dão um valor presente para a função de Hubble próximo a  $H_o = h 100 km s^{-1} Mpc^{-1}$ , com  $h \simeq 0.66$ , de forma que  $H_o^{-1} \simeq 14.2 \times 10^9 yr = 13.25 \times 10^{27} cm$ . Esse é o valor que usaremos nas nossas estimativas.

#### 3.2 Implicações dos Vínculos Experimentais para os Parâmetros de Friedman-Lemaître

Com  $\hbar = c = 1$ , o valor da constante de Stefan-Boltzmann é  $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60} = 59.8 cm^{-4}$ ;  $k_B$  é a constante de Boltzmann e a constante de Newton é  $G = 2.61 \times 10^{-66} cm^2$ . Usando o valor acima para  $H_o$  e a Eq. 9 (com  $\tilde{T}_o = 2.73K$ ), obtemos  $\Omega_r^o \simeq 5.10 \times 10^{-5}$ .

Usando agora a “relação do triângulo cósmico” (Eq. 4) junto com os limites experimentais para  $\Omega_m^o$  e  $\Omega_\Lambda^o$  lembrados anteriormente, encontra-se  $-0.23 < \Omega_k^o < 0.47$ . Lembre que, com as convenções presentes,  $\Omega_k < 0$  quando  $k = +1$ .

A Eq. 16, dada na ltima seção, leva a  $+0.68 \times 10^{-56} cm^{-2} < \Lambda < +1.36 \times 10^{-56} cm^{-2}$ .

Para se obter boas estimativas para as quantidades restantes, precisar-se-ia de uma medida melhor da densidade de curvatura  $\Omega_k^o$ . De fato, as Eqs. 12 e 13, junto com os limites dados anteriormente para  $\Omega_k^o$  resultam apenas na seguinte implicação para os parâmetros dimensionais constantes:  $\alpha < 6.3 \times 10^{-4}$  and  $\lambda > 0.44$ .

Note que  $\lambda$  é bastante sensível aos valores independentes de  $\Omega_m^o$  e  $\Omega_\Lambda^o$  (realmente,  $\Omega_k$ , que aparece no denominador da Eq. 12, pode ser muito pequeno); por exemplo, os valores  $\Omega_m^o = 0.13, \Omega_\Lambda^o = 0.40$  levam a  $\lambda = 0.44$  mas  $\Omega_m^o = 0.13, \Omega_\Lambda^o = 0.80$  levam a  $\lambda = 266.68$ . Falando nisso, deve-se ressaltar o fato que o comportamento das soluções analíticas da equações de Friedman é determinado essencialmente pelo valor da constante cosmológica reduzida (adimensional)  $\lambda$ , que pode ser bastante “grande”, mesmo quando a verdadeira constante cosmológica  $\Lambda$  (que é uma quantidade dimensional) é ela própria muito “pequena”.

Como já foi mencionado, os vínculos experimentais atuais implicam somente em  $\lambda > 0.44$ , mas deve-se lembrar que  $\Omega_k \simeq 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$  deve ser negativa para um universo espacialmente fechado ( $k = +1$ ); logo, se, além dos vínculos experimentais para  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  nós *supomos* que vivemos em um universo espacialmente fechado (uma hipótese – razoável – que nós faremos mais tarde, para fins de ilustração), então  $\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$  e o vínculo para  $\lambda$ , como dado pela Eq. 12, é mais restritivo; um cálculo variacional elementar mostra que o menor valor possível de  $\lambda$ , levando em conta tanto os vínculos experimentais quanto a hipótese  $k = +1$ , é obtido quando tanto  $\Omega_m$  quanto  $\Omega_\Lambda$  saturam seus limites experimentais (iguais a 0.43 e 0.8, respectivamente), de forma que  $\Omega_k \geq -0.23$  e  $\lambda \geq 82$ .

Não se deve imaginar que o valor de  $\lambda$  pode ser arbitrariamente grande: veremos na próxima subseção que, por motivos experimentais, ele também deve ter um limite superior (condição  $\lambda_- < \lambda < \lambda_+$ ).

Usando as Eqs. 14, 15, é fácil obter os limites  $T_o > 0.41, -0.75 < q_o < -0.18$  e  $\Lambda_c < 1.6 \times 10^{-56} cm^{-2}$  para os valores atuais da temperatura reduzida  $T$  da função desaceleração  $q$  e para a escala crítica de comprimento  $\Lambda_c$ .

Em vista dos resultados experimentais ( $\Omega_r^o$  pequeno e  $\Omega_k^o$  compatível com zero), pode-se ficar tentado a fazer a hipótese simplificadora  $1 = \Omega_m^o + \Omega_\Lambda^o$ , i.e., ajustar *ambos* os termos  $\Omega_k^o$  e  $\Omega_r^o$  para zero na relação  $1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda + \Omega_r$ ; note no entanto que supor  $\Omega_k + \Omega_r = 0$  em todo os tempos (sem supor que cada termo é zero, individualmente) é totalmente impossível, pois essas densidades não são constantes, e é fácil de ver, a partir das definições dessas quantidades, que tal relação só poderia ser válida em um nico momento; é óbvio que a contribuição da radiação,  $\Omega_r^o$ , embora pequena, não é *estritamente* zero. Além disso, zerar artificialmente a constante  $k$  é certamente compatível com os dados experimentais, mas deve-se estar ciente que a densidade de curvatura  $\Omega_k$  não é uma grandeza constante e que torná-la igual a zero em todos os tempos é uma simplificação artificial que provavelmente não era justificável quando o universo era mais jovem . . .

### 3.3 Uma Curiosa Coincidência

Os parâmetros  $C_m$  e  $C_r$  que aparecem na equação de Friedman e medem respectivamente a contribuição da matéria e da radiação para a energia média local, são, *a priori*, quantidades independentes. Por essa razão, a relação entre  $\tilde{T}$  (a temperatura da radiação cósmica de fundo) e  $T$  (a temperatura reduzida) envolve  $C_m$  e  $C_r$ :

$$\tilde{T}^4 = \frac{3}{8\pi G} \frac{\alpha \Lambda_c}{4\sigma} T^4 = \frac{3}{8\pi G} \frac{C_r}{3^4 C_m^4} T^4 .$$

Pode-se considerar o caso especial de um universo para o qual as duas funções  $T(\tau)$  e  $\tilde{T}(\tau)$  coincidem; isso corresponde a tomar

$$\frac{C_r}{C_m^4} = 54\pi G \sigma = 54\pi G \frac{\pi^2 k_B^4}{60} = \frac{9}{10} \pi^3 G k_B^4 .$$

Neste caso, os valores atuais das densidades  $\Omega_m^o$  e  $\Omega_\Lambda^o$  não são mais independentes:  $\Omega_r^o = 5.1 \times 10^{-5}$  é, como sempre, conhecida exatamente, pois  $\tilde{T}_o = 2.73K$  é conhecida; de novo, como de costume, temos  $\Omega_m^o = \frac{2}{3} |\Omega_k^o| T_o$  mas se medimos  $\Omega_m^o$  (por exemplo) e *supomos*  $T_o = \tilde{T}_o$ , achamos o valor de  $|\Omega_k^o|$ . Escolhendo então, por exemplo,  $k = +1$  (um universo espacial fechado), de forma que  $\Omega_k^o = -|\Omega_k^o|$ , deduzimos  $\Omega_\Lambda$  da equação  $\Omega_k^o + \Omega_m^o + \Omega_\Lambda^o + \Omega_r^o = 1$ .

Nenhuma razão teórica conhecida justificaria tomar-se  $T = \tilde{T}$ , pois essas duas quantidades poderiam ser diferentes por várias ordens de grandeza (mesmo com o valor bastante pequeno da densidade de radiação  $\Omega_r^o$ ); não obstante, por uma curiosa coincidência, se tomamos as duas densidades  $\Omega_m^o$  e  $\Omega_\Lambda^o$  sendo iguais aos seus maiores valores possíveis compatíveis com os limites experimentais (0.43 and 0.8), achamos um valor de  $T_o$  igual a 2.80; esse valor está muito próximo do valor experimental 2.73 da temperatura  $\tilde{T}_o$ . Nós não temos explicação para essa “coincidência cosmológica”.

## 4 Comportamento Analítico das Soluções

### 4.1 Comportamento Qualitativo das Soluções

A Eq. (2) pode ser escrita como

$$\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 + V_{\alpha,k}(T) = \frac{\lambda}{3},$$

com

$$V_{\alpha,k}(T) = -\alpha T^4 - \frac{2}{3}T^3 + kT^2.$$

Esta é a equação de um sistema mecânico unidimensional com “coordenada”  $T$ , potencial  $V_{\alpha,k}(T)$  (mostrado na Fig. 1) e energia total  $\lambda/3$ . A energia cinética sendo não negativa, o sistema mecânico associado descreve uma linha horizontal no plano  $(V(T), T)$ , mas nunca penetra abaixo da curva  $V_{\alpha,k}(T)$  (que corresponderia a  $\tau$  imaginário). O comprimento do segmento de linha vertical entre um ponto que pertence à curva e um ponto com o mesmo valor de  $T$ , mas que pertence à linha horizontal  $\lambda/3$  (descrita pelo sistema mecânico associado), é uma medida de  $\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2$ .

Para um dado valor de  $\alpha$  (parâmetro de radiação), e para  $k = \pm 1$ , a curva  $V_{\alpha,k}(T)$  tem tipicamente dois máximos locais. Para  $k = 1$  (universo fechado), o ponto máximo à direita ocorre para valores positivos de  $T$  e  $V(T)$ , enquanto que, para  $k = -1$  (caso hiperbólico), esse máximo é deslocado para  $T = 0$  e  $V(T) = 0$ . Para  $k = 0$  (caso plano), esse máximo desaparece e nos resta um ponto de inflexão em  $T = 0, V(T) = 0$ .

Neste artigo, quase sempre supomos que  $\alpha$  é não nulo; no entanto, deve-se notar que se  $\alpha = 0$ , a curva  $V(T)$  torna-se um polinômio cúbico (Fig. 2) e o máximo do lado esquerdo desaparece (ele se move para  $-\infty$  quando  $\alpha$  vai a zero).

Note que a figura 1 descreve somente as características qualitativas da nossa história do espaço-tempo, pois, para valores razoáveis de  $\alpha$  e  $\lambda$  (i.e., valores compatíveis com os vínculos experimentais), a coordenada vertical do máximo esquerdo deveria ser no mínimo 1000 vezes maior que a coordenada vertical do máximo direito.

Os vínculos experimentais também mostram não somente que  $\lambda$  é positiva (como é  $\Omega_\Lambda$ ) mas também que é maior que  $\lambda_-/3$  (a coordenada vertical do máximo direito) e, ao mesmo tempo, muito menor que  $\lambda_+/3$  (a coordenada vertical do máximo esquerdo). De fato, para valores pequenos de  $\alpha$ , as posições dos extremos (conforme a próxima seção) são dadas por  $\lambda_- \simeq k(1 - 3\alpha k)$  e  $\lambda_+ \simeq \frac{1}{16\alpha^3}(1 + 12k\alpha)$ ; os limites anteriores para  $\lambda$  mostram então diretamente que  $\lambda > \lambda_-$ ; além do mais, a desigualdade  $\lambda < \lambda_+$  é equivalente a  $\Omega_r^3 < \frac{27}{256} \frac{\Omega_m^4}{\Omega_\Lambda}$ , e isso é claramente válido. Infelizmente, isso não leva a um vínculo rígido para  $\lambda$ , já que o limite  $\alpha < 6.3 \times 10^{-4}$  implica somente em  $\lambda_+ > 2.5 \times 10^8$ .

O sistema mecânico associado é portanto tal que descreve uma linha horizontal, como a mostrada na Fig. 1. Tipicamente, um dado universo começa à direita da figura ( $T \rightarrow \infty$  correspondendo ao *big bang*), move-se para a esquerda (desacelerando), até que alcança o eixo vertical ( $T = 0$ ). Isso acontece na verdade em um tempo conforme finito  $\tau_f$  mas, como veremos, corresponde a um tempo cósmico  $t \rightarrow \infty$ , de forma que, para o universo em que vivemos, a história termina aí. Contudo, a solução pode ser continuada para  $T < 0$  (um raio negativo  $R$ ) até que o sistema bata contra  $V(T)$  para voltar para o infinito à direita; o sistema pula então para o infinito à esquerda, segue a linha horizontal (para a direita) até que ele bata em  $V(T)$  novamente, e volte. Esta viagem de ida e volta do sistema mecânico associado é realizada em um tempo (conforme)  $2\omega_r$  – um período da função elíptica correspondente. Ressaltamos que somente a primeira parte do movimento (do infinito à direita para a interseção com o eixo vertical) é fisicamente relevante para a matéria ordinária.

Como o raio  $R$  é proporcional a  $1/T$  (veja a Eq. 1), a discussão em termos de  $R$  é obviamente diferente: o sistema começa no *big bang*, e expande para sempre; além disso, a expansão ganha velocidade em todos os três casos  $k = \pm 1, k = 0$ . A única particularidade do caso  $k = 1$  é que há um ponto de inflexão (devido

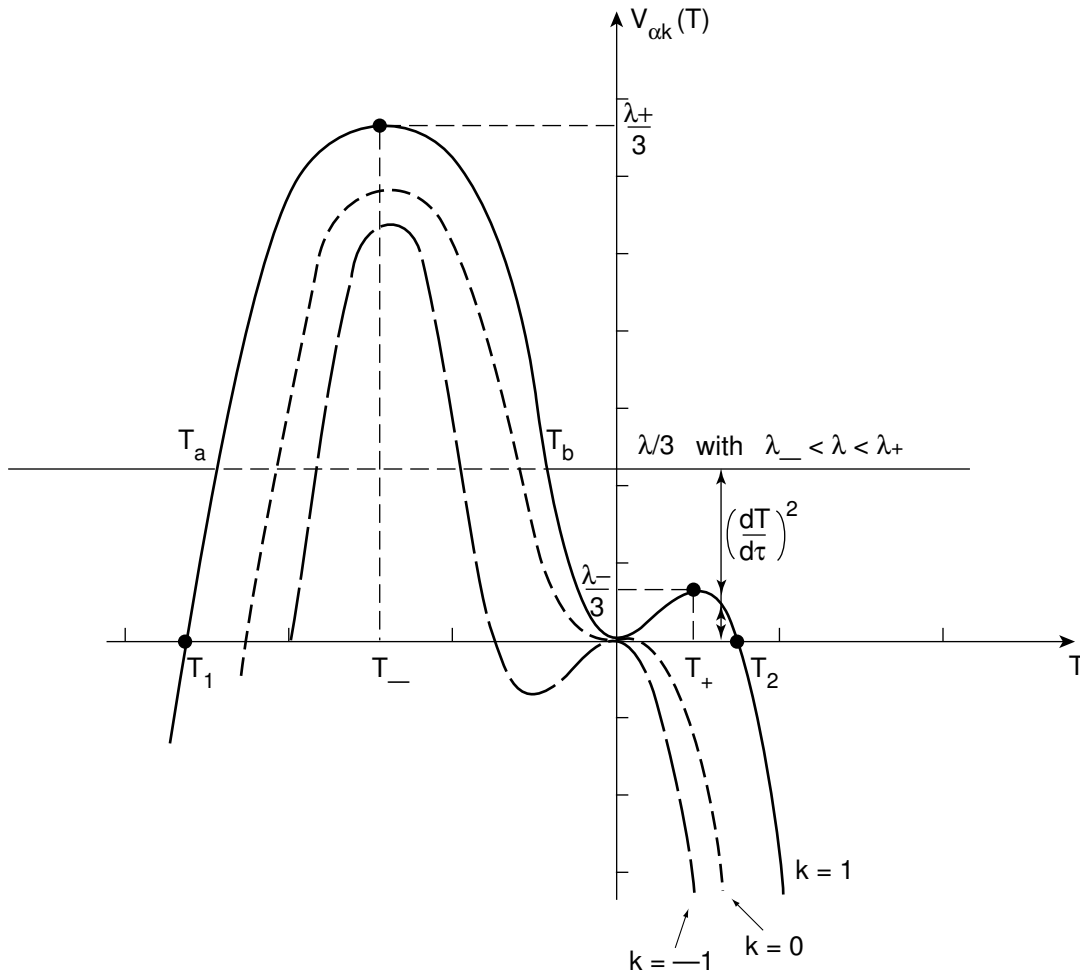


Figura 1: Potencial para o sistema mecânico associado. Caso  $\alpha \neq 0$

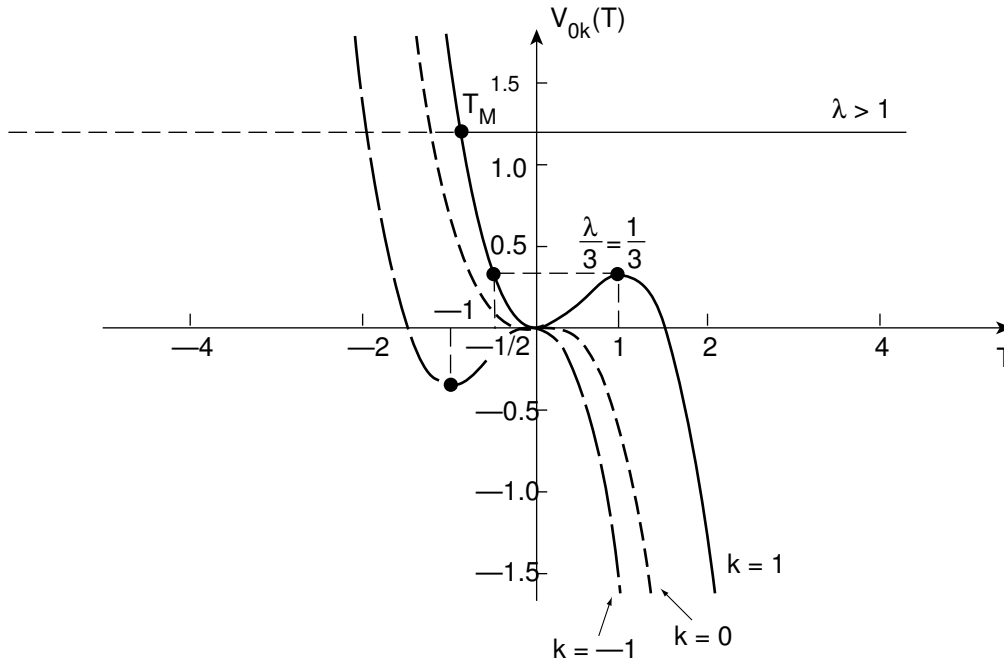


Figura 2: Potencial para o sistema mecânico associado. Caso  $\alpha = 0$

à existência de um máximo positivo no lado direito da curva  $V(T)$ : a expansão ganha velocidade de qualquer forma, mas há um tempo  $\tau_I$  para o qual a taxa de expansão torna-se zero.

## 4.2 A Curva Elíptica Associada a uma Dada Cosmologia

### 4.2.1 Características Gerais

Vamos chamar de  $Q(T)$  o polinômio de quarto grau que aparece no lado direito da equação de Friedman (Eq. 2). Seja  $T_j$  qualquer das raízes (possivelmente complexas) da equação  $Q(T) = 0$ ; então, a transformação linear fracionária

$$y = \frac{Q'(T)}{4} \frac{1}{T - T_j} + \frac{Q''(T)}{24} \quad (20)$$

leva a Eq. 2 à forma

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = P(y) \doteq 4y^3 - g_2y - g_3, \quad (21)$$

onde  $g_2$  e  $g_3$  são os dois invariantes de Weierstrass dados nas Eqs. 10,11. A solução da equação anterior é bem conhecida:  $y = \mathcal{P}(\tau; g_2, g_3)$ , onde  $\mathcal{P}$  é a função elíptica de Weierstrass associada aos invariantes  $g_2$  e  $g_3$ . Deve-se lembrar que, dada uma rede  $L$  no plano complexo, uma função elíptica  $f$  em relação a  $L$  é função meromórfica não constante que é bi-periódica em relação a  $L$  (tal que  $f(\tau + u) = f(\tau)$ , sempre que  $u$  pertencer a rede  $L$ ). É conhecido (desde Liouville) que se  $a$  é um número complexo arbitrário (incluindo o infinito), o número de soluções da equação  $f(\tau) = a$  é independente de  $a$ , se as multiplicidades são corretamente contadas: esse número é chamado de *ordem* de  $f$ . É til saber que qualquer função racional de uma função elíptica é também elíptica (em relação a mesma rede) mas que a sua ordem irá coincidir com a ordem de  $f$  somente se a transformação for linear fracionária (como a transformação 20). Finalmente, deve-se lembrar que a ordem de uma função elíptica é no mínimo dois e que a função  $\mathcal{P}$  de Weierstrass correspondente a uma dada rede é definida como a função elíptica de ordem 2 que tem um pólo de ordem 2 na origem (e conseqüentemente em todos os outros pontos de  $L$ ) e é tal que  $1/\tau^2 - \mathcal{P}(\tau)$  se anula em  $\tau = 0$ . Os dois períodos elementares que geram a rede  $L$  podem ser expressos em termos de

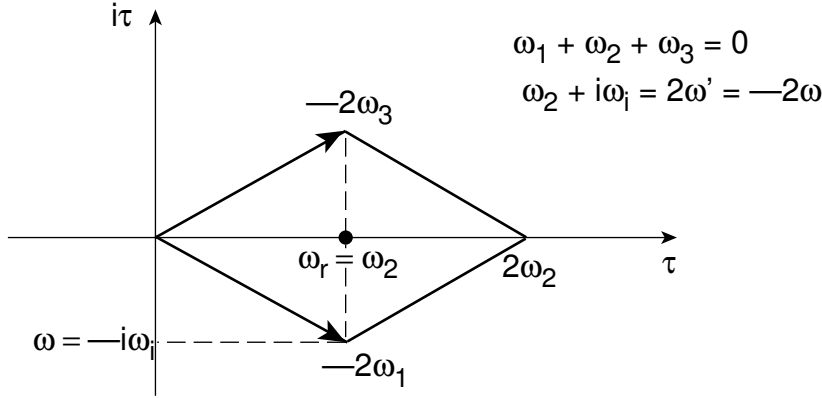


Figura 3: Uma célula elementar de periodicidade.

$g_2$  e  $g_3$ , mas, por outro lado, os invariantes de Weierstrass podem ser expressos em termos dos períodos elementares da rede  $L$ .

Esses antigos teoremas de análise levam diretamente ao fato que  $T(\tau)$  é uma função elíptica de ordem 2 e que outras quantidades que são funções racionais de  $T$  (como a função de Hubble  $H$ , a função desaceleração  $q$  ou todas as densidades cosmológicas  $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_k, \Omega_\Lambda$ ) são também elípticas em relação à mesma rede (mas elas não são de ordem 2). Neste sentido, pode-se dizer que nosso universo é completamente descrito por uma curva elíptica  $x^2 = 4y^3 - g_2y - g_3$  caracterizada pelos dois invariantes de Weierstrass  $g_2, g_3$ , ou, alternativamente, pelos dois períodos elementares que geram a rede  $L$ .

Neste caso (físico), a célula de periodicidade elementar é um losango (Fig. 3) com vértices  $\{0, \omega_r - i\omega_i, 2\omega_r, \omega_r + i\omega_i\}$ . Outras notações padrão para períodos são  $2\omega_2 \doteq 2\omega_r, -2\omega_3 \doteq \omega_r + i\omega_i$  e

$$-2\omega_1 \doteq \omega_r - i\omega_i,$$

(tal que  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ ). A transformação que expressa os meio-períodos  $\omega_{1,2,3}$  em termos dos invariantes de Weierstrass  $g_2$  e  $g_3$  (ou vice-versa) pode ser obtida tanto diretamente de uma avaliação numérica de integrais elípticas (veja abaixo) ou de algoritmos rápidos descritos em [13]; pode-se também usar a função Weierstrass Half Periods  $[\{g_2, g_3\}]$  do programa Mathematica, bem como a transformação inversa Weierstrass Invariants  $[\{\omega_1, \omega_2\}]$ . No caso  $\alpha = 0$ , o valor de  $\tau = \omega_r$  acaba sendo um mínimo global de  $T(\tau)$ ; logo, outra possibilidade de se obter  $\omega_r$  nesse caso é achar numericamente o primeiro zero da equação  $dT(\tau)/d\tau = 0$ .

#### 4.2.2 Desprezando a Radiação: o Caso $\alpha = 0$

Quando  $\alpha = 0$ , os dois pólos de  $T(\tau)$  coincidem, de maneira tal que a temperatura adimensional, a menos de uma contante aditiva ou multiplicativa, coincide com a função  $\mathcal{P}$  de Weierstrass (a transformação linear fracionária da Eq. 20 toma a forma simples  $T = 6y + k/2$ ). Note que  $\mathcal{P}$  é uma função par de  $\tau$ .

Nesse caso,

$$T(\tau) = 6[\mathcal{P}(\tau; g_2, g_3) + k/12]. \quad (22)$$

Um gráfico típico de  $T(\tau)$  para valores experimentalmente razoáveis dos parâmetros cosmológicos é dado nas Figs. 4 (universo fechado:  $k = 1$ ) e 5 (universo aberto:  $k = -1$ ).

Em ambos os casos, a parte fisicamente relevante da curva é dada pelo intervalo  $0 < \tau < \tau_f$  pois  $\tau = 0$  corresponde ao *big bang* (temperatura infinita) e  $\tau = \tau_f$  ao fim do tempo conforme: o tempo cósmico  $t = t(\tau)$  alcança uma singularidade logarítmica quando  $\tau \rightarrow \tau_f$ , de modo que, quando  $t \rightarrow \infty$ ,

o comprimento de arco descrito por um fóton nascido com o *big bang* tende ao valor finito  $\tau_f$ ; para valores de  $\lambda$  compatíveis com observações recentes, esse limite é estritamente menor que  $2\pi$  de forma que nunca será possível ver “a parte de trás de nossa cabeça”, mesmo que o universo seja fechado e que nós esperemos infinitamente muitos anos . . . .

Note que ambas as curvas mostram a existência de um ponto de inflexão denominado  $\tau_I$  nos gráficos; todavia, no caso  $k = -1$  (universo aberto), esse ponto de inflexão está localizado após o fim do tempo conforme ( $\tau > \tau_f$ ) e é, portanto, fisicamente irrelevante. A existência de tal ponto é de interesse somente no caso em que o universo é espacialmente fechado. Note que nesse caso, as observações experimentais nos dizem que o valor atual  $\tau_o$  de  $\tau$  (i.e., na data de hoje) é maior que  $\tau_I$  (e, é claro, menor que  $\tau_f$ ).

Os valores  $\tau_f < \tau < \tau_g$  correspondem a uma região classicamente proibida (temperatura adimensional negativa). Os valores  $\tau_g < \tau < 2\omega_r$  correspondem a um universo em contração, terminando num ponto singular . . . Finalmente, deve-se lembrar que  $T$  é uma função (duplamente) periódica, de modo que a mesma análise pode ser realizada em todos os intervalos  $[2p\omega_r, 2(p+1)\omega_r]$ .

Vamos repetir que  $\tau$  é um tempo *conforme* e que  $t \rightarrow \infty$  quando  $\tau \rightarrow \tau_f$ , de modo que, em ambos os casos,  $k = \pm 1$ , estamos de fato em um universo que expande para sempre, começando de um *big bang*. A curva obtida para  $k = 0$  tem os mesmos aspectos qualitativos, a menos do fato do ponto de inflexão mover-se em direção ao fim do tempo conforme:  $\tau_I = \tau_f$  nesse caso.

A forma de  $T(\tau)$ , como mostrada nas Figs. 4 e 5, está em total acordo com a discussão qualitativa feita na seção anterior. Tais figuras já foram mostradas na Ref.[5], onde as funções de Weierstrass foram numericamente calculadas a partir de algoritmos obtidos no mesmo artigo. Os mesmos gráficos podem agora ser obtidos facilmente usando, por exemplo, o programa Mathematica, (as últimas verses desse programa incorporam rotinas para as funções de Weierstrass  $\mathcal{P}$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$ ). Note, porém, que cálculos extensos envolvendo tais funções envolvendo devem provavelmente fazer uso dos algoritmos extremamente rápidos descritos na Ref.[13]; esses algoritmos usam, para a avaliação numérica dessas funções, a fórmula de duplicação conhecida para a função  $\mathcal{P}$  de Weierstrass. Além disso, o cálculo das integrais elípticas (por exemplo, cálculo dos períodos em termos dos invariantes) também pode ser realizado por um procedimento iterativo (baseado nas propriedades clássicas do valor médio aritmético-geométrico). Isso é também descrito na Ref.[13].

A fórmula de duplicação é:

$$\mathcal{P}(2z) = -2\mathcal{P}(z) + \frac{[6\mathcal{P}^3(z) - g_2/2]^2}{4[4\mathcal{P}^3(z) - g_2\mathcal{P}(z) - g_3]} .$$

Portanto, é possível obter a relação entre os valores da temperatura reduzida  $T$  em tempos (conformes)  $\tau$  e  $2\tau$ , os quais, no caso  $k = +1$ , são dados por

$$T(2\tau) - \frac{1}{2} = -2\left(T(\tau) - \frac{1}{2}\right) + \frac{[(T(\tau) - \frac{1}{2})^3 - \frac{3}{2}]^2}{4[4(T(\tau) - \frac{1}{2})^3 - 3(T(\tau) - \frac{1}{2}) - (1 - 2\lambda)]} .$$

Quando o universo é muito jovem ( $\tau$  próximo de zero), pode-se aproximar a função  $\mathcal{P}(z)$  por  $1/z^2$  e, portanto, a temperatura reduzida  $T(\tau)$  por  $6/\tau^2$ .

Pode ser til observar, neste ponto, que quando a constante cosmológica é zero (tal que temos também  $\lambda = 0$  para a constante cosmológica reduzida), obtém-se

$$T(\tau) = \frac{3}{2 \sin^2 \frac{\tau}{2}} ,$$

enquanto que, quando a constante cosmológica  $\Lambda$  é igual ao valor crítico  $\Lambda_c$  (tal que  $\lambda = 1$ ), chega-se a

$$T(\tau) = 1 + \frac{3}{2 \sinh^2 \frac{\tau}{2}} .$$

Como discutido anteriormente, medidas recentes implicam em  $\lambda > 1$ , de forma que  $T(\tau)$  é dado pela Eq. 22.

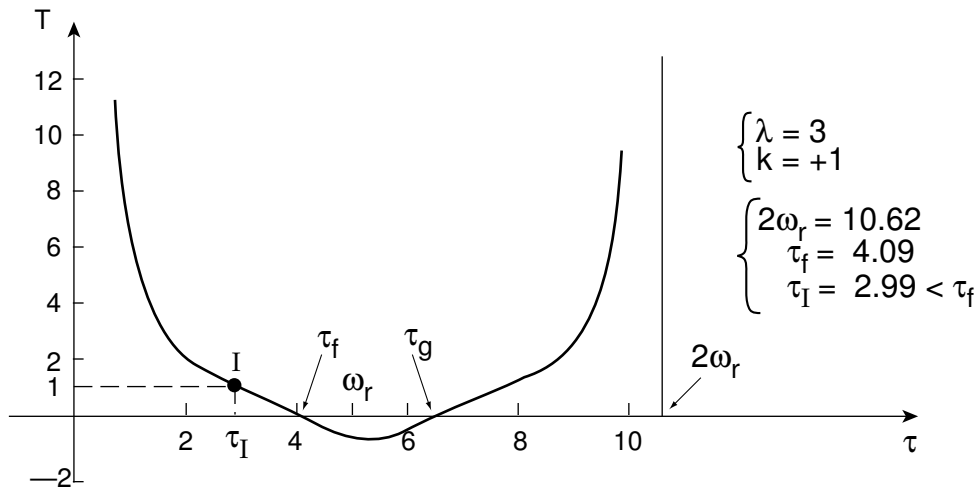


Figura 4: Evolução da temperatura reduzida. Caso fechado.

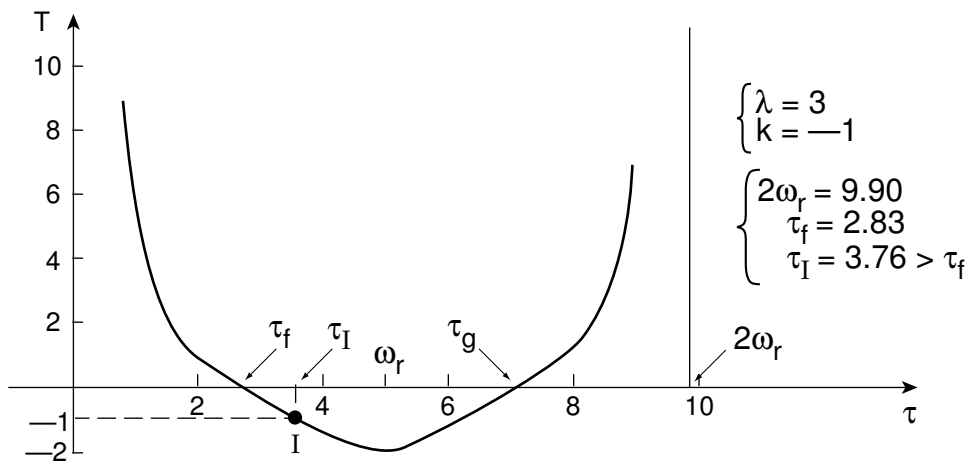


Figura 5: Evolução da temperatura reduzida. Caso aberto.



### 4.2.3 Sem Desprezar a Radiação: o Caso $\alpha \neq 0$

Esse caso, tecnicamente um pouco mais difícil, está detalhado no Apêndice 1 do artigo “Large scale geometry and evolution of a universe with radiation pressure and cosmological constant” (versão em inglês, astro-ph/0101369, dos mesmos autores). é conveniente expressar a temperatura reduzida  $T(\tau)$  em termos da função  $\zeta(\tau)$  de Weierstrass. Esta função, que é uma função ímpar de  $\tau$ , não é elíptica, mas é definida por

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\mathcal{P}(\tau),$$

e pela exigência de que  $1/\tau - \zeta(\tau)$  se anule em  $\tau = 0$ . Embora  $\zeta$  não seja elíptica, a diferença  $\zeta(\tau - u) - \zeta(\tau - v)$  é elíptica de ordem 2, com pólos em  $u$  e  $v$ , quando  $u \neq v$  são dois números complexos arbitrários. Em termos de  $\zeta$ , as quantidades  $R(\tau)$  e  $T(\tau)$  são dadas por:

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} R(\tau) = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \frac{1}{T(\tau)} = \zeta(\tau - \tau_g) + \zeta(\tau_g) - \zeta(\tau - \tau_f) - \zeta(\tau_f), \quad (23)$$

onde os dois zeros de  $T(\tau)$ ,  $0 < \tau_f < \tau_g < 2\omega_r$  são dados por (use a Fig. 1) :

$$\tau_f = \int_0^\infty \frac{dT}{\sqrt{Q(T)}},$$

$$\tau_g = \tau_f + 2 \int_{T_b}^0 \frac{dT}{\sqrt{Q(T)}}.$$

## 4.3 Determinação de todos os Parâmetros Cosmológicos: um Caso Fictício

Resumimos aqui o procedimento que deveria (idealmente) ser seguido para se especificar todos os parâmetros cosmológicos de interesse.

### 4.3.1 Um Procedimento Simples

- A partir dos resultados experimentais para os valores atuais da função de Hubble  $H_o$  e da temperatura  $\tilde{T}_o$  da radiação cósmica de fundo, calcule a densidade de radiação  $\Omega_r^o$  (use a Eq. 9).
- Melhore os limites experimentais para os valores atuais da densidade de matéria  $\Omega_m^o$  e da densidade de constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$  (sem supor que  $k$  é zero, obviamente).
- A partir da “relação do triângulo cósmico” (Eq. 4), obtenha o valor atual da função densidade de curvatura  $\Omega_k^o$ . O sinal dessa quantidade determina também o *oposto* da constante  $k = \pm 1$  (ou 0).
- A partir desses resultados para as densidades  $\Omega$ , compute os parâmetros adimensionais constantes  $\alpha$  e  $\lambda$  (use as Eqs. 13 e 12).
- A partir de  $\alpha$  e  $\lambda$  compute os dois invariantes de Weierstrass  $g_2$  e  $g_3$  que caracterizam a curva elíptica associada a nosso universo (use Eqs. 10 e 11).
- O valor atual  $T_o = T(\tau_o)$  da temperatura reduzida é obtido da Eq. 14.
- Caso decida-se por desprezar a radiação ( $\alpha \simeq 0$ ), pode-se fazer diretamente o gráfico da temperatura reduzida em termos do tempo conforme  $T(\tau) = 6[\mathcal{P}(\tau; g_2, g_3) + 1/12]$ , onde  $\mathcal{P}$  é a função elíptica de Weierstrass, usando-se, por exemplo, o programa Mathematica. O valor atual  $\tau_o$  do tempo conforme é obtido pela solução numérica da equação  $T_o = 6[\mathcal{P}(\tau_o; g_2, g_3) + 1/12]$ . Outros valores interessantes como  $\tau_f$  (o fim do tempo conforme) ou  $\tau_I$  (ponto de inflexão, só é interessante se  $k = +1$ ) podem ser determinados numericamente; por exemplo,  $\tau_f$  é obtido, com o Mathematica, graças à função FindRoot (lembre que  $\tau_f$  é o primeiro zero positivo de  $T(\tau)$ ). O valor do meio-período  $\omega_r$  pode ser encontrado pelo cálculo de uma integral elíptica mas é mais fácil determiná-lo pela solução numérica

da equação  $\frac{dT(\tau)}{d\tau} = 0$ , pois  $\tau = \omega_r$  corresponde a um mínimo global. Outra possibilidade, ainda com o Mathematica, é usar a função Weierstrass Half Periods[ $\{g_2, g_3\}$ ] (essa função nos dá como resposta um conjunto de dois períodos elementares, e duas vezes o nosso  $\omega_r$  coincide com a parte real de um deles).

- Caso decida-se tomar  $\alpha \neq 0$ , deve-se usar os resultados do Apêndice 1 do artigo (astro-ph/0101369) e determinar  $\tau_f$  e  $\tau_g$  primeiro; esses dois zeros reais de  $T(\tau)$  (dentro de uma célula de periodicidade) são dados por integrais elípticas; eles devem ser calculados numericamente (o valor  $\tau_g$  era justamente igual a  $2\omega_r - \tau_f$  no caso sem radiação, mas aqui ele tem que ser determinado separadamente). A temperatura reduzida  $T(\tau)$  é então dada, em termos da função  $\zeta$  de Weierstrass, pela Eq. 23.
- Em todos os casos, o valor atual da função desaceleração  $q_o$  (um nome ruim já que ela é experimentalmente negativa!) é dado pela Eq. 15.
- O valor da constante de Hubble permite a determinação de todas as quantidades dimensionais, em particular do parâmetro comprimento crítico  $\Lambda_c$  (Eq. 17), da constante cosmológica  $\Lambda (= \lambda\Lambda_c)$ , e dos valores atuais da escala cósmica (ou “raio”)  $R_o$  (Eq. 18) e do tempo cósmico  $t_o$  (Eq. 19).

### 4.3.2 Um exemplo

Aqui seguimos o procedimento anterior, supondo valores totalmente determinados para a constante de Hubble e para os parâmetros de densidade  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ . Obviamente, esses valores precisos ainda não estão experimentalmente disponíveis e temos que fazer uma escolha aleatória (compatível com os limites observacionais) para ilustrar o “procedimento simples” descrito anteriormente, que leva à determinação de todos os parâmetros cosmológicos de interesse. Em outras palavras, o que estamos descrevendo aqui é somente um dos cenários possíveis. Por motivo de simplicidade, desprezaremos a influência da radiação (então,  $\alpha \simeq 0$ ). Tomamos as densidades experimentais  $\Omega_m = 0.4$  e  $\Omega_\Lambda = 0.8$ . Então,  $\Omega_k = -0.2$  e  $k = +1$ . A constante cosmológica reduzida é  $\lambda = 108$ . Os invariantes de Weierstrass são  $g_2 = 1/12$  e  $g_3 = -1.00463$ . A evolução da temperatura adimensional é  $T(\tau) = 6\mathcal{P}(\tau, \{g_2, g_3\}) + 1/12$  e os seu valor atual resulta igual a  $T_o = 3$ ; esta é uma coincidência curiosa (veja a seção 3.3) pois não há razão, *a priori*, para que  $T_o$  seja igual à temperatura da radiação cosmológica de corpo negro  $\tilde{T}_o$ . O valor atual do tempo conforme, obtido pela solução numérica da equação  $T(\tau_o) = T_o$ , é  $\tau_o = 1.369$ . O fim do tempo conforme, obtido pela solução numérica da equação  $T(\tau_f) = 0$  é  $\tau_f = 1.858$ . O meio-período (real)  $\omega_r$  da função  $T(\tau)$ , que pode ser obtido pela solução numérica da equação  $T(\tau)' = 0$ , é  $\omega_r = 2.662$ . O tempo conforme no qual  $T(\tau)$  tem um ponto de inflexão pode ser obtido a partir da solução numérica da equação  $T(\tau)'' = 0$  e é  $\tau_I = 1.691$ . Note que nesse universo particular, temos  $\tau_o < \tau_I (< \tau_f)$ , de forma que ainda não alcançamos o ponto de inflexão. Usando agora o valor da constante de Hubble  $H_o = (13.25 \times 10^{27})^{-1} cm^{-1}$ , achamos uma escala de comprimento característica da matéria igual a  $\Lambda_c = 1.266 \times 10^{-58} cm^{-2}$ , de maneira que a constante cosmológica é igual a  $\Lambda = 1.367 \times 10^{-56} cm^{-2}$ . Finalmente, achamos a escala cósmica  $R_o \doteq R(\tau_o) = 2.96 \times 10^{28} cm = 3.14 \times 10^{10} yrs$  e o tempo cósmico  $t_o = t(\tau_o) = 1.24 \times 10^{28} cm$ . A Fig. 6 mostra o comportamento de  $T(\tau)$  na vizinhança de  $\tau_o$ . Neste exemplo desprezamos a influência da radiação descrita pelo parâmetro adimensional  $\alpha$  (dado pela Eq. 13); usando o valor experimental do parâmetro de densidade  $\Omega_r = 5.1 \times 10^{-5}$ , encontra-se  $\alpha = 2.77 \times 10^{-5}$ . Isto não modifica  $T_o$ , mas modifica os valores dos invariantes de Weierstrass  $g_2$  e  $g_3$ ; além disso, o comportamento de  $T(\tau)$  não é o mesmo. Levando esses valores em consideração junto com os resultados do Apêndice 1, somos levados a uma pequena modificação dos valores de  $\tau_o$  e portanto de  $t_o$ .

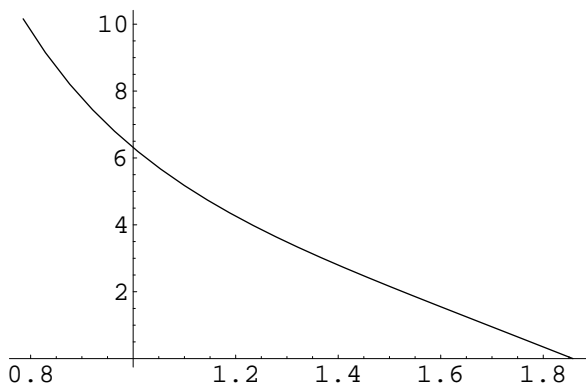


Figura 6: Evolução da temperatura reduzida na vizinhança de  $\tau_o$

## Referências

- [1] S.Perlmutter et al.: [astro-ph/9812133](#), *Astrophys. J.* **517** (1999), 565-586.
- [2] S.Perlmutter et al.: [astro-ph/9812473](#), *Bull. Am. Astron. Soc.* **29** (1997), 1351.
- [3] N.A. Bahcall, J.P. Ostriker, S. Perlmutter and P. Steinhardt: [astro-ph/9906463](#), *Science* **284** (1999) 1481-1488.
- [4] G. Efstathiou et al.: [astro-ph/9904356](#) To appear in *Mon.Not.R.Astron.* (1999).
- [5] R. Coquereaux and A. Grossmann: *Ann. of Phys.* **143**, **No. 2** (1982), 296-356. and *Ann. of Phys. Erratum* **170** (1986) 490.
- [6] M. Dąbrowski and J. Stelmach: *Ann. of Phys.* **166** (1986), 422-442.
- [7] H.H. Fliche, J.M. Souriau and R. Triay: *Astron. Astrophys.* **108** (1982), 256-264
- [8] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, “Gravitation”, Freeman, San Francisco.
- [9] G. Lemaître: *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A 53** (1933), 51.
- [10] S. Weinberg: *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989), 1-23.
- [11] S.M. Carroll: The cosmological constant. *Living Rev. Relativ.* **4** (2001), 2001-1, 80pp. (electronic).
- [12] Riess et al. *AJ*, 116, 1009 (1998)
- [13] R. Coquereaux, A. Grossmann and B. Lautrup: *IMA Jour. of Numer. Anal.* **10** (1990), 119-128.