Gravitation
&
ondes gravitationnelles

Bertrand Chauvineau

Observatoire de la Côte d'Azur, ARTEMIS

7 (intro) + 5 (outils) + 16 (RG) + 9 (OG/RG) + 5 (TTS & OG/TTS) …. = 42

Newton (1642-1726) : le premier à proposer une définition scientifique précise des notions d'espace et de temps (les « Principia », 1687).

→ conçoit un espace **et** un temps absolus (2 objets différents), dont les propriétés sont **indépendantes des phénomènes qui s'y déroulent**.

* L'espace est **plat** (3 dimensions, euclidien)

* Le temps est **uniforme** (pas d'instant privilégié)

Espace-temps de Newton : espace-temps **plat**, la séparation de l'espace-temps en espace + temps étant **indépendante de l'observateur qui les mesure**

Espace-temps de Minkowski (relativité restreinte) : espace-temps **plat**, mais la séparation des notions d'espace et de temps **dépend de l'observateur qui en fait les mesures** (2 évts simultanés pour un observateur ne le sont pas pour un autre)

… mais on peut très bien, a priori, concevoir des espace-temps **non plats**, possédant une géométrie plus complexe.

Mouvements inertiels (dans un espace-temps donné) **:**

déterminés par les <u>seules</u> propriétés de l'espace-temps (ou espace + temps)

→ Pas de sollicitation extérieure (pas de forces)

Question : dans un **espace-temps plat**

quelles sont les **propriétés des mouvements inertiels ?**

Réponse : mouvements **rectilignes** et **uniformes**

→ **<u>Principe d'inertie de Newton</u>**

Espace-temps plat + pas de force (mvt inertiel) → mvt rectiligne uniforme

Observations ?

Les mouvements de la Lune et des planètes **ne sont pas** rectilignes uniformes.

→ **Que peut-on en conclure ?**

→ 2 solutions « simples » : les planètes…

1 - …se déplacent dans un **espace-temps plat**, mais subissent l'action d'une **force**

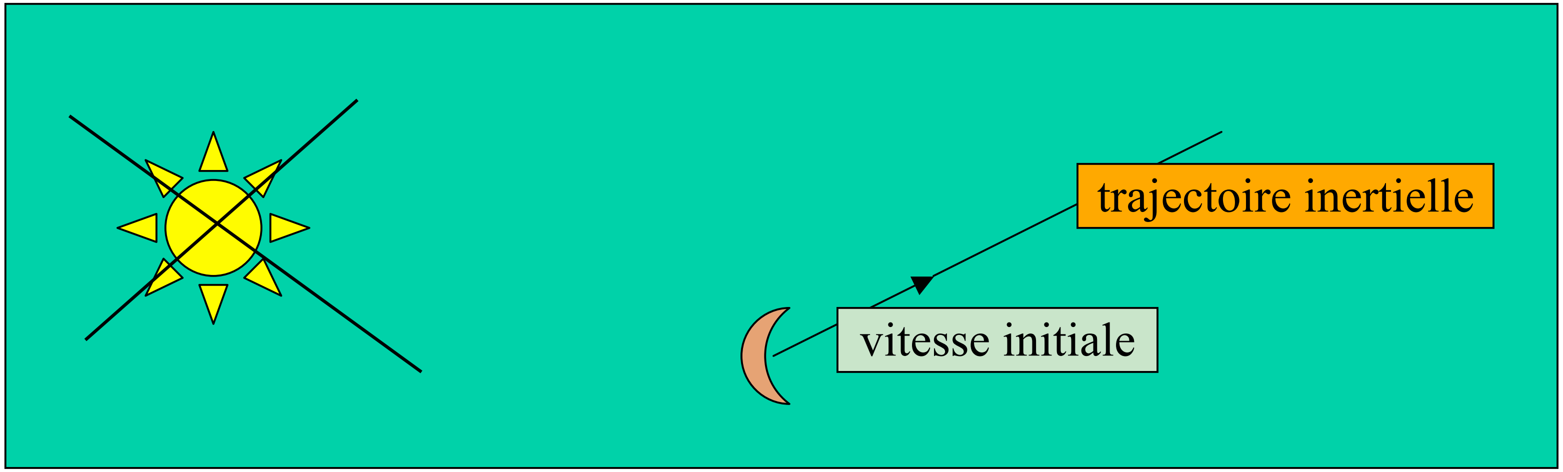
→ théorie de Newton (gravitation universelle)

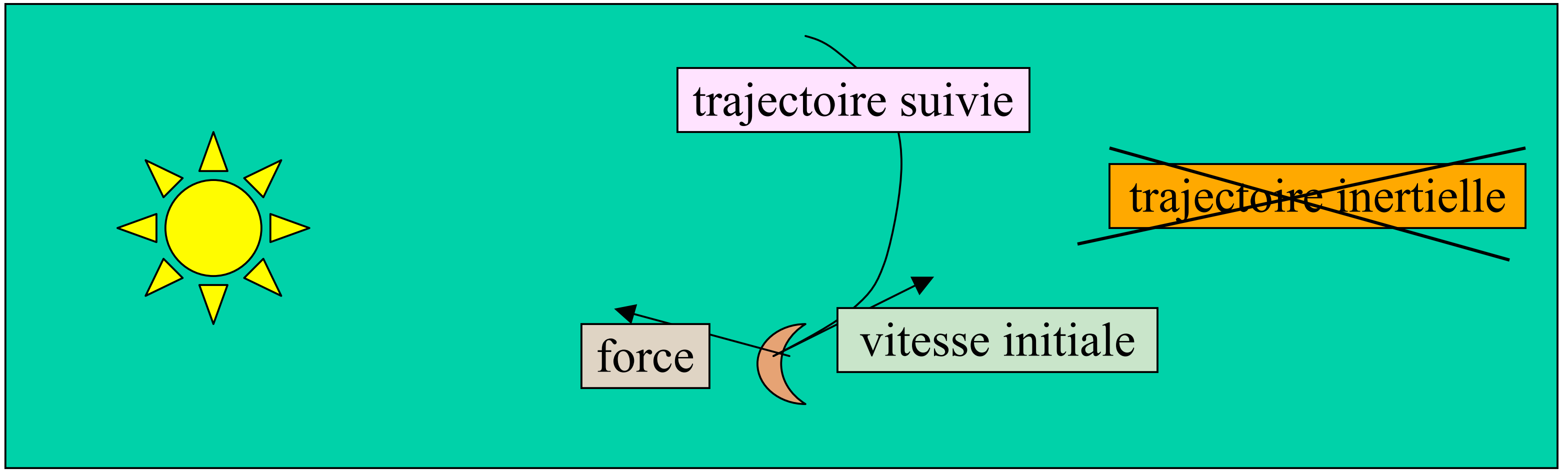
2 - …décrivent bien des **mvts inertiels**, mais dans un **espace-temps non-plat**

→ théorie d'Einstein (relativité générale), ….

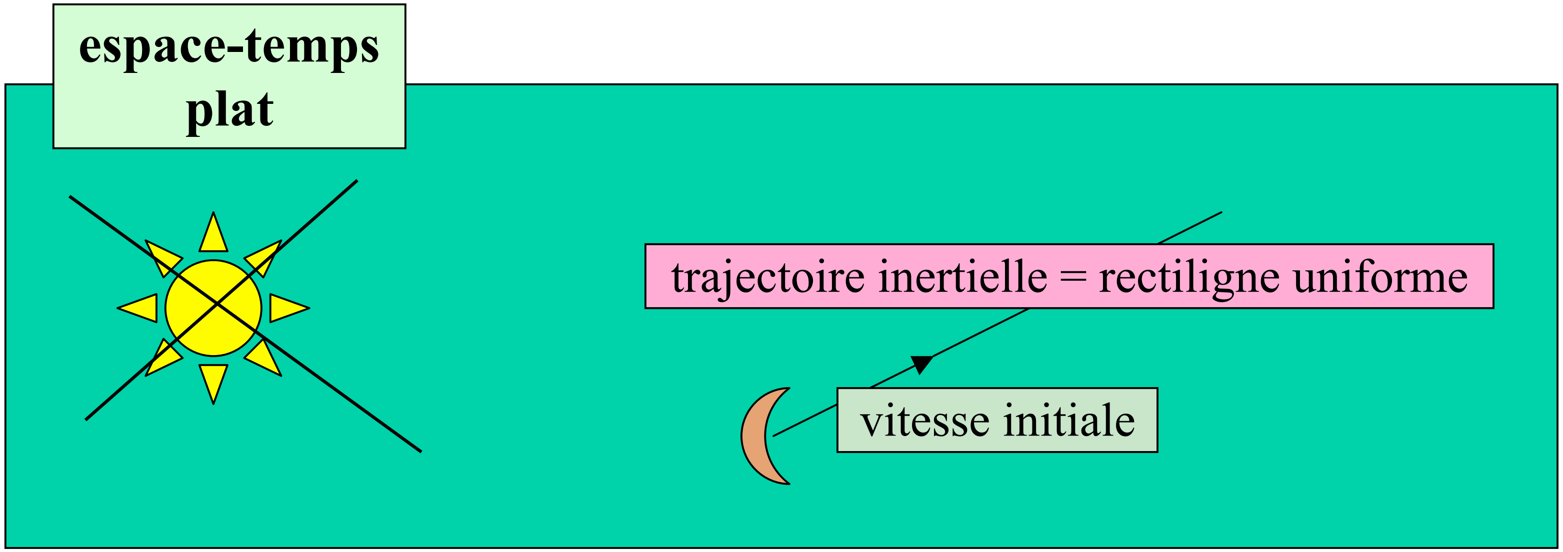
La gravitation d'après **Newton** (« gravitation universelle »)

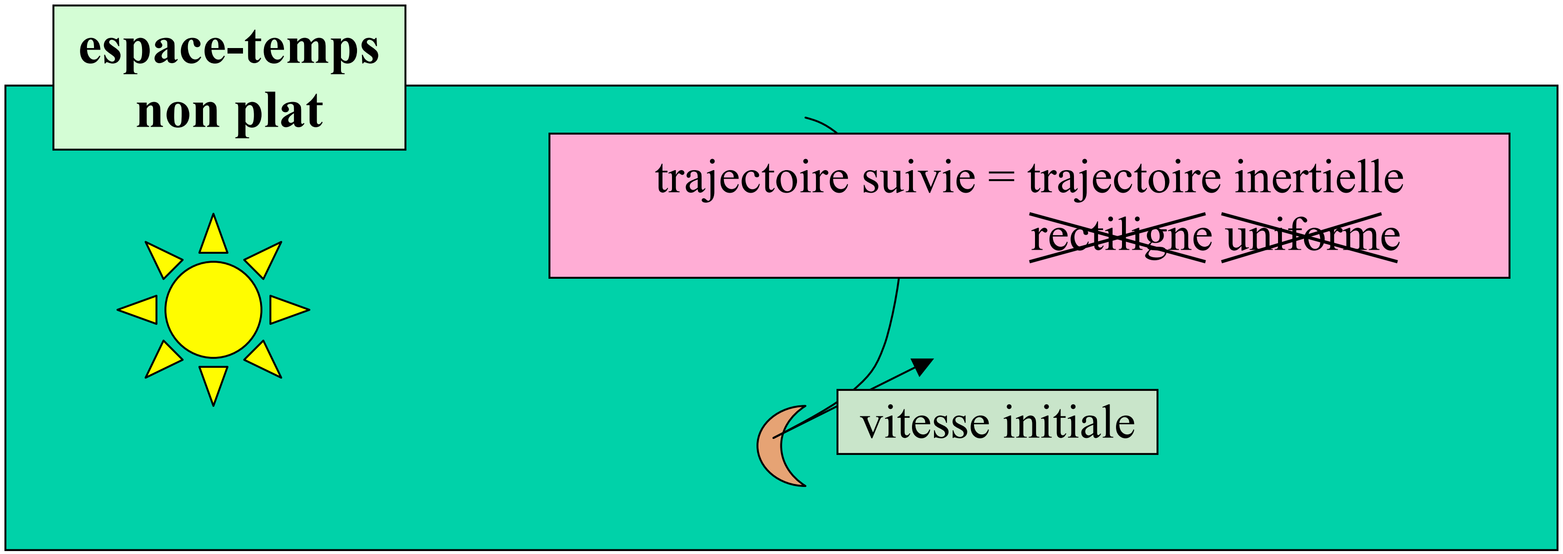
L'espace-temps (espace + temps) est plat dans tous les cas





La gravitation d'après **Einstein** (relativité générale)





Succès de la théorie de Newton

- explique au même niveau les mouvements planétaires et de chute libre (terrestre)
  → la Lune est en chute libre sur la Terre …

- explique théoriquement les lois de Kepler

- comète de Halley :1531,1607,1682 → 1759

- découverte de Neptune (1846)

- ……. etc …….

Échec(s) de la théorie de Newton

(- ne peut expliquer pourquoi le mvt d'une particule ne dépend pas de sa masse)

(- gravitation = action instantanée) ← ← ←

- le mvt de Mercure **n'est pas expliqué** par la théorie (écart faible, mais mesurable)

Succès de la relativité générale

- redonne la théorie de Newton en « première approximation »

+ ……...

- explique pourquoi le mouvement d'une particule ne dépend pas de sa masse

- la gravitation **n'est pas** une action instantanée (ondes gravitationnelles) ← ← ←

- **explique complètement le mouvement de Mercure**

- déviation de la lumière & effet Shapiro

- lentilles & mirages gravitationnels

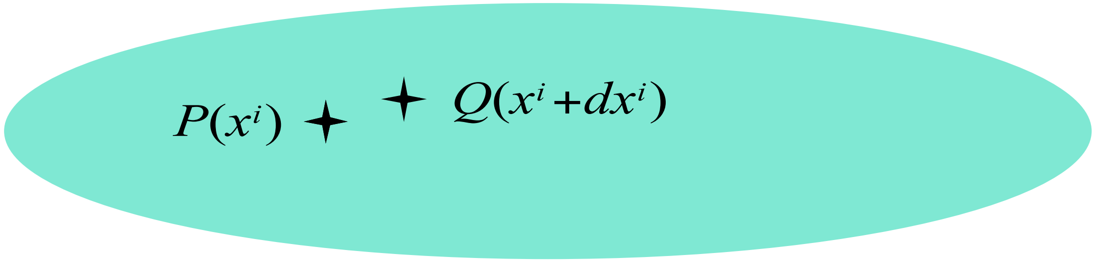
- le pulsar binaire PSR 1973+16 (entre autres)

- théorie jamais **(????)** mise en défaut à ce jour

- ……….

Deux (trois ….) mots sur la **géométrie d’une variété**

la **géométrie** d’une variété (d’un ensemble de points) est **caractérisée par les « coefficients »** (pouvant dépendre du point) devant les termes en différentielles des coordonnées dans l’expression du carré de l’élément de « **longueur** » (de l’invariant) entre 2 points voisins, **à un changement de coordonnées près**.



$ds^2 = dx^2 + dy^2$ plan euclidien (coord. cart.)

$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2$ sphère (2 dim) ($d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$)

$ds^2 = dx^2 + x^2 dy^2$ (localt) plan euclidien (coord. pol.) ($dr^2 + r^2 d\theta^2$)

($X = x\cos y$, $Y = x\sin y \rightarrow ds^2 = dX^2 + dY^2$)

$ds^2 = -dx^2 + dy^2$ plan pseudo euclidien de Minkowsky (coord. cart.)

$ds^2 = dxdy$ plan pseudo euclidien de Minkowsky ($x = X + Y$, $y = -X + Y$)

Tenseur métrique (définition) :

En général : $$ds^2 = \left(\sum_{\alpha,\beta}\right) g_{\alpha\beta}\left(x^\lambda\right) dx^\alpha dx^\beta$$
$$\equiv g_{00}\left(x^\lambda\right) dx^0 dx^0 + 2g_{01}\left(x^\lambda\right) dx^0 dx^1 + \ldots. + g_{11}\left(x^\lambda\right) dx^1 dx^1 + \ldots.$$

$g_{\alpha\beta}$: (composantes du) **tenseur métrique** (les « coefficients », diapo précédente)

→ définit l'**intervalle** (généralise la notion de « longueur ») **entre 2 évts voisins**.
C'est une grandeur entre ces 2 évts qui **ne dépend pas du système de coordonnées**.

2 évts voisins : (t,x,y,z) et $(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$ ou $\left(x^\alpha\right)$ et $\left(x^\alpha + dx^\alpha\right)$

Espace-temps de Newton : $ds^2 = dt^2$ → caractère absolu du temps

Espace-temps de Minkowsky : $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ → relativité du temps

Espace-temps localement minkowskiens : $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ (si $ds^2 \leq 0$)

→ intervalle de temps propre entre ces 2 évts

Variété plane (sans courbure) :

Il existe un système de coordonnées dans lequel toutes les composantes du tenseur métrique sont constantes

Exemples de variétés planes à 4 dimensions :

- L'espace euclidien (à 4 dimensions)

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad > \text{ou} = 0$$

$$\text{ou} \quad ds^2 = dw^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (\text{ coord. semi sphériques })$$

- L'espace-temps de Minkowsky

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad > \text{ou} < \text{ou} = 0$$

Propriété (info ….) **:**

une **variété est plane** ssi la notion de « **transport parallèle** » (par « connexion métrique ») est **indépendante du chemin suivi**

Variété NON plane (AVEC courbure) :

dans tout système de coordonnées, au moins une des composantes du tenseur métrique dépend des coordonnées

En général : $$ds^2 = \left(\sum_{\alpha,\beta}\right) g_{\alpha\beta}\left(x^\lambda\right) dx^\alpha dx^\beta$$

$$\equiv g_{00}\left(x^\lambda\right)dx^0 dx^0 + 2g_{01}\left(x^\lambda\right)dx^0 dx^1 + ... + g_{11}\left(x^\lambda\right)dx^1 dx^1 + ...$$

décrit une variété non plane, sauf si les composantes du tenseur métrique satisfont des conditions très contraignantes (annulation des composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, propriété traduisant le fait qu'il existe un système de coordonnées dans lequel toutes les composantes du tenseur métrique sont constantes)

Courbes **géodésiques**

ce sont les courbes $x^\alpha(p)$ qui extrêmisent la distance entre 2 points fixes donnés

$$\delta \int_A^B ds = 0 \qquad \left(ds = \sqrt{\left| g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right|} \right)$$

Équation différentielle des géodésiques (Lagrange) :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dp^2} + \left(\sum_{\alpha,\beta} \right) \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(x^\sigma) \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0 \qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\left(g_{\alpha\beta}, Lin(\partial g_{\alpha\beta})\right) \text{ (connexion métrique)}$$

si p est une mesure de la « longueur » le long de la courbe considérée

➔ **paramétrisation « affine »** (p = paramètre affine)

→ Si espace-temps de Minkowsky en coordonnées cartésiennes :

géodésiques = droites de l'ET, càd mvts rectilignes uniformes

➔ Dans les **espace-temps non-plats**, les courbes **géodésiques** correspondent aux **mouvements inertiels**, c'est-à-dire aux mouvements libres (ce résultat sera une **conséquence des équations du champ**)

« Géométrisation » de la théorie de Newton

But : transformer « loi de Newton » + « loi du mvt » en une « loi des géodésiques »

(particules d'épreuves dans un potentiel donné)

(moindre action) $\delta\int L dt = 0$ $\quad (L = T - U)$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ (courbes geod) $\delta\int ds = 0$

OK si on pose : $$ds^2 = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

c'est-à-dire que les fonctions x(t), y(t), z(t) dérivées des 2 principes variationnels coïncident à l'ordre le plus bas, i.e. à l'ordre 1 en U ou en v^2 ($U \sim v^2$).

On voit que, dans l'interprétation géométrique, **c'est la partie temporelle et non la partie spatiale** de la métrique de Minkowsky qui est affectée

→ importance du concept d'espace-temps

(→ « échec » du programme de Riemann)

Découverte espace-temps :

point de départ de la physique théorique moderne

Mais la métrique $ds^2 = -\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$

n'a pas été construite à partir d'une **théorie géométrique** de la gravitation ….

→ Comment construire une telle théorie ?

<u>Théorie « de force »</u> (Newton) : **champ gravitationnel** ←→ U (potentiel)

relié au contenu matériel par éq de Poisson (forme locale de la loi en $1/r^2$) :

$$\underline{\Delta U = 4\pi G\rho}$$

Puis (autre chose ….), loi du mouvement induit sur les corps présents (particules d'épreuve et sources) dans ce champ gravitationnel :

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$$

Théorie « géométrique » : **champ gravitationnel** ←→ tenseur métrique

relié au contenu matériel par une équation de champ (correspond à éq de Poisson)

Équation d'Einstein (relativité générale) :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

($R_{\alpha\beta}$ et R : tenseurs de courbure, dépendent de $g_{\mu\nu}$)

($T_{\alpha\beta}$: tenseur impulsion énergie du contenu "matériel")

Géométrie de l'espace-temps **reliée** à son contenu matériel plutôt que **déterminée** par son contenu matériel car la configuration de la distribution matérielle (ainsi que l'expression du tenseur impulsion-énergie) **dépend explicitement de la géométrie, donc de la solution**

Nouveauté (versus approche Newton) : **loi du mouvement induit** sur les corps présents (particules d'épreuve & sources) dans ce champ gravitationnel est (en un certain sens, et partiellement) **contenue dans les équations du champ**

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$ conservation énergie + loi mouvement

* Tenseur énergie-impulsion du fluide parfait : $T_{\alpha\beta} = \left(\rho c^2 + P\right) u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta}$

$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow$ conservation énergie + Euler (relativiste)

* Équation d'Einstein : redonne, à l'ordre le + bas

- l'équation de Poisson
- la « métrique de Newton » (dans les conditions requises)

point de départ du formalisme PPN (Parametrized Post-Newtonian)

* L'équation d'Einstein dans le vide : $R_{\alpha\beta} = 0$

a permis :

- de résoudre le problème du périhélie de Mercure ;
- de calculer la déviation des rayons lumineux rasant le Soleil ;
- ……
- la théorie (de la propagation) des **ondes gravitationnelles**

Quelques points & résultats importants à avoir en tête

- R1: la géométrie de l'espace-temps est liée à son contenu matériel (éq d'Einstein)

- R2: les solutions **physiquement admissibles** sont nécessairement **localement minkowskiennes**, càd que, en tout point, on peut faire un chgt de coordonnées → (T,X,Y,Z) (= coord spatio-temporelles usuelles) tel qu'on a, **en ce point**

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \qquad (-c^2 dT^2 + \ldots .)$$

- R3: les particules d'épreuves **libres** suivent des **géodésiques** de cet espace-temps (géodésiques de « longueur » nulle si lumière)

-R4: 2 évts (x) et (x+dx) peuvent se trouver sur la trajectoire d'univers d'une **même** particule ssi (mvt libre ou non) :

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \;\leq\; 0 \qquad (\text{exprime que } v \leq c)$$

- R5: le long de la ligne d'univers d'une particule, l'intervalle de **temps propre** séparant 2 évts voisins (x) et (x+dx) est donné par :

$$d\tau^2 = -ds^2 \qquad (-ds^2/c^2)$$

et sa valeur est indépendante du syst de coord utilisé pour mener le calcul (sur une géodésique, temps propre = paramètre affine)

Géométrisation du champ gravitationnel → **problèmes** « conceptuels » dans la **formulation des problèmes** … ☹

Imaginons qu'on pose le pb suivant :

« Soient 3 corps massifs fixes A,B,C tels que dist(AB)=D, dist(BC)=D', dist(CA)=D''. Déterminer le champ gravitationnel induit. »

* En théorie de **Newton** : OK, le sens est clair.

* En **RG** : les valeurs de D, D' et D'' font référence aux propriétés géométriques de l'espace-temps.

Or, **<u>c'est précisément ce qu'on cherche !!!!</u>**

puisqu'on assimile précisément la gravitation aux propriétés géométriques de l'espace-temps …

(… sans parler du problème de savoir ce qu'est la masse en RG …)

Autre « problème » : **Attention au sens des variables !!!!!**

Newton, Minkowsky : interprétation spatio-temporelle des variables est clair

← car statut défini **a priori**, càd indépendemment du chp grav (inconnu a priori)

* Newton : t = temps mesuré pour tout le monde
x,y,z : repérage dans l'espace

* Relativité restreinte : $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

t = temps mesuré par un observateur au repos

* Relativité générale : t,x,y,z ne sont que des variables permettant de **repérer les évènements** dans l'espace-temps

→ non seulement une variable nommée « t » (dans une certaine métrique) ne représente généralement pas un temps mesuré, mais elle ne représente même pas forcément un temps !!!

(Idem pour x, y, z, r, u, v, ……)

<u>Illustration sur la **métrique de Schwarzschild**</u> (coordonnées de Schwarzschild)

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$ (sol EE dans le vide)

$$= g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$ $(\text{unités relat} : G = c = 1)$

Or, métrique minkowskienne → $ds^2 = -d(\text{temps})^2 + d(\text{espace})^2$

$r>2m \Rightarrow g_{00}<0 \;\; et \;\; g_{11}>0 \Rightarrow$ t = variable temporelle , r = variable spatiale

$r<2m \Rightarrow g_{00}>0 \;\; et \;\; g_{11}<0 \Rightarrow$ t = variable <u>SPATIALE</u> , r = variable <u>TEMPORELLE</u>

Conséquences ?

- Métrique de Schw **n'est pas stationnaire** partout !!!

- Région r < 2m **non stationnaire** : trou noir (ou fontaine blanche)

Esp-tps de Newton ? Soient variables (t,r) : <u>t = temps, r = espace **partout**</u>

Changement de variables (t,r) → (t’,r’) défini par : $t' = \dfrac{t + r^3}{1 + r^2} \qquad r' = \dfrac{1 + rt}{1 + r^2}\, r$

- pour r = 0 : dt’ = dt et dr’ = dr

- pour r = ∞ : dt’ = dr et dr’ = dt   !!!

$dt' = dt$

$dr' = dr$

$\dfrac{\partial(t', r')}{\partial(t, r)} = 0, \infty$

$\ldots . dt' = dr$

$\ldots . dr' = dt$

0 $\longrightarrow$ $\ldots . \infty$

r

(fausse) singularité

On peut très bien repérer les évènements avec les variables (t’,r’), et écrire les lois de la physique en utilisant ces variables (pas pratique, mais possible !!!!)

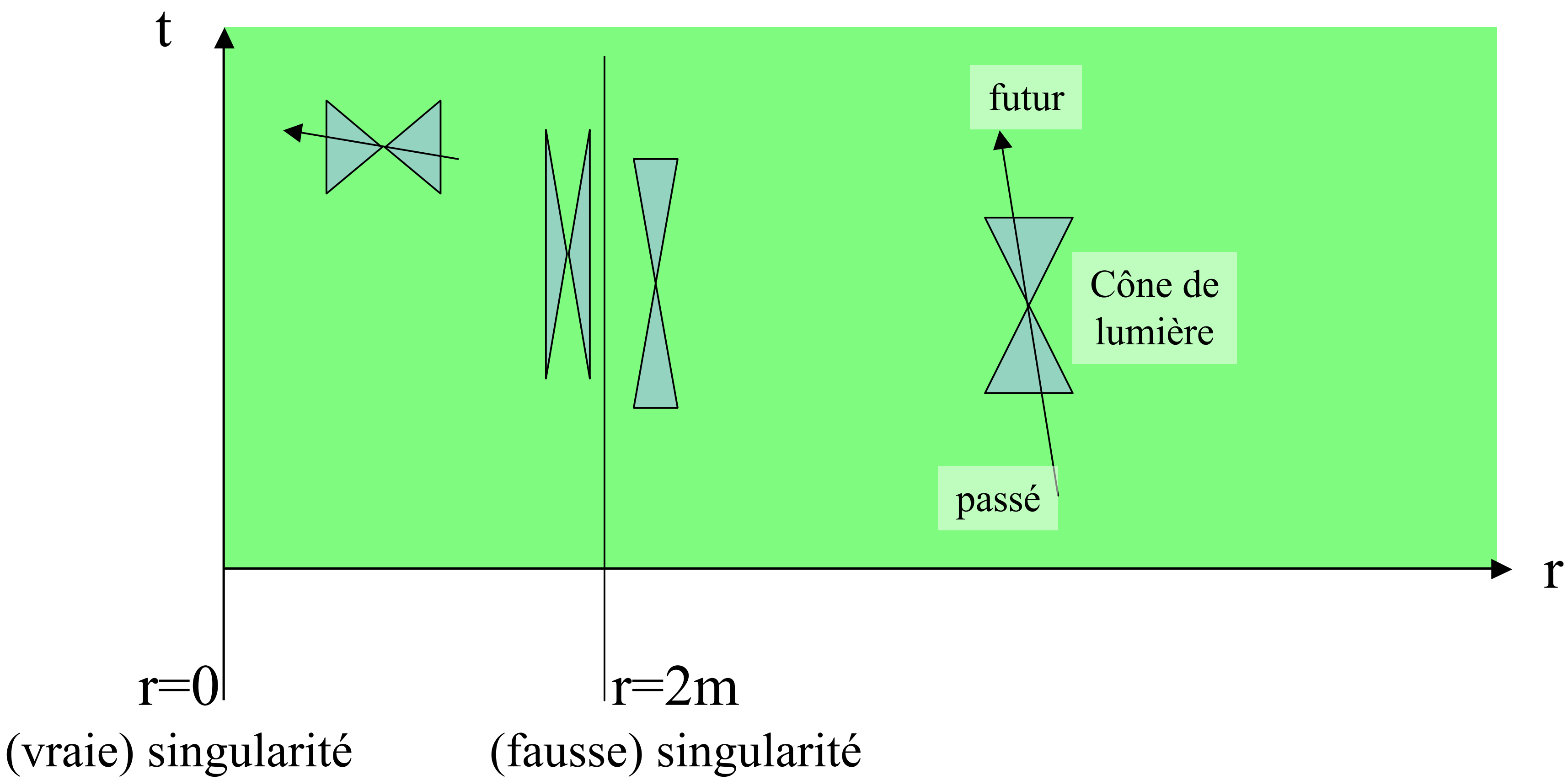
En RG, on est **génériquement** dans ce genre de situation.

Pourtant (métrique de Schwarschild), les coordonnées de Schwarschilld sont **a priori simples** par rapport à certains critères (forme minkowskienne à l’infini, ….)

r = 0 : ce n’est pas un « centre » (terminologie usuelle très confusing)
mais « une » **date**, « un » **instant**.

Une fois traversé l’horizon, r ne peut varier que dans un sens

→ correspond à **l’écoulement du temps** (flèche du temps).



Autre exemple ?

La métrique cosmologique de De Sitter, qui décrit un univers vide avec constante cosmologique

$$ds^2 = -\left(1-\Lambda r^2/3\right)dt^2+\left(1-\Lambda r^2/3\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

si $\Lambda > 0$, on voit que :

* t est une variable spatiale et r une variable temporelle pour $r < \sqrt{3/\Lambda}$

* r est une variable spatiale et r une variable temporelle pour $r > \sqrt{3/\Lambda}$

Ces 2 exemples illustrent que le **statut spatio-temporel des coordonnées n'est généralement pas le même dans toutes les régions** de l'espace-temps considéré

Question : est-il (tout de même) possible **d'éviter ce genre de situation** (en RG) ?

Réponse : **oui**, à condition d'**imposer des contraintes a priori** au syst de coord.

En RG, syst coord arbitraire → 4 degrés de liberté (← 4 dimensions)

➔ on peut **imposer 4 contraintes a priori** au tenseur métrique → **choix de jauge**

Par exemple : $g_{00} = -1$ et $g_{0k} = 0$ → **Coordonnées synchrones**

D'où : $$ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 + g_{ij}dx^i dx^j \qquad (\, i,j,k,\ldots = 1,2,3\,)$$

➔ $x^0 =$ var temp. (partout) , $x^i =$ var spatiales (partout)

Mais **attention : pas toujours les systèmes de coordonnées les plus pratiques !!!**

exemple : métrique cosmologique de Robertson-Walker (a(t) ← éq d'Einstein)

$$ds^2 = -\,dt^{\,2} + a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \qquad (\, k = 0, \pm 1\,)$$

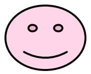
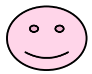
Métrique de Schwarzschild en coordonnées (synchrones) de Lemaitre-Rylov

(τ,ρ) defini par : $\tau = t + \int \sqrt{\frac{2m}{r}} \frac{dr}{1-\frac{2m}{r}}$ $\qquad \rho = t + \int \sqrt{\frac{r}{2m}} \frac{dr}{1-\frac{2m}{r}}$ $\qquad$ (en fait : ±)

$$\Rightarrow \qquad r^3 = 2m \times \frac{9}{4} (\rho - \tau)^2$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + (2m)^{2/3} \left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{-2/3} d\rho^2 + (2m)^{2/3} \left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{4/3} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

Jeu de coordonnées tel que métrique :

- synchrone 
- « singularité » r = 2m a disparu !!! (r = 0 tjs présente) 
- time-dependent 

Métrique de Schwarzschild en coordonnées (non synchrones) de Kruskal-Szekeres

$$r > 2m \qquad u = \exp\left(\frac{r}{4m}\right)\sqrt{\frac{r}{2m} - 1}\,\cosh\left(\frac{t}{4m}\right)$$

$$v = \exp\left(\frac{r}{4m}\right)\sqrt{\frac{r}{2m} - 1}\,\sinh\left(\frac{t}{4m}\right)$$

$$r < 2m \qquad u = \exp\left(\frac{r}{4m}\right)\sqrt{1 - \frac{r}{2m}}\,\sinh\left(\frac{t}{4m}\right)$$

$$v = \exp\left(\frac{r}{4m}\right)\sqrt{1 - \frac{r}{2m}}\,\cosh\left(\frac{t}{4m}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad u + v > 0$$

$$\rightarrow \qquad ds^2 = \frac{32m^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{2m}\right)\left(-dv^2 + du^2\right) + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

$$\text{avec} \qquad \left(\frac{r}{2m} - 1\right)\exp\left(\frac{r}{2m}\right) = u^2 - v^2 \qquad \rightarrow \qquad r(u,v)$$

($u + v$ quelconque $\leftrightarrow$ extension Kruskal de la métrique de Schw)

Coordonnées non-synchrones, mais v = coordonnée temporelle partout

Les coordonnées synchrones possèdent des (d'autres) propriétés sympathiques ….

1 - la variable x^0 représente le temps propre pour tout observateur **au repos**

2 – les horloges (voisines) **au repos** sont synchronisées entre elles

Et surtout :

3 - *théorème* : **dans un système de coordonnées synchrones, les courbes de coordonnées spatiales constantes sont des géodésiques** (i.e. mvts inertiels)

Autrement dit : les coordonnées synchrones « suivent » (un mvt possible pour) la matière en mvt de chute libre (coordonnées « comobiles »).

→ Métrique de Robertson-Walker : coordonnées comobiles
galaxies au repos = mouvement possible (mvt inertiel).

Remarque importante :

2 particules de **coord spatiales constantes** (donc en mvts inertiels) **ne sont pas à distance constante !!!** (métrique time-dépendante !)

Un peu plus sur les « choix de jauge »

* La « jauge synchrone » est définie par : $g_{00} = -1$ et $g_{0k} = 0$

c'est-à-dire par la **donnée explicite de 4 des composantes du tenseur métrique**.

* Ce n'est **pas toujours le cas**. Souvent, la jauge est définie par **4 équations aux dérivées partielles** portant sur les composantes du tenseur métrique.

Par exemple, la **jauge harmonique** (JH) (→ éq propag ss forme standard) :

$$\boxed{g^{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad g^{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right) = 0$$

(ou forme linéarisée ...)

ne définit pas complètement la jauge

→ possibilité contraintes supplémentaires (si compatibles avec JH !!!)

Analogie : une fonction f(x) définie par une éq différentielle : f '' = 3x

→ ne définit f qu'à une fonction affine près.

Si on impose en plus une autre condition, telle que f ' = 1/x , il n'y a pas de solution.

Cependant, on peut imposer une condition « compatible » : f(0) = 1 , f'(2) = 0 , ….

Comportement d'une perturbation gravitationnelle en relativité générale

Le problème :

1 - on considère un champ gravitationnel donné …

→ métrique $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$

2 - … et une perturbation de ce champ gravitationnel

→ métrique $g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$

3 - → question :

comment se « comporte » cette perturbation gravitationnelle $h_{\alpha\beta}$?

NB : les 2 métriques $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ sont des **solutions de la relativité générale**.

On ne considérera pas ce problème dans toute sa généralité

→ **simplifications**

Simplification 1 : on ne considérera que des solutions **dans le vide** (i.e. vide dans la région où on étudiera la perturbation, c-à-d qu'on ne regarde pas ce qui se passe au niveau des sources)

→ Équation d'Einstein dans le vide : $R_{\alpha\beta} = 0$ (pour $\bar{g}_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$)

Simplification 2 : on considérera que la solution **non perturbée** est la métrique de **Minkowsky** (i.e. vide partout)

→ $g_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ où $m_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$

Simplification 3 : on considérera la forme **linéarisée** des équations en la perturbation

→ $|h_{\alpha\beta}| << 1$

$$\rightarrow \quad 2R_{\alpha\beta} = -m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} + m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\alpha \bar{h}_{\beta\nu} + m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\beta \bar{h}_{\alpha\nu}$$

où $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h m_{\alpha\beta}$ et $h \equiv m_{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}$

$$m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(opérateur dalembertien)}$$

→ équation dans le vide : $m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} - m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\alpha \bar{h}_{\beta\nu} - m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\beta \bar{h}_{\alpha\nu} = 0$

Équation linéaire, mais tout de même un peu compliquée ….

Choix de jauge pour simplifier les équations

Jauge harmonique (forme linéarisée) → $m_{\mu\nu}\partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} = 0$ (JH)

équation en JH : $m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} = 0$

D'où le système à résoudre :

1 - équation du champ (en JH) : $m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} = 0$ (éq de propag standard)

→ **propagation de la perturbation gravitationnelle**
à la vitesse de la lumière (ondes gravitationnelles)

2 - condition de JH : $m_{\mu\nu}\partial_\mu \overline{h}_{\alpha\nu} = 0$

1 linéaire → superposition (ondes planes si loin des sources)

Propag suivant l' « axe z » (orientation du repère) : $h_{\alpha\beta}(t,x,y,z) = f_{\alpha\beta}(t-z)$

10 fcts d'1 variable

Mais ces fonctions doivent aussi satisfaire la condition de JH ….

2 $\Rightarrow$ $-\partial_0 \bar{h}_{0\alpha} + \partial_3 \bar{h}_{3\alpha} = 0$ $(3 \Leftrightarrow z)$ et on a : $\partial_3 = -\partial_0$

D'où : $\bar{h}_{0\alpha}' + \bar{h}_{3\alpha}' = 0 \Rightarrow \bar{h}_{0\alpha} + \bar{h}_{3\alpha} = 0$ (sans perte de généralité)

$$\begin{cases} f_{00} + f_{11} + f_{22} + f_{33} + 2f_{03} = 0 \\ f_{01} + f_{13} = 0 \\ f_{02} + f_{23} = 0 \\ 2f_{03} + f_{00} - f_{11} - f_{22} + f_{33} = 0 \end{cases}$$

Toute solution de ces équations conduit à une solution (linéarisée) de la RG (de type « onde gravitationnelle ») satisfaisant la condition de JH $g_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}$

4 équations, 9 fonctions à déterminer …. (composante « 12 » absente)
On peut encore imposer des contraintes (complémentaires, compatibles avec JH)

Choix : $f_{0\alpha} = 0$ → 4 contraintes (→ coordonnées synchrones)

$f_{33} = 0$

D'où :

$$f_{00} = f_{01} = f_{02} = f_{03} = f_{33} = 0$$ ← contraintes

$$\left.\begin{array}{l} f_{11} + f_{22} = 0 \\ f_{13} = 0 \\ f_{23} = 0 \end{array}\right\}$$ ← équations avec contraintes

…… et rien sur f_{12}

Notations usuelles : $\left\{\begin{array}{l} f_{11} \leftrightarrow h^{+} \\ f_{12} \leftrightarrow h^{\times} \end{array}\right.$

$$h_{\alpha}^{\alpha} = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0$$

D'où la métrique des ondes gravitationnelles, en jauge « traceless-transverse » (TT)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + h^{+}\left(dx^2 - dy^2\right) + 2h^{\times}dxdy$$

càd $g_{11} = 1 + h^{+}$; $g_{22} = 1 - h^{+}$; $g_{12} = h^{\times}$; les autres = Minkowsky

On a donc : $$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + h^+\left(dx^2 - dy^2\right) + 2h^\times dxdy$$

avec $$h^{+,\times} = h^{+,\times}(t-z)$$

Action d'une onde grav sur des particules libres ?

Particule libre → mvt géodésique

Or : **x,y,z = Cstes** correspondent :

- à des **mvts inertiels** (coord synchrones) ;
- sans mvts relatifs avant le passage de l'onde (h=0 → Minkowsky) ;
- **en mvts relatifs** pendant le passage de l'onde (métrique t-dépendante).

Considérons 2 particules de coordonnées (x,y,z) et (x+dx,y+dy,z+dz) constantes

À une date t, leur distance est $$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + h^+\left(dx^2 - dy^2\right) + 2h^\times dxdy$$

→ Pb : comment varie cette distance au cours du temps ?

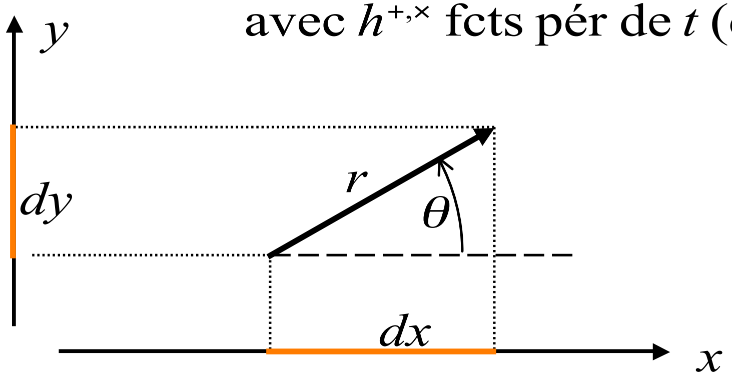
Si $\quad dx=dy=0 \quad$ et $\quad dz\neq 0$

$\rightarrow \quad dl = dz = \text{Cste}$ → pas d'action de l'onde grav le long de la direction de sa propagation (action « transverse »)

Si $\quad dx$ et $dy\neq 0 \quad$ et $\quad dz=0$ $\qquad dl^2 = dx^2 + dy^2 + h^+\left(dx^2 - dy^2\right) + 2h^\times dxdy$

avec $h^{+,\times}$ fcts pér de t (de $t-z$)

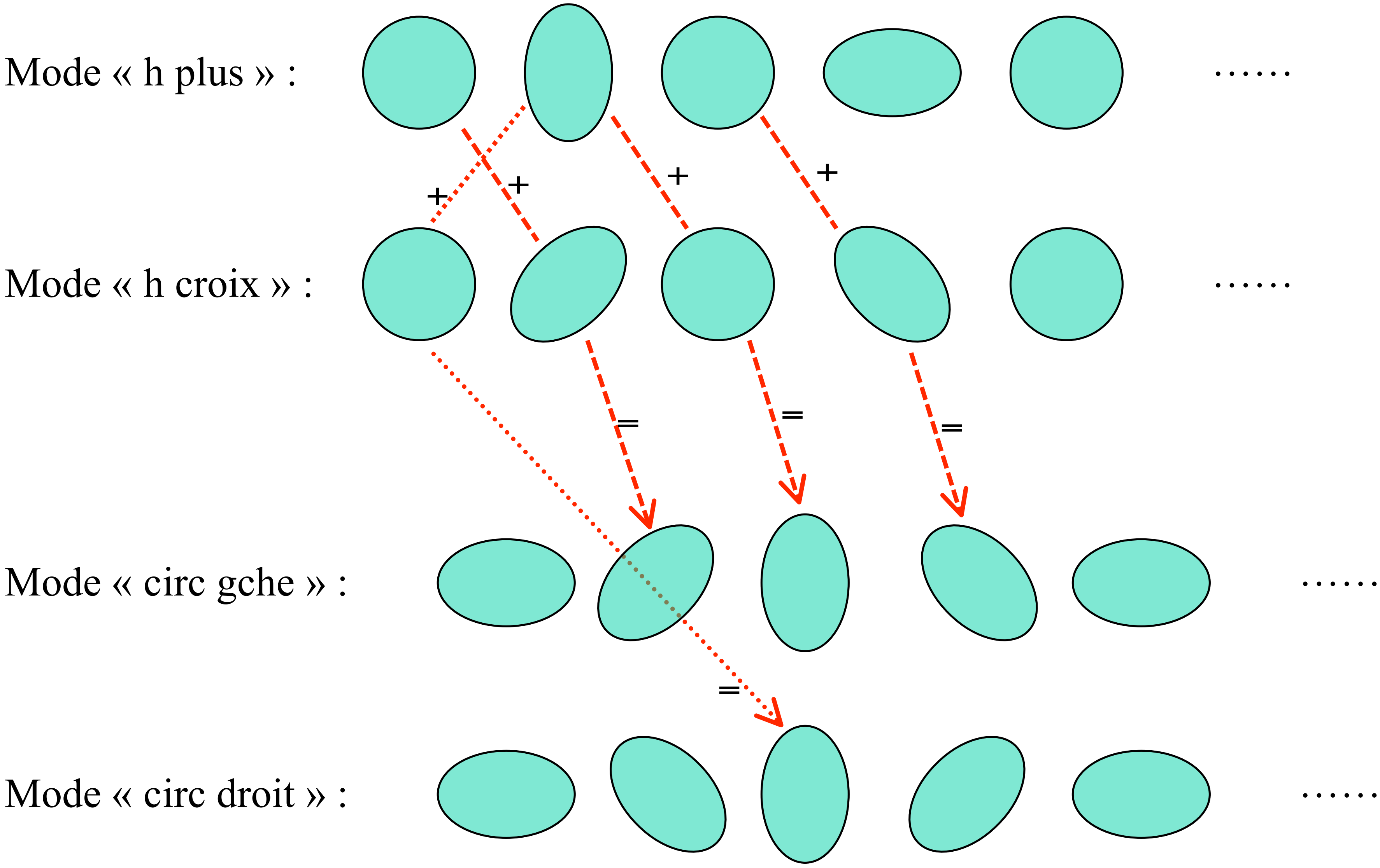
Posons : $\begin{cases} dx = r\cos\theta \\ dy = r\sin\theta \end{cases}$



$$\rightarrow \quad dl = r\left(1 + \frac{1}{2}h^+\cos 2\theta + \frac{1}{2}h^\times\sin 2\theta\right) \qquad (\text{ car } \left|h^{+,\times}\right| << 1)$$

→ modes de pulsation anisotropes (à surface constante)
- le long des axes x et y (mode « plus ») ;
- le long des 2 bissectrices (mode « croix »).

Rmq : au lieu des modes « plus » et « croix », on utilise fréquemment les modes « polarisations circulaires gauche et droite » (qui en sont des combinaisons)


Mode « h plus » :
Mode « h croix » :
Mode « circ gche » :
Mode « circ droit » :
+
=
……

Comportement d'une perturbation gravitationnelle en gravitation tenseur-scalaire

Théories tenseur-scalaires ~ relativité générale « à cste de gravitation variable »

Lagrangien RG :

$$L = \underbrace{\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,R(g_{\alpha\beta})}_{\text{Secteur gravitationnel ne dépend que de la métrique}} + \underbrace{L_{NG}(X, g_{\alpha\beta})}_{\text{Secteur non gravitationnel}}$$

Secteur gravitationnel
ne dépend que
de la métrique

Secteur non gravitationnel
X : champs non gravitationnels
(matière, électromagn,….)

$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow$ équation d'Einstein

$\delta X \rightarrow$ équations des champs non gravitationnels (partiellement contenues dans EE)

Lagrangien théorie tenseur-scalaire (TTS) :

$$L = \frac{c^4}{16\pi}\sqrt{-g}\left[\Phi R(g_{\alpha\beta}) - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}\partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\Phi\right] + L_{NG}(X, g_{\alpha\beta})$$

« remplace » G^{-1}

terme « cinétique » associé au chp scalaire

indpdt du chp scalaire (universalité de la chute libre)

$\omega(\Phi)$: caractérise la TTS considérée (Brans-Dicke $\leftrightarrow$ $\omega = \text{cste}$ (indépdt de Φ))

Équations de champ :

Secteur gravitationnel : $g_{\alpha\beta}\,,\Phi \;\rightarrow\; \delta g_{\alpha\beta}\,,\delta\Phi \;\rightarrow\; \ldots.$

Secteur non gravitationnel : $X \;\rightarrow\; \delta X \;\rightarrow\; \ldots.$

Équations de champ (en général)

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=\frac{8\pi}{c^4\Phi}T_{\alpha\beta}+\frac{\omega}{\Phi^2}\left(\partial_\alpha\Phi\,\partial_\beta\Phi-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi\right)+\frac{1}{\Phi}\left(\nabla_\alpha\partial_\beta\Phi-g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Phi\right)$$

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\sqrt{2\omega+3}\,g^{\alpha\beta}\partial_\beta\Phi\right)=\frac{8\pi T\sqrt{-g}}{c^4\sqrt{2\omega+3}}$$

+ équations des champs non gravitationnels (Euler, Maxwell, ….)

$\rightarrow \quad G_{\mathrm{eff}}=\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\frac{1}{\Phi}$ (« RG à cste de gravitation variable »)

Expériences/observations : contraintes sur ω et ω' ($\leftrightarrow$ coef PPN)

Équations de champ dans le vide (qui vont nous intéresser ici)

$$R_{\alpha\beta}=\frac{\omega}{\Phi^2}\partial_\alpha\Phi\,\partial_\beta\Phi+\frac{1}{\Phi}\left(\nabla_\alpha\partial_\beta\Phi+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\Phi\right)$$

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\sqrt{2\omega+3}\,g^{\alpha\beta}\partial_\beta\Phi\right)=0$$

Mêmes hypothèses simplificatrices qu'en RG :

- vide
- Minkowsky perturbé
- linéarisation

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \\ \Phi = \Phi_0(1 + p) \end{cases}$$

On définit : $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h m_{\alpha\beta} - p m_{\alpha\beta}$

On fait le choix de jauge (**pas JH !!!** (mais on aurait pu ….)) : $m_{\mu\nu}\partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} = 0$

D'où : $m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} = 0$

$$m_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu p = 0$$

On peut alors (après utilisation des libertés de jauge résiduels, comme en RG) mettre la métrique sous la forme :

$$g_{11} = 1 + h^{+} - p \;\; ; \;\; g_{22} = 1 - h^{+} - p \;\; ; \;\; g_{12} = h^{\times} \;\; ; \;\; \text{les autres} = \text{Minkowsky}$$

(on a posé : $h^{+} = h_{11} + p$)

avec (propagation suivant l'axe « z ») : $h^{+,\times} = h^{+,\times}(t-z)$ et $p = p(t-z)$

D'où : $$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + h^{+}\left(dx^2 - dy^2\right) - p\left(dx^2 + dy^2\right) + 2h^{\times}dxdy$$

nouveau mode correspondant
à une dilatation-contraction (isotrope) dans le plan x-y

Mode « dilatation-contraction » :