

(Version préliminaire)

**Modes quasi-normaux des trous noirs**  
**et**  
**astronomie des ondes gravitationnelles**

Antoine Folacci\*

*UMR CNRS 6134 SPE, Equipe Physique Théorique,  
Université de Corse, Faculté des Sciences, BP 52, 20250 Corte, France*

(Dated: September 10, 2009)

PACS numbers: 04.70.-s, 04.30.-w

---

\*Electronic address: [folacci@univ-corse.fr](mailto:folacci@univ-corse.fr)

”No observational proof of the black-hole event-horizon”

M. A. Abramowicz, W. Kluzniak and J.-P. Lasota

arXiv:astro-ph/0207270

”Small, dark and heavy: But is it a black hole?”

M. Visser, C. Barceló, S. Liberati and S. Sonego

arXiv:0902.0346 (gr-qc)

The black holes of nature are the most perfect macroscopic objects there are in the universe: the only elements in their construction are our concepts of space and time. And since the general theory of relativity provides only a single unique family of solutions for their descriptions, they are the simplest objects as well.

Subrahmanyan Chandrasekhar (1984)

## Références:

- Une référence parmi tant d'autres sur la physique des trous noirs:
  - “Black hole physics”,  
V. P. Frolov and I. D. Novikov,  
Kluwer Academic Publishers (1998)
  
- La référence de base sur les modes quasi-normaux des trous noirs :
  - “The mathematical theory of black holes”,  
S. Chandrasekhar,  
Oxford University Press (1984)
  
- Quelques articles de revue plus récents publiés sur le sujet des modes quasi-normaux des étoiles compactes et des trous noirs avec les applications en astronomie des ondes gravitationnelles mais aussi en théorie des cordes en en gravitation quantique à boucles:
  - “Quasi-normal modes of stars and black holes”  
K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt,  
Living Rev. Relativity, vol. 2 (1999)
  - “Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars”  
H.-P. Nollert,  
Class. Quantum Grav., vol. 16, p. R159 (1999)
  - “Quasi-normal modes and gravitational wave astronomy”  
V. Ferrari and L. Gualtieri,  
Gen. Relativ. Gravit., vol. 40, p. 945 (2008)
  - “Quasinormal modes of black holes and black branes”,  
E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets,  
Class. Quantum Grav., vol. 26, 163001 (2009)
  
- Un livre de vulgarisation sur le sujet:
  - “Trous noirs et distorsions du temps : L'héritage sulfureux d'Einstein”,  
Kip S. Thorne,  
Flammarion

# I. LE TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD ET SES PERTURBATIONS GRAVITATIONNELLES

## A. Le trou noir de Schwarzschild

- L'espace-temps  $(M, g_{\mu\nu})$  définissant le trou noir de Schwarzschild est une solution des équations d'Einstein dans le vide

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (1)$$

qui est statique, à symétrie sphérique et caractérisée par un seul paramètre physique  $\mathcal{M}$  qui représente sa masse.

- Dans le système de coordonnées dit de Schwarzschild  $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$  avec  $t \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $r \in [0, +\infty[$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , la métrique s'écrit sous la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\sigma_2^2 \quad (2)$$

avec

$$f(r) = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}. \quad (3)$$

Ici

$$d\sigma_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4)$$

désigne la métrique de la sphère unité  $S^2$ .

- La staticité de cet espace-temps apparaît explicitement dans l'expression (2) où les coefficients du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  sont indépendants de la coordonnée temporelle  $t$ . Son caractère à symétrie sphérique est lié directement à l'invariance dans les transformations du groupe des rotations  $SO(3)$  de la métrique (4) de la sphère unité  $S^2$ .

- Courbure scalaire, tenseur de Ricci et tenseur de Riemann:

$$R = 0 \quad \text{et} \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad (5)$$

mais

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48\mathcal{M}^2}{r^6}. \quad (6)$$

- L'horizon des événements.

- La "singularité" de Schwarzschild en  $r = 2\mathcal{M}$ .

- Les coordonnées de Kruskal (et l'extension maximale du trou noir de Schwarzschild):

C'est le système des coordonnées  $X^\mu = (T, X, \theta, \varphi)$  avec  $T$  et  $X$  définis à partir de  $t$  et  $r$  par

$$\left(\frac{r}{2\mathcal{M}} - 1\right) = X^2 - T^2 \quad (7a)$$

$$\frac{t}{2\mathcal{M}} = \ln\left(\frac{T+X}{T-X}\right). \quad (7b)$$

Dans ce système de coordonnées, la métrique de Schwarzschild devient

$$ds^2 = \frac{32\mathcal{M}^3 e^{-r/2\mathcal{M}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\sigma_2^2 \quad (8)$$

et la "singularité" de Schwarzschild en  $r = 2\mathcal{M}$  a disparu. En coordonnées de Kruskal, le domaine  $X^2 - T^2 > -1$  définit l'extérieur du trou noir de Schwarzschild.

- La singularité de Schwarzschild en  $r = 0$ .

- L'horizon des événements en  $r = 2\mathcal{M}$ .

## B. Les ondes gravitationnelles sur le trou noir de Schwarzschild

• On perturbe “légèrement” le trou noir de Schwarzschild (i.e. on l’écarte de sa position d’équilibre statique et à symétrie sphérique) en modifiant le contenu matériel de l’espace-temps (présence d’une étoile autour du trou noir, d’un disque d’accrétion, stade final de la coalescence de deux trous noirs, ...). Dans le membre de droite des équations d’Einstein on a désormais un terme source  $\tau_{\mu\nu}$  qui, en retour, induit un shift du tenseur métrique

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Le tenseur  $h_{\mu\nu}$  symétrique et de rang 2 décrit les ondes gravitationnelles ou perturbations gravitationnelles qui se propagent sur le trou noir de Schwarzschild et qui sont créées par le tenseur d’impulsion-énergie source  $\tau_{\mu\nu}$ . Le nouveau tenseur métrique  $\bar{g}_{\mu\nu}$  est une solution des équations d’Einstein avec source

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = 8\pi\tau_{\mu\nu}. \quad (10)$$

Ici, le tenseur de Ricci  $\bar{R}_{\mu\nu}$  et la courbure scalaire associée  $\bar{R}$  sont calculées à partir du tenseur métrique  $\bar{g}_{\mu\nu}$ .

• En linéarisant les équations d’Einstein avec source, on peut obtenir les équations d’onde vérifiées par les composantes du tenseur  $h_{\mu\nu}$  décrivant les ondes gravitationnelles. Dans la variation élémentaire (9) du tenseur métrique, on a

$$R \rightarrow \bar{R} = R + \delta R, \quad (11a)$$

$$R_{\mu\nu} \rightarrow \bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}, \quad (11b)$$

avec

$$\delta R = h^{\rho\sigma}{}_{;\rho\sigma} - \square h - R^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}, \quad (12a)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h^\rho{}_{\mu;\nu\rho} + h^\rho{}_{\nu;\mu\rho} - h_{;\mu\nu} - \square h_{\mu\nu}). \quad (12b)$$

Ici, l’opérateur d’Alembertien  $\square$  et les dérivées covariantes sont construits à l’aide de la métrique  $g_{\mu\nu}$  d’origine, i.e. celle du trou noir de Schwarzschild, et on a posé

$$h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}. \quad (13)$$

En reportant (9) et (11) dans (10) et en tenant compte de (1) ou de (5), on obtient

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R = 8\pi\tau_{\mu\nu} \quad (14)$$

puis

$$\square h_{\mu\nu} - h^\rho_{\mu;\nu\rho} - h^\rho_{\nu;\mu\rho} + h_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}(h^{\rho\sigma}_{;\rho\sigma} - \square h) = -16\pi\tau_{\mu\nu} \quad (15a)$$

ou, de façon équivalente,

$$\square h_{\mu\nu} - h^\rho_{\mu;\nu\rho} - h^\rho_{\nu;\mu\rho} + h_{;\mu\nu} = -16\pi \left( \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tau^\rho_{\rho} \right). \quad (15b)$$

C'est l'équation des ondes gravitationnelles/des perturbations gravitationnelles qui sont dues à la présence du terme source  $\tau_{\mu\nu}$  et qui se propagent au voisinage du trou noir de Schwarzschild.

### C. Invariance de jauge de la théorie des ondes gravitationnelles sur le trou noir de Schwarzschild

• La relativité générale est une théorie invariante par les changements de coordonnées. Pour les ondes gravitationnelles, cela entraîne une invariance de jauge, l'invariance de la théorie dans la transformation

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu;\nu)}. \quad (16)$$

Ici,  $\xi_\mu$  désigne un champ vectoriel arbitraire. On peut vérifier aussi cette invariance en reportant le champ  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  défini par (16) dans l'équation des perturbations gravitationnelles (15).

**D. A propos de la résolution de l'équation des ondes gravitationnelles sur le trou noir de Schwarzschild**

- Résumé:

$$\square h_{\mu\nu} - h^\rho{}_{\mu;\nu\rho} - h^\rho{}_{\nu;\mu\rho} + h_{;\mu\nu} = -16\pi \left( \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tau^\rho{}_\rho \right) \quad \text{Eq. d'onde}$$

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu;\nu)} \quad \text{Invariance de jauge}$$

- Utilisation de la staticité et de la symétrie sphérique de la métrique d'origine.

## II. HARMONIQUES SPHÉRIQUES ET DÉCOMPOSITION MULTIPOLAIRE DES TENSEURS DÉFINIS SUR LE TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD

## A. La sphère unité $S^2$

• Pour pouvoir raisonner de manière covariante dans les sous-sections qui suivent, nous noterons par  $x^a = (\theta, \varphi)$  les coordonnées usuelles repérant un point  $x$  de la sphère unité  $S^2$  et par  $\gamma_{ab}(x)$  les composantes du tenseur métrique. La métrique  $d\sigma_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  s'écrit alors sous la forme

$$d\sigma_2^2 = \gamma_{ab}(x) dx^a dx^b. \quad (17)$$

Nous noterons  $\gamma(x) = \det \gamma_{ab}(x)$  et nous introduirons aussi l'inverse du tenseur métrique de composantes  $\gamma^{ab}(x)$  ainsi que le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita  $\epsilon_{ab}(x)$  défini par

$$\epsilon_{ab} = \sqrt{\gamma} \begin{cases} +1 & \text{si } ab \text{ est une permutation paire de } 12 \\ -1 & \text{si } ab \text{ est une permutation impaire de } 12, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (18)$$

et qui vérifie

$$\gamma^{ac} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} = \gamma_{bd}. \quad (19)$$

Explicitement, on a

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \gamma^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Nous utiliserons aussi la dérivé covariante sur la variété  $S^2$  que nous noterons  $\nabla_a$  et qui est construite à partir des symboles de Christoffel  $\Gamma_{ab}^c(x)$  associés au tenseur métrique  $\gamma_{ab}(x)$ .

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad \text{et} \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (21)$$

## B. Harmoniques sphériques scalaires

• Les harmoniques sphériques scalaires: C'est la famille des  $Y_{\ell m}(x)$  avec  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  et pour  $\ell$  fixé avec  $m = -\ell, -\ell + 1, -\ell + 2, \dots, \ell - 1, \ell$  qui constituent une base orthonormée des fonctions scalaires définies sur  $S^2$ . On les construit à l'aide des fonctions de Legendre  $P_\ell^m(u)$  avec  $u \in [-1, +1]$  sous la forme

$$Y^{\ell m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (22)$$

• Les premières harmoniques sphériques scalaires sont données par

$$Y^{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (23a)$$

$$Y^{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (23b)$$

$$Y^{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \quad (23c)$$

$$Y^{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (23d)$$

$$Y^{2\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \quad (23e)$$

$$Y^{2\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}. \quad (23f)$$

• Propriétés importantes:

- Comportement dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$  qui fournit

$$Y^{\ell m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y^{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (24)$$

Cette relation va jouer un rôle important par la suite car elle va nous permettre d'obtenir des relations analogues pour les comportements des harmoniques sphériques vectorielles et tensorielles de rang 2 qui vont nous être très utiles pour réaliser le découplage des EDP vérifiées par les perturbations gravitationnelles.

- Par construction, les harmoniques sphériques scalaires sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami défini sur  $S^2$ . On a

$$\gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b Y^{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y^{\ell m} \quad (25)$$

avec (attention, ici nous donnons l'expression de l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les champs scalaires)

$$\gamma^{ab}\nabla_a\nabla_b = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_a(\sqrt{\gamma}\gamma^{ab}\partial_b) \quad (26a)$$

$$= \left[ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] = \left[ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \quad (26b)$$

- Relation d'orthonormalisation

$$\int_{S^2} d\Omega_2 Y^{\ell m} Y^{\ell' m'^*} = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \quad (27)$$

avec ici  $d\Omega_2 = \sin\theta d\theta d\varphi$  qui désigne l'élément de volume sur  $S^2$ .

### C. Harmoniques sphériques vectorielles

• La base des champs vectoriels définis sur la sphère unité  $S^2$  est composée de deux familles différentes de vecteurs notés  $Y_a^{\ell m}(x)$  et  $X_a^{\ell m}(x)$  que l'on construit à l'aide des harmoniques sphériques scalaires précédemment définies en utilisant comme outils la dérivée covariante  $\nabla_a$ , le tenseur de Levi-Civita  $\epsilon_{ab}$  et le tenseur métrique  $\gamma_{ab}$ . On a

$$Y_a^{\ell m} = \nabla_a Y^{\ell m}, \quad (28)$$

$$X_a^{\ell m} = \epsilon_{ab} \gamma^{bc} \nabla_c Y^{\ell m}. \quad (29)$$

Ces deux familles sont définies pour  $\ell = 1, 2, \dots$ . La première famille est donc constituée des gradients des harmoniques sphériques scalaires tandis que la seconde est en quelques sortes constituée de leurs "rotationnels". On a explicitement

$$Y_a^{\ell m} = \left( \frac{\partial}{\partial \theta} Y^{\ell m}, \frac{\partial}{\partial \varphi} Y^{\ell m} \right), \quad (30)$$

$$X_a^{\ell m} = \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y^{\ell m}, -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y^{\ell m} \right). \quad (31)$$

Les premières harmoniques sphériques vectorielles sont données par [cf. Eqs. (23)]

$$Y_a^{10}(\theta, \varphi) = \left( -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta, 0 \right) \quad (32a)$$

$$Y_a^{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \left( \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta e^{\pm i\varphi}, i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \right) \quad (32b)$$

$$Y_a^{20}(\theta, \varphi) = \left( \sqrt{\frac{5}{16\pi}} [-6 \sin \theta \cos \theta], 0 \right) \quad (32c)$$

$$Y_a^{2\pm 1}(\theta, \varphi) = \left( \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [2 \cos^2 \theta - 1] e^{\pm i\varphi}, i\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \right) \quad (32d)$$

$$Y_a^{2\pm 2}(\theta, \varphi) = \left( \sqrt{\frac{15}{32\pi}} [2 \sin \theta \cos \theta] e^{\pm 2i\varphi}, \pm 2i\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} \right) \quad (32e)$$

et

$$X_a^{10}(\theta, \varphi) = \left( 0, \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin^2 \theta \right) \quad (32f)$$

$$X_a^{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \left( i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi}, \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \right) \quad (32g)$$

$$X_a^{20}(\theta, \varphi) = \left( 0, \sqrt{\frac{5}{16\pi}} [6 \sin^2 \theta \cos \theta] \right) \quad (32h)$$

$$X_a^{2\pm 1}(\theta, \varphi) = \left( i\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta e^{\pm i\varphi}, \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}} [2 \cos^2 \theta - 1] \sin \theta e^{\pm i\varphi} \right) \quad (32i)$$

$$X_a^{2\pm 2}(\theta, \varphi) = \left( \pm 2i\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin \theta e^{\pm 2i\varphi}, -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} [2 \sin^2 \theta \cos \theta] e^{\pm 2i\varphi} \right). \quad (32j)$$

• Comportement des harmoniques sphériques vectorielles dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$ .

- Les champs vectoriels dont les composantes sont les  $Y_a^{\ell m}$  se transforment comme les harmoniques sphériques scalaires  $Y^{\ell m}$  dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$ , i.e. avec un coefficient en  $(-1)^\ell$ .

- Les champs vectoriels dont les composantes sont les  $X_a^{\ell m}$  se transforment dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$  avec un coefficient en  $(-1)^{\ell+1}$ .

- Les harmoniques sphériques vectorielles  $Y_a^{\ell m}$  sont dites paires ou polaires tandis que les harmoniques sphériques vectorielles  $X_a^{\ell m}$  sont dites impaires ou axiales.

• Autres propriétés importantes des harmoniques sphériques vectorielles:

- Par construction, les harmoniques sphériques vectorielles  $Y_a^{\ell m}$  et  $X_a^{\ell m}$  sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami défini sur  $S^2$ . On a

$$\gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b Y_c^{\ell m} = -[\ell(\ell + 1) - 1] Y_c^{\ell m} \quad (33)$$

et

$$\gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b X_c^{\ell m} = -[\ell(\ell + 1) - 1] X_c^{\ell m}. \quad (34)$$

- De plus que les harmoniques sphériques vectorielles  $X_a^{\ell m}$  sont à divergence nulle, i.e.,

$$\nabla^a X_a^{\ell m} = 0 \quad (35)$$

tandis que les harmoniques sphériques vectorielles  $Y_a^{\ell m}$  vérifient

$$\nabla^a Y_a^{\ell m} = -\ell(\ell + 1)Y_a^{\ell m}. \quad (36)$$

- Les relations d'orthonormalisation des  $Y_a^{\ell m}$  et des  $X_a^{\ell m}$  s'écrivent

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ab} Y_a^{\ell m} Y_b^{\ell' m'^*} = \ell(\ell + 1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (37a)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ab} X_a^{\ell m} X_b^{\ell' m'^*} = \ell(\ell + 1) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (37b)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ab} Y_a^{\ell m} X_b^{\ell' m'^*} = 0, \quad (37c)$$

avec  $d\Omega_2 = \sin \theta d\theta d\varphi$  qui désigne l'élément de volume sur  $S^2$ .

## D. Harmoniques sphériques tensorielles symétriques de rang 2

• La base des champs tensoriels symétriques de rang 2 définis sur la sphère unité  $S^2$  est composée de trois familles différentes de tenseurs que l'on construit à l'aide des harmoniques sphériques scalaires en utilisant comme outils la dérivée covariante  $\nabla_a$ , le tenseur de Levi-Civita  $\epsilon_{ab}$  et le tenseur métrique  $\gamma_{ab}$ . La première famille est constituée des tenseurs symétriques du type

$$\gamma_{ab}Y^{\ell m} \quad (38)$$

avec  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . La seconde et la troisième famille sont constituées des tenseurs notés  $Y_{ab}^{\ell m}(x)$  et  $X_{ab}^{\ell m}(x)$  définis par

$$Y_{ab}^{\ell m} = \nabla_a \nabla_b Y^{\ell m} + \frac{1}{2} \ell(\ell + 1) \gamma_{ab} Y^{\ell m}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} X_{ab}^{\ell m} &= \nabla_{(a} X_{b)}^{\ell m} \\ &= \epsilon_{(a|c|} \gamma^{cd} \nabla_{b)} \nabla_d Y^{\ell m}. \end{aligned} \quad (40)$$

Ces deux dernières familles sont définies pour  $\ell = 2, 3, \dots$ . Les tenseurs  $Y_{ab}^{\ell m}(x)$  et  $X_{ab}^{\ell m}(x)$  sont de trace nulle, i.e.  $\gamma^{ab} Y_{ab}^{\ell m} = 0$  et  $\gamma^{ab} X_{ab}^{\ell m} = 0$ . On a explicitement

$$\gamma_{ab} Y^{\ell m} = \begin{pmatrix} Y^{\ell m} & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta Y^{\ell m} \end{pmatrix} \quad (41)$$

ainsi que

$$Y_{ab}^{\ell m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y^{\ell m} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y^{\ell m} \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y^{\ell m} & -\frac{1}{2} \sin^2 \theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y^{\ell m} \end{pmatrix} \quad (42)$$

et

$$X_{ab}^{\ell m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y^{\ell m} & -\frac{1}{2} \sin \theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y^{\ell m} \\ -\frac{1}{2} \sin \theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y^{\ell m} & -\sin \theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y^{\ell m} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Les premières harmoniques sphériques tensorielles de ces deux familles

$$Y_{ab}^{20} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} [3 \sin^2 \theta] & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} [3 \sin^4 \theta] \end{pmatrix} \quad (44a)$$

$$Y_{ab}^{2\pm 1} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [\sin \theta \cos \theta] e^{\pm i\varphi} & i \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i\varphi} \\ i \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i\varphi} & \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [\sin^3 \theta \cos \theta] e^{\pm i\varphi} \end{pmatrix} \quad (44b)$$

$$Y_{ab}^{2\pm 2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} [1 + \cos^2 \theta] e^{\pm 2i\varphi} & \pm i \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm 2i\varphi} \\ \pm i \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm 2i\varphi} & -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} [1 + \cos^2 \theta] \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} \end{pmatrix} \quad (44c)$$

et

$$X_{ab}^{20} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} [3 \sin^3 \theta] \\ -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} [3 \sin^3 \theta] & 0 \end{pmatrix} \quad (44d)$$

$$X_{ab}^{2\pm 1} = \begin{pmatrix} i \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} & \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [\sin^2 \theta \cos \theta] e^{\pm i\varphi} \\ \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} [\sin^2 \theta \cos \theta] e^{\pm i\varphi} & -i \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm i\varphi} \end{pmatrix} \quad (44e)$$

$$X_{ab}^{2\pm 2} = \begin{pmatrix} \pm i \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cos \theta e^{\pm 2i\varphi} & -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} [1 + \cos^2 \theta] \sin \theta e^{\pm 2i\varphi} \\ -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} [1 + \cos^2 \theta] \sin \theta e^{\pm 2i\varphi} & \mp i \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (44f)$$

- Comportement des harmoniques sphériques tensorielles dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$ .

- Les champs tensoriels dont les composantes sont les  $\gamma_{ab} Y^{\ell m}$  et  $Y_{ab}^{\ell m}$  se transforment comme les harmoniques sphériques scalaires  $Y^{\ell m}$  dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$ , i.e. avec un coefficient en  $(-1)^\ell$ . Elles sont dites polaires.

- Les champs tensoriels dont les composantes sont les  $X_{ab}^{\ell m}$  se transforment dans la transformation antipodale  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$  sur  $S^2$  avec un coefficient en  $(-1)^{\ell+1}$ . Elles sont dites axiales.

- Autres propriétés importantes des harmoniques sphériques tensorielles:

- Les harmoniques sphériques tensorielles  $\gamma_{ab} Y^{\ell m}$ ,  $Y_{ab}^{\ell m}$  et  $X_{ab}^{\ell m}$  sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami défini sur  $S^2$ . On a

$$\gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b (\gamma_{cd} Y^{\ell m}) = -\ell(\ell + 1) \gamma_{cd} Y^{\ell m} \quad (45)$$

et

$$\gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b Y_{cd}^{\ell m} = -[\ell(\ell + 1) - 4] Y_{cd}^{\ell m} \quad (46)$$

et

$$\gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b X_{cd}^{\ell m} = -[\ell(\ell + 1) - 4] X_{cd}^{\ell m}. \quad (47)$$

- En prenant les divergences des harmoniques sphériques tensorielles  $\gamma_{ab} Y^{\ell m}$ ,  $Y_{ab}^{\ell m}$  et

$X_{ab}^{\ell m}$  on obtient

$$\nabla^a(\gamma_{ab}Y^{\ell m}) = Y_b^{\ell m}, \quad (48)$$

$$\nabla^a Y_{ab}^{\ell m} = -\frac{1}{2}[\ell(\ell+1) - 2]Y_b^{\ell m}, \quad (49)$$

$$\nabla^a X_{ab}^{\ell m} = -\frac{1}{2}[\ell(\ell+1) - 2]X_b^{\ell m}. \quad (50)$$

- Les relations d'orthonormalisation des harmoniques sphériques tensorielles s'écrivent

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ac}\gamma^{bd}[\gamma_{ab}Y^{\ell m}][\gamma_{cd}Y^{\ell' m'}]^* = 2\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \quad (51a)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ac}\gamma^{bd}Y_{ab}^{\ell m}Y_{cd}^{\ell' m'^*} = \frac{1}{2}(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \quad (51b)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ac}\gamma^{bd}X_{ab}^{\ell m}X_{cd}^{\ell' m'^*} = \frac{1}{2}(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \quad (51c)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ac}\gamma^{bd}[\gamma_{ab}Y^{\ell m}]Y_{cd}^{\ell' m'^*} = 0, \quad (51d)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ac}\gamma^{bd}[\gamma_{ab}Y^{\ell m}]X_{cd}^{\ell' m'^*} = 0, \quad (51e)$$

$$\int_{S^2} d\Omega_2 \gamma^{ac}\gamma^{bd}Y_{ab}^{\ell m}X_{cd}^{\ell' m'^*} = 0, \quad (51f)$$

avec  $d\Omega_2 = \sin\theta d\theta d\varphi$

## E. Décompositions en harmoniques sphériques pour les champs définis sur le trou noir de Schwarzschild

• Nous allons utiliser les résultats énoncés dans les sous-sections précédentes pour séparer dans les expressions des champs définis sur le trou noir de Schwarzschild les variables  $\theta$  et  $\varphi$  des variables  $t$  et  $r$ . Commençons par noter que, d'après ce qui précède, on a les résultats suivants:

- Si  $A$  est un champ scalaire défini sur la sphère unité  $S^2$ , on peut le décomposer sur la base des harmoniques sphériques scalaires  $Y^{\ell m}$  et écrire

$$A(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha^{\ell m} Y^{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (52)$$

Ici les  $\alpha^{\ell m}$  sont des coefficients constants qui représentent les composantes du champ scalaire  $A$  dans la base des  $Y^{\ell m}$ .

- Si  $A_a$  est un champ vectoriel défini sur la sphère unité  $S^2$ , on peut le décomposer sur la base des harmoniques sphériques vectorielles  $Y_a^{\ell m}$  et  $X_a^{\ell m}$  et écrire

$$A_a(\theta, \varphi) = A_a^{\text{pol}}(\theta, \varphi) + A_a^{\text{ax}}(\theta, \varphi) \quad (53a)$$

avec

$$A_a^{\text{pol}}(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha^{\ell m} Y_a^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (53b)$$

$$A_a^{\text{ax}}(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \beta^{\ell m} X_a^{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (53c)$$

On notera que l'on a pris soin de séparer explicitement la partie paire ou polaire et la partie impaire ou axiale du champ vectoriel  $A_a$ . Ici les coefficients constants  $\alpha^{\ell m}$  et  $\beta^{\ell m}$  sont les composantes du champ  $A_a$  dans la base des harmoniques sphériques vectorielles.

- Si  $A_{ab}$  est un champ tensoriel symétrique de rang 2 défini sur la sphère unité  $S^2$ , on peut le décomposer sur la base des harmoniques sphériques tensorielles  $\gamma_{ab} Y^{\ell m}$ ,  $Y_{ab}^{\ell m}$  et  $X_{ab}^{\ell m}$  et écrire

$$A_{ab}(\theta, \varphi) = A_{ab}^{\text{pol}}(\theta, \varphi) + A_{ab}^{\text{ax}}(\theta, \varphi) \quad (54a)$$

avec

$$A_{ab}^{\text{pol}}(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_1^{\ell m} [\gamma_{ab} Y^{\ell m}](\theta, \varphi) + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_2^{\ell m} Y_{ab}^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (54b)$$

$$A_{ab}^{\text{ax}}(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \beta^{\ell m} X_{ab}^{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (54c)$$

Ici aussi on a pris soin de séparer explicitement la partie paire ou polaire et la partie impaire ou axiale du champ tensoriel  $A_{ab}$ . Les coefficients constants  $\alpha_1^{\ell m}$ ,  $\alpha_2^{\ell m}$  et  $\beta^{\ell m}$  sont les composantes du champ  $A_{ab}$  dans la base des harmoniques sphériques tensorielles.

- On considère maintenant un champ scalaire  $A(t, r, \theta, \varphi)$  défini sur le trou noir de Schwarzschild. C'est un champ scalaire dans les changements de coordonnées sur l'espace-temps de Schwarzschild et c'est donc aussi un champ scalaire pour les rotations sur la sphère unité  $S^2$  (i.e., pour ces transformations de coordonnées qui laissent  $t$  et  $r$  inchangés mais font effectuer une rotation au point de coordonnées  $x^a = (\theta, \varphi)$  de  $S^2$ ). On peut donc utiliser le résultat (52) et décomposer  $A(t, r, \theta, \varphi)$  sous la forme

$$A(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha^{\ell m}(t, r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (55)$$

avec les composantes  $\alpha^{\ell m}$  du champ  $A$  dans la base des  $Y^{\ell m}$  qui dépendent maintenant des coordonnées  $t$  et  $r$ .

- On considère maintenant un champ vectoriel  $A_\mu(t, r, \theta, \varphi)$  défini sur le trou noir de Schwarzschild. C'est un champ vectoriel dans les changements de coordonnées sur l'espace-temps de Schwarzschild: dans la transformation

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\nu) \quad (56)$$

le vecteur  $A_\mu(x)$  devient le vecteur  $\tilde{A}_\mu(\tilde{x})$  avec

$$\tilde{A}_\mu = \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) A_\rho. \quad (57)$$

Si on se restreint aux rotations sur la sphère unité  $S^2$  (i.e., aux transformations de coordonnées qui laissent  $t$  et  $r$  inchangés mais font effectuer une rotation au point de coordonnées  $x^a = (\theta, \varphi)$  de  $S^2$ ), on peut constater en utilisant la loi de transformation (57) que  $A_t$  est un champ scalaire sur  $S^2$ , qu'il en est de même de  $A_r$  tandis que  $A_a = (A_\theta, A_\varphi)$  est un champ

vectorel sur  $S^2$ . On peut donc utiliser les résultats (52) et (53) et décomposer  $A_\mu(t, r, \theta, \varphi)$  sous la forme

$$A_t(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_t^{\ell m}(t, r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (58a)$$

$$A_r(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_r^{\ell m}(t, r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (58b)$$

$$A_a(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (\alpha^{\ell m}(t, r) Y_a^{\ell m}(\theta, \varphi) + \beta^{\ell m}(t, r) X_a^{\ell m}(\theta, \varphi)). \quad (58c)$$

avec les composantes  $\alpha_t^{\ell m}$ ,  $\alpha_r^{\ell m}$ ,  $\alpha^{\ell m}$  et  $\beta^{\ell m}$  du champ vectorel  $A_\mu$  dans les différentes bases utilisées qui dépendent maintenant des coordonnées  $t$  et  $r$ . Notons que l'on peut aussi mettre la décomposition (58) sous la forme

$$A_\mu = A_\mu^{\text{pol}} + A_\mu^{\text{ax}} \quad (59a)$$

avec

$$A_\mu^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (\alpha_t^{\ell m} Y^{\ell m}, \alpha_r^{\ell m} Y^{\ell m}, \alpha^{\ell m} Y_\theta^{\ell m}, \alpha^{\ell m} Y_\varphi^{\ell m}) \quad (59b)$$

et

$$A_\mu^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (0, 0, \beta^{\ell m} X_\theta^{\ell m}, \beta^{\ell m} X_\varphi^{\ell m}). \quad (59c)$$

En écrivant (59b), on adopte la convention  $\alpha^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0$  et en considérant (59) on garde à l'esprit le fait que les dépendances en  $t$  et  $r$  sont incluses dans les fonctions  $\alpha_t^{\ell m}$ ,  $\alpha_r^{\ell m}$ ,  $\alpha^{\ell m}$  et  $\beta^{\ell m}$  tandis que les dépendances angulaires sont incluses dans les harmoniques sphériques  $Y^{\ell m}$ ,  $Y_a^{\ell m}$  et  $X_a^{\ell m}$ .

- On considère pour finir un champ tensoriel  $A_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)$  symétrique et de rang 2 défini sur le trou noir de Schwarzschild. C'est un champ tensoriel dans les changements de coordonnées sur l'espace-temps de Schwarzschild: dans la transformation (56) le tenseur  $A_{\mu\nu}(x)$  devient le tenseur  $\tilde{A}_{\mu\nu}(\tilde{x})$  avec

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) A_{\rho\sigma}. \quad (60)$$

Si on se restreint aux rotations sur la sphère unité  $S^2$  (i.e., aux transformations de coordonnées qui laissent  $t$  et  $r$  inchangés mais font effectuer une rotation au point de coordonnées

$x^a = (\theta, \varphi)$  de  $S^2$ ), on peut constater en utilisant la loi de transformation (60) que les composantes  $A_{tt}$ ,  $A_{tr}$  et  $A_{rr}$  sont des champs scalaires sur  $S^2$ , que  $A_{ta} = (A_{t\theta}, A_{t\varphi})$  est un champ vectoriel sur  $S^2$  et qu'il en est de même de  $A_{ra} = (A_{r\theta}, A_{r\varphi})$  et enfin que

$$A_{ab} = \begin{pmatrix} A_{\theta\theta} & A_{\theta\varphi} \\ A_{\varphi\theta} & A_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

est un champ tensoriel symétrique et de rang 2 sur  $S^2$ . On peut donc utiliser les résultats (52), (53) et (54) pour décomposer  $A_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)$  sous la forme

$$A_{tt}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_{tt}^{\ell m}(t, r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (61a)$$

$$A_{tr}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_{tr}^{\ell m}(t, r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (61b)$$

$$A_{rr}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_{rr}^{\ell m}(t, r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (61c)$$

$$A_{ta}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (\alpha_t^{\ell m}(t, r) Y_a^{\ell m}(\theta, \varphi) + \beta_t^{\ell m}(t, r) X_a^{\ell m}(\theta, \varphi)) \quad (61d)$$

$$A_{ra}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (\alpha_r^{\ell m}(t, r) Y_a^{\ell m}(\theta, \varphi) + \beta_r^{\ell m}(t, r) X_a^{\ell m}(\theta, \varphi)) \quad (61e)$$

$$A_{ab}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \alpha_1^{\ell m}(t, r) [\gamma_{ab} Y^{\ell m}](\theta, \varphi) + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (\alpha_2^{\ell m}(t, r) Y_{ab}^{\ell m}(\theta, \varphi) + \beta^{\ell m}(t, r) X_{ab}^{\ell m}(\theta, \varphi)) \quad (61f)$$

avec les composantes  $\alpha_{tt}^{\ell m}$ ,  $\alpha_{tr}^{\ell m}$ ,  $\alpha_{rr}^{\ell m}$ ,  $\alpha_t^{\ell m}$ ,  $\alpha_r^{\ell m}$ ,  $\beta_t^{\ell m}$ ,  $\beta_r^{\ell m}$ ,  $\alpha_1^{\ell m}$ ,  $\alpha_2^{\ell m}$  et  $\beta^{\ell m}$  du champ tensoriel  $A_{\mu\nu}$  dans les différentes bases utilisées qui dépendent maintenant des coordonnées  $t$  et  $r$ . Notons que l'on peut aussi mettre la décomposition (61) sous la forme

$$A_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = A_{\mu\nu}^{\text{pol}}(t, r, \theta, \varphi) + A_{\mu\nu}^{\text{ax}}(t, r, \theta, \varphi) \quad (62a)$$

avec

$$A_{\mu\nu}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} \alpha_{tt}^{\ell m} Y^{\ell m} & \alpha_{tr}^{\ell m} Y^{\ell m} & \alpha_t^{\ell m} Y_{\theta}^{\ell m} & \alpha_t^{\ell m} Y_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \alpha_{rr}^{\ell m} Y^{\ell m} & \alpha_r^{\ell m} Y_{\theta}^{\ell m} & \alpha_r^{\ell m} Y_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \alpha_1^{\ell m} \gamma_{\theta\theta} Y^{\ell m} + \alpha_2^{\ell m} Y_{\theta\theta}^{\ell m} & \alpha_2^{\ell m} Y_{\theta\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & \alpha_1^{\ell m} \gamma_{\varphi\varphi} Y^{\ell m} + \alpha_2^{\ell m} Y_{\varphi\varphi}^{\ell m} \end{pmatrix} \quad (62b)$$

et

$$A_{\mu\nu}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_t^{\ell m} X_{\theta}^{\ell m} & \beta_t^{\ell m} X_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & 0 & \beta_r^{\ell m} X_{\theta}^{\ell m} & \beta_r^{\ell m} X_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \beta^{\ell m} X_{\theta\theta}^{\ell m} & \beta^{\ell m} X_{\theta\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & \beta^{\ell m} X_{\varphi\varphi}^{\ell m} \end{pmatrix}. \quad (62c)$$

En écrivant (62b), on adopte la convention  $\alpha_t^{\ell m} = \alpha_r^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0$  et  $\alpha_1^{\ell m} = \alpha_2^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0, 1$ . De même, en écrivant (62c), on adopte la convention  $\beta^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 1$ . En considérant (62) on garde à l'esprit le fait que les dépendances en  $t$  et  $r$  sont incluses dans les fonctions  $\alpha_{tt}^{\ell m}, \alpha_{tr}^{\ell m}, \alpha_{rr}^{\ell m}, \alpha_t^{\ell m}, \alpha_r^{\ell m}, \beta_t^{\ell m}, \beta_r^{\ell m}, \alpha_1^{\ell m}, \alpha_2^{\ell m}$  et  $\beta^{\ell m}$  tandis que les dépendances angulaires sont incluses dans les harmoniques sphériques  $Y^{\ell m}, Y_a^{\ell m}, X_a^{\ell m}, \gamma_{ab} Y^{\ell m}, Y_{ab}^{\ell m}$  et  $X_{ab}^{\ell m}$ .

### III. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DES ONDES GRAVITATIONNELLES SUR LE TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD

## A. Structure des perturbations gravitationnelles du trou noir de Schwarzschild

• Le champ  $h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)$  décrivant les ondes gravitationnelles se propageant dans l'espace-temps de Schwarzschild peut être recherché sous la forme

$$h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = h_{\mu\nu}^{\text{pol}}(t, r, \theta, \varphi) + h_{\mu\nu}^{\text{ax}}(t, r, \theta, \varphi) \quad (63a)$$

avec

$$h_{\mu\nu}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} H_{tt}^{\ell m} Y^{\ell m} & H_{tr}^{\ell m} Y^{\ell m} & H_t^{\ell m} Y_{\theta}^{\ell m} & H_t^{\ell m} Y_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & H_{rr}^{\ell m} Y^{\ell m} & H_r^{\ell m} Y_{\theta}^{\ell m} & H_r^{\ell m} Y_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & r^2(K^{\ell m} Y^{\ell m} + G^{\ell m} Y_{\theta\theta}^{\ell m}) & r^2 G^{\ell m} Y_{\theta\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & r^2(K^{\ell m} \sin^2 \theta Y^{\ell m} + G^{\ell m} Y_{\varphi\varphi}^{\ell m}) \end{pmatrix} \quad (63b)$$

et

$$h_{\mu\nu}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_t^{\ell m} X_{\theta}^{\ell m} & h_t^{\ell m} X_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & 0 & h_r^{\ell m} X_{\theta}^{\ell m} & h_r^{\ell m} X_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & h^{\ell m} X_{\theta\theta}^{\ell m} & h^{\ell m} X_{\theta\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & h^{\ell m} X_{\varphi\varphi}^{\ell m} \end{pmatrix}. \quad (63c)$$

Convention:  $H_t^{\ell m} = H_r^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0$  et  $K^{\ell m} = G^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0, 1$  et  $h^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 1$ .

• Les 10 familles de fonctions  $H_{tt}^{\ell m}$ ,  $H_{tr}^{\ell m}$ ,  $H_{rr}^{\ell m}$ ,  $H_t^{\ell m}$ ,  $H_r^{\ell m}$ ,  $h_t^{\ell m}$ ,  $h_r^{\ell m}$ ,  $K^{\ell m}$ ,  $G^{\ell m}$  et  $h^{\ell m}$  qui ne dépendent que des coordonnées  $t$  et  $r$  sont les inconnues du problème. Il y en a donc 8 de trop.

## B. Invariance de jauge pour les perturbations gravitationnelles du trou noir de Schwarzschild

• Sur l'espace-temps de Schwarzschild, l'invariance de jauge de la théorie des ondes gravitationnelles peut être considérée en utilisant la décomposition en harmoniques sphériques du champ vectoriel  $\xi_\mu$  qui la paramétrise. D'après ce qui précède, on peut écrire

$$\xi_\mu = \xi_\mu^{\text{pol}} + \xi_\mu^{\text{ax}} \quad (64a)$$

avec

$$\xi_\mu^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (M_t^{\ell m} Y^{\ell m}, M_r^{\ell m} Y^{\ell m}, M_\theta^{\ell m} Y^{\ell m}, M_\varphi^{\ell m} Y^{\ell m}) \quad (64b)$$

et

$$\xi_\mu^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (0, 0, \Lambda^{\ell m} X_\theta^{\ell m}, \Lambda^{\ell m} X_\varphi^{\ell m}). \quad (64c)$$

Convention  $M^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0$ . On garde à l'esprit le fait que les dépendances en  $t$  et  $r$  sont incluses dans les fonctions  $M_t^{\ell m}$ ,  $M_r^{\ell m}$ ,  $M^{\ell m}$  et  $\Lambda^{\ell m}$ .

• Pour pouvoir exploiter l'invariance de jauge (16) de la théorie, il nous faut expliciter

les composantes du tenseur  $2\xi_{(\mu;\nu)}$ . On obtient

$$2\xi_{(t;t)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( 2\frac{\partial}{\partial t} M_t^{\ell m} - \frac{2\mathcal{M}(r-2\mathcal{M})}{r^3} M_r^{\ell m} \right) Y^{\ell m} \quad (65a)$$

$$2\xi_{(t;r)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial t} M_r^{\ell m} + \frac{\partial}{\partial r} M_t^{\ell m} - \frac{2\mathcal{M}}{r(r-2\mathcal{M})} M_t^{\ell m} \right) Y^{\ell m} \quad (65b)$$

$$2\xi_{(r;r)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( 2\frac{\partial}{\partial r} M_r^{\ell m} + \frac{2\mathcal{M}}{r(r-2\mathcal{M})} M_r^{\ell m} \right) Y^{\ell m} \quad (65c)$$

$$2\xi_{(t;\theta)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial t} M^{\ell m} + M_t^{\ell m} \right) Y_{\theta}^{\ell m} \quad (65d)$$

$$2\xi_{(t;\varphi)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial t} M^{\ell m} + M_t^{\ell m} \right) Y_{\varphi}^{\ell m} \quad (65e)$$

$$2\xi_{(r;\theta)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial r} M^{\ell m} - \frac{2}{r} M^{\ell m} + M_r^{\ell m} \right) Y_{\theta}^{\ell m} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{M^{\ell m}}{r^2} \right) + M_r^{\ell m} \right] Y_{\theta}^{\ell m} \quad (65f)$$

$$2\xi_{(r;\varphi)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial r} M^{\ell m} - \frac{2}{r} M^{\ell m} + M_r^{\ell m} \right) Y_{\varphi}^{\ell m} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{M^{\ell m}}{r^2} \right) + M_r^{\ell m} \right] Y_{\varphi}^{\ell m} \quad (65g)$$

$$2\xi_{(\theta;\theta)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[ (2(r-2\mathcal{M})M_r^{\ell m} - \ell(\ell+1)M^{\ell m}) Y^{\ell m} + 2M^{\ell m} Y_{\theta\theta}^{\ell m} \right] \quad (65h)$$

$$2\xi_{(\theta;\varphi)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} 2M^{\ell m} Y_{\theta\varphi}^{\ell m} \quad (65i)$$

$$2\xi_{(\varphi;\varphi)}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[ (2(r-2\mathcal{M})M_r^{\ell m} - \ell(\ell+1)M^{\ell m}) \sin^2 \theta Y^{\ell m} + 2M^{\ell m} Y_{\varphi\varphi}^{\ell m} \right] \quad (65j)$$

et

$$2 \xi_{(t;\theta)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{\ell m} \right) X_{\theta}^{\ell m} \quad (65k)$$

$$2 \xi_{(t;\varphi)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{\ell m} \right) X_{\varphi}^{\ell m} \quad (65l)$$

$$2 \xi_{(r;\theta)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial r} \Lambda^{\ell m} - \frac{2}{r} \Lambda^{\ell m} \right) X_{\theta}^{\ell m} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Lambda^{\ell m}}{r^2} \right) X_{\theta}^{\ell m} \quad (65m)$$

$$2 \xi_{(r;\varphi)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left( \frac{\partial}{\partial r} \Lambda^{\ell m} - \frac{2}{r} \Lambda^{\ell m} \right) X_{\varphi}^{\ell m} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Lambda^{\ell m}}{r^2} \right) X_{\varphi}^{\ell m} \quad (65n)$$

$$2 \xi_{(\theta;\theta)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} 2 \Lambda^{\ell m} X_{\theta\theta}^{\ell m} \quad (65o)$$

$$2 \xi_{(\theta;\varphi)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} 2 \Lambda^{\ell m} X_{\theta\varphi}^{\ell m} \quad (65p)$$

$$2 \xi_{(\varphi;\varphi)}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} 2 \Lambda^{\ell m} X_{\varphi\varphi}^{\ell m}. \quad (65q)$$

• L'invariance de la théorie des ondes gravitationnelles dans la transformation (16) correspond donc à une invariance de la théorie du champ  $h_{\mu\nu}$  donné par (63) dans les substitutions

$$H_{tt}^{\ell m} \rightarrow \tilde{H}_{tt}^{\ell m} = H_{tt}^{\ell m} - \left( 2 \frac{\partial}{\partial t} M_t^{\ell m} - \frac{2\mathcal{M}(r-2\mathcal{M})}{r^3} M_r^{\ell m} \right) \quad (66a)$$

$$H_{tr}^{\ell m} \rightarrow \tilde{H}_{tr}^{\ell m} = H_{tr}^{\ell m} - \left( \frac{\partial}{\partial t} M_r^{\ell m} + \frac{\partial}{\partial r} M_t^{\ell m} - \frac{2\mathcal{M}}{r(r-2\mathcal{M})} M_t^{\ell m} \right) \quad (66b)$$

$$H_{rr}^{\ell m} \rightarrow \tilde{H}_{rr}^{\ell m} = H_{rr}^{\ell m} - \left( 2 \frac{\partial}{\partial r} M_r^{\ell m} + \frac{2\mathcal{M}}{r(r-2\mathcal{M})} M_r^{\ell m} \right) \quad (66c)$$

$$H_t^{\ell m} \rightarrow \tilde{H}_t^{\ell m} = H_t^{\ell m} - \left( \frac{\partial}{\partial t} M^{\ell m} + M_t^{\ell m} \right) \quad (66d)$$

$$H_r^{\ell m} \rightarrow \tilde{H}_r^{\ell m} = H_r^{\ell m} - \left( \frac{\partial}{\partial r} M^{\ell m} - \frac{2}{r} M^{\ell m} + M_r^{\ell m} \right) \quad (66e)$$

$$K^{\ell m} \rightarrow \tilde{K}^{\ell m} = K^{\ell m} - \frac{1}{r^2} [2(r-2\mathcal{M})M_r^{\ell m} - \ell(\ell+1)M^{\ell m}] \quad (66f)$$

$$G^{\ell m} \rightarrow \tilde{G}^{\ell m} = G^{\ell m} - \frac{2}{r^2} M^{\ell m} \quad (66g)$$

et

$$h_t^{\ell m} \rightarrow \tilde{h}_t^{\ell m} = h_t^{\ell m} - \left( \frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{\ell m} \right) \quad (66h)$$

$$h_r^{\ell m} \rightarrow \tilde{h}_r^{\ell m} = h_r^{\ell m} - \left( \frac{\partial}{\partial r} \Lambda^{\ell m} - \frac{2}{r} \Lambda^{\ell m} \right) \quad (66i)$$

$$h^{\ell m} \rightarrow \tilde{h}^{\ell m} = h^{\ell m} - 2\Lambda^{\ell m}. \quad (66j)$$

### C. Structure du tenseur d'impulsion-énergie source des perturbations gravitationnelles du trou noir de Schwarzschild

• La forme la plus générale du tenseur d'impulsion-énergie source des perturbations gravitationnelles du trou noir de Schwarzschild est donnée par

$$\tau_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = \tau_{\mu\nu}^{\text{pol}}(t, r, \theta, \varphi) + \tau_{\mu\nu}^{\text{ax}}(t, r, \theta, \varphi) \quad (67a)$$

avec

$$\tau_{\mu\nu}^{\text{pol}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} T_{tt}^{\ell m} Y^{\ell m} & T_{tr}^{\ell m} Y^{\ell m} & T_t^{\ell m} Y_{\theta}^{\ell m} & T_t^{\ell m} Y_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & T_{rr}^{\ell m} Y^{\ell m} & T_r^{\ell m} Y_{\theta}^{\ell m} & T_r^{\ell m} Y_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & T_1^{\ell m} Y_{\theta\theta}^{\ell m} + T_2^{\ell m} Y_{\theta\theta}^{\ell m} & T_2^{\ell m} Y_{\theta\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & T_1^{\ell m} \sin^2 \theta Y_{\varphi\varphi}^{\ell m} + T_2^{\ell m} Y_{\varphi\varphi}^{\ell m} \end{pmatrix} \quad (67b)$$

et

$$\tau_{\mu\nu}^{\text{ax}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & L_t^{\ell m} X_{\theta}^{\ell m} & L_t^{\ell m} X_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & 0 & L_r^{\ell m} X_{\theta}^{\ell m} & L_r^{\ell m} X_{\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & L^{\ell m} X_{\theta\theta}^{\ell m} & L^{\ell m} X_{\theta\varphi}^{\ell m} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & L^{\ell m} X_{\varphi\varphi}^{\ell m} \end{pmatrix}. \quad (67c)$$

Convention:  $T_t^{\ell m} = T_r^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0$  et  $T_1^{\ell m} = T_2^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0, 1$  et  $L_t^{\ell m} = L_r^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0$  et  $L^{\ell m} = 0$  pour  $\ell = 0, 1$ . Les dépendances en  $t$  et  $r$  sont incluses dans les fonctions  $T_{tt}^{\ell m}, T_{tr}^{\ell m}, T_{rr}^{\ell m}, T_t^{\ell m}, T_r^{\ell m}, L_t^{\ell m}, L_r^{\ell m}, T_1^{\ell m}, T_2^{\ell m}$  et  $L^{\ell m}$  qui sont les données du problème et qui dépendent du processus physique étudié. Leurs expressions sont bien connues par exemple dans le cas d'une étoile (assimilée à un point matériel) en mouvement (radial, circulaire ou même quelconque) autour du trou noir de Schwarzschild. Des expressions approchées existent aussi pour un disque d'accrétion.

#### D. Travail avec les fonctions de Cunningham-Price-Moncrief invariantes de jauge

• Avec Cunningham, Price et Moncrief, on introduit deux nouvelles familles de fonctions indexées par  $\ell$  et  $m$  et construites à partir des fonctions définissant le tenseur  $h_{\mu\nu}$  et notées  $\psi^{\ell m(\text{pol})}$  et  $\psi^{\ell m(\text{ax})}$ . On a

$$\psi^{\ell m(\text{pol})} = \frac{r}{\ell(\ell+1)[(\ell-1)(\ell+2)r+6\mathcal{M}]} \left[ \ell(\ell+1)r\kappa_1^{\ell m} + 4r \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^2 \kappa_2^{\ell m} \right] \quad (68a)$$

avec

$$\kappa_1^{\ell m} = K^{\ell m} + \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right) \left( r \frac{\partial G^{\ell m}}{\partial r} - \frac{2}{r} h_r^{\ell m} \right) \quad (68b)$$

et

$$\kappa_2^{\ell m} = \frac{1}{2} H_{rr}^{\ell m} - \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^{-1/2} K^{\ell m} \right] \quad (68c)$$

ainsi que

$$\psi^{\ell m(\text{ax})} = \frac{r}{(\ell-1)(\ell+2)} \left[ \frac{\partial h_r^{\ell m}}{\partial t} - r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h_t^{\ell m}}{r^2} \right) \right]. \quad (69a)$$

On peut vérifier qu'elles sont l'une et l'autre invariantes dans la transformation de jauge (66).

• Références:

- V. Moncrief, *Ann. Phys. (N.Y.)* **88**, p. 323 (1974)
- C. T. Cunningham, R. H. Price and V. Moncrief, *Astrophys. J.* **224**, p. 643 (1978)
- C. T. Cunningham, R. H. Price and V. Moncrief, *Astrophys. J.* **230**, p. 870 (1979)
- A. Nagar and L. Rezzolla, *Class. Quantum Grav.* **22**, p. R167 (2005)

• Les deux fonctions de Cunningham, Price et Moncrief permettent d'accéder à différentes quantités physiques "observables" à l'infini spatial, i.e. pour  $r \rightarrow +\infty$ , par un observateur au repos. Ainsi, on a:

- Les amplitudes des ondes gravitationnelles correspondant aux polarisations + et  $\times$  qui sont données par

$$h_+ = h_+^{\text{pol}} + h_+^{\text{ax}} \quad \text{et} \quad h_\times = h_\times^{\text{pol}} + h_\times^{\text{ax}} \quad (70a)$$

avec

$$h_+^{\text{pol}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \psi^{\ell m (\text{pol})} \left( Y_{\theta\theta}^{\ell m} - \frac{Y_{\varphi\varphi}^{\ell m}}{\sin^2 \theta} \right) + \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right), \quad (70b)$$

$$h_{\times}^{\text{pol}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \psi^{\ell m (\text{pol})} \frac{Y_{\theta\varphi}^{\ell m}}{\sin \theta} + \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right), \quad (70c)$$

$$h_+^{\text{ax}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \psi^{\ell m (\text{ax})} \left( X_{\theta\theta}^{\ell m} - \frac{X_{\varphi\varphi}^{\ell m}}{\sin^2 \theta} \right) + \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right), \quad (70d)$$

$$h_{\times}^{\text{ax}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \psi^{\ell m (\text{ax})} \frac{X_{\theta\varphi}^{\ell m}}{\sin \theta} + \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right), \quad (70e)$$

- la puissance totale rayonnée par le trou noir sous forme d'ondes gravitationnelles qui est donnée par

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{16\pi} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \left[ \left| \frac{d\psi^{\ell m (\text{pol})}}{dt} \right|^2 + \left| \frac{d\psi^{\ell m (\text{ax})}}{dt} \right|^2 \right] \right\}, \quad (71)$$

- l'énergie gravitationnelle rayonnée par unité de fréquence par le trou noir qui est donnée par

$$\frac{dE}{d\omega} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{16\pi} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \omega^2 \left[ \left| \tilde{\psi}^{\ell m (\text{pol})}(\omega) \right|^2 + \left| \tilde{\psi}^{\ell m (\text{ax})}(\omega) \right|^2 \right] \right\} \quad (72)$$

avec  $\tilde{\psi}^{\ell m (\text{pol})}(\omega, r)$  et  $\tilde{\psi}^{\ell m (\text{ax})}(\omega, r)$  qui désignent les transformées de Fourier des fonctions  $\psi^{\ell m (\text{pol})}(t, r)$  et  $\psi^{\ell m (\text{ax})}(t, r)$ ,

- la perte de moment cinétique par unité de temps du trou noir due à l'émission d'ondes gravitationnelles qui est donnée par

$$\frac{dJ}{dt} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{16\pi} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} im \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \left[ \frac{d\psi^{\ell m (\text{pol})}}{dt} (\psi^{\ell m (\text{pol})})^* + \frac{d\psi^{\ell m (\text{ax})}}{dt} (\psi^{\ell m (\text{ax})})^* \right] \right\}. \quad (73)$$

### E. Equations vérifiées par les fonctions de Cunningham-Price-Moncrief

• A partir de l'équation des perturbations gravitationnelles (15), on peut obtenir deux EDP du second ordre satisfaites par les fonctions de Cunningham-Price-Moncrief. On trouve que les fonctions  $\psi^{\ell m (\text{pol})}$  vérifient l'équation de Zerilli

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V_\ell^{\text{pol}} \right] \psi^{\ell m (\text{pol})} = S^{\ell m (\text{pol})} \quad (74a)$$

avec

$$V_\ell^{\text{pol}}(r) = \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \left( \frac{((\ell - 1)\ell(\ell + 1)(\ell + 2)r^3 + 6(\ell - 1)^2(\ell + 2)^2\mathcal{M}r^2 + 36(\ell - 1)(\ell + 2)\mathcal{M}^2r + 72\mathcal{M}^3)}{[(\ell - 1)(\ell + 2)r + 6\mathcal{M}]^2 r^3} \right) \quad (74b)$$

tandis que les fonctions  $\psi^{\ell m (\text{ax})}$  vérifient l'équation de Regge-Wheeler

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V_\ell^{\text{ax}} \right] \psi^{\ell m (\text{ax})} = S^{\ell m (\text{ax})} \quad (75a)$$

avec

$$V_\ell^{\text{ax}}(r) = \left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \left( \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - \frac{6\mathcal{M}}{r^3} \right). \quad (75b)$$

Ici on a introduit la coordonnée de Regge-Wheeler  $r^*$  qui est reliée à la coordonnée de Schwarzschild  $r$  (pour  $r > 2\mathcal{M}$ ) par

$$\left( 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} \right) \frac{d}{dr} = \frac{d}{dr^*} \quad (76)$$

ce qui permet d'écrire

$$r^* = r + 2\mathcal{M} \ln(r - 2\mathcal{M}) + \text{Cte}. \quad (77)$$

On notera que la fonction  $r^* = r^*(r)$  est une bijection de  $]2\mathcal{M}, +\infty[$  dans  $] - \infty, +\infty[$  et plus particulièrement que l'horizon des événements du trou noir en  $r = 2\mathcal{M}$  correspond à  $r^* = -\infty$ . Il faut aussi noter que les termes de sources en polaire et en axial s'obtiennent à partir des coefficients  $T_{tt}^{\ell m}, T_{tr}^{\ell m}, T_{rr}^{\ell m}, T_t^{\ell m}, T_r^{\ell m}, L_t^{\ell m}, L_r^{\ell m}, T_1^{\ell m}, T_2^{\ell m}$  et  $L^{\ell m}$  définissant le tenseur d'impulsion-énergie responsable des perturbations gravitationnelles.

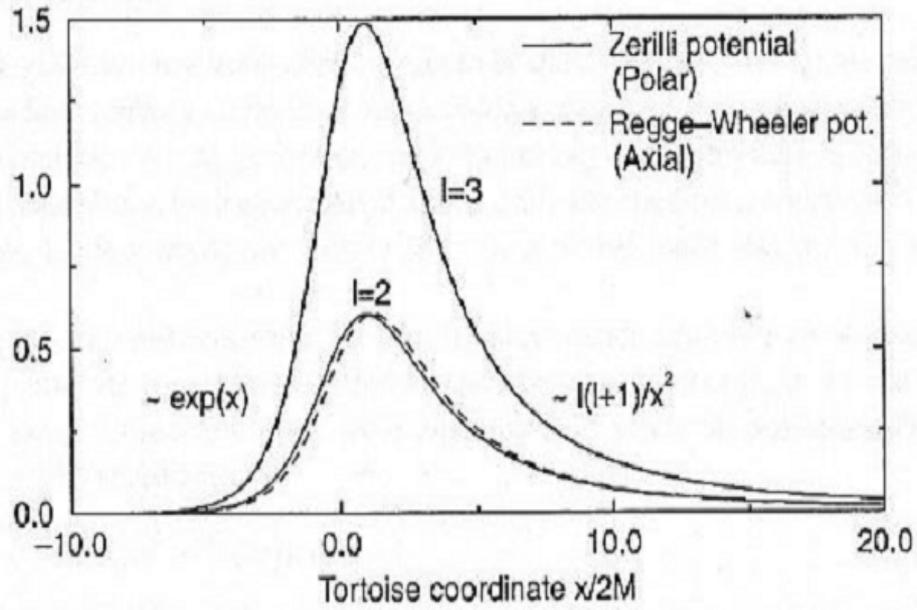


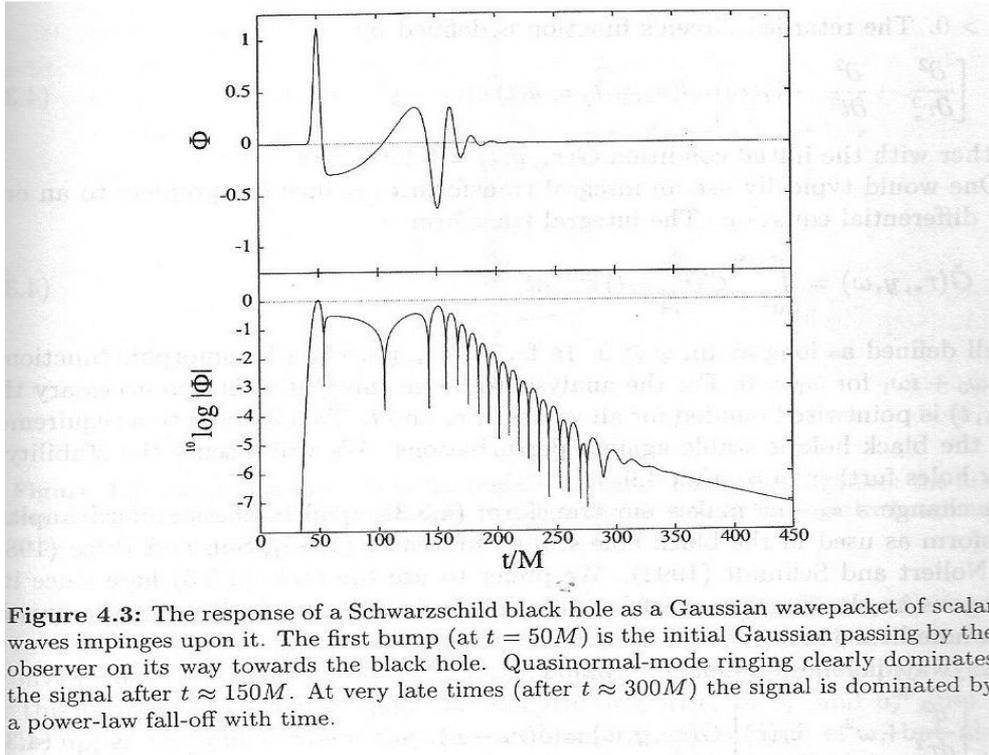
Figure 1. Regge-Wheeler and Zerilli potentials for  $L = 2$  and  $3$ .

FIG. 1: Les potentiels de Regge-Wheeler et de Zerilli.

• Références:

- T. Regge and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, p. 1063 (1957)
- F. J. Zerilli, *Phys. Rev.* **D 2**, p. 2141 (1970)

#### IV. EXEMPLES DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DES ONDES GRAVITATIONNELLES SUR LE TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD



**Figure 4.3:** The response of a Schwarzschild black hole as a Gaussian wavepacket of scalar waves impinges upon it. The first bump (at  $t = 50M$ ) is the initial Gaussian passing by the observer on its way towards the black hole. Quasinormal-mode ringing clearly dominates the signal after  $t \approx 150M$ . At very late times (after  $t \approx 300M$ ) the signal is dominated by a power-law fall-off with time.

FIG. 2: Excitation du trou noir de Schwarzschild par un paquet d'onde gaussien. Mise en évidence de la sonnerie.

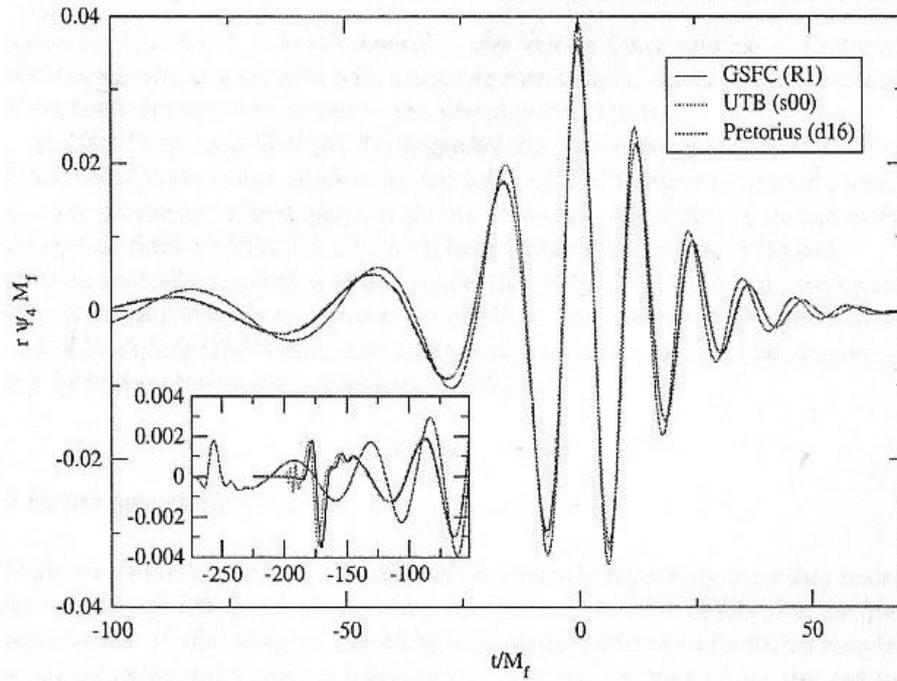


Fig. 2 Gravitational radiation waveform emitted by two coalescing black holes (courtesy of the authors)

FIG. 3: Coalescence de deux trous noirs et sonnerie du trou noir final.

• Références:

- F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 121101 (2005)
- M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti and Y. Zlochower, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111101 (2006)
- J. G. Baker, J. Centrella, D.-I. Choi, M. Koppitz and J. van Meter, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111102 (2006)

## V. MODES QUASI-NORMAUX ET RÉSONANCES DU TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD

### A. Matrice $S$ du trou noir de Schwarzschild, modes quasi-normaux et résonances

- On va étudier le problème de la résonance du trou noir de Schwarzschild en le considérant comme un problème de diffusion (scattering).

- On travaille dans cette section en régime harmonique (dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$  pour les tenseurs  $h_{\mu\nu}$  et  $\tau_{\mu\nu}$ ). En notant  $\tilde{\psi}^{\ell m(\text{pol})}(\omega, r)$  et  $\tilde{\psi}^{\ell m(\text{ax})}(\omega, r)$  les transformées de Fourier des fonctions polaires et axiales de Cunningham-Price-Moncrief et en notant  $\tilde{S}^{\ell m(\text{pol})}(\omega, r)$  et  $S^{\ell m(\text{ax})}(\omega, r)$  les transformées de Fourier de leurs sources  $S^{\ell m(\text{ax})}$  et  $S^{\ell m(\text{pol})}$ , les équations de Regge-Wheeler et de Zerilli deviennent des EDP du type "Schrödinger" indépendantes du temps. L'équation de Zerilli conduit à

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + [\omega^2 - V_\ell^{\text{pol}}(r)] \right) \psi^{\ell m(\text{pol})}(\omega, r) = S^{\ell m(\text{pol})}(\omega, r) \quad (78)$$

et celle de Regge-Wheeler à

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + [\omega^2 - V_\ell^{\text{ax}}(r)] \right) \psi^{\ell m(\text{ax})}(\omega, r) = S^{\ell m(\text{ax})}(\omega, r). \quad (79)$$

- On va désormais s'intéresser aux oscillations libres du trou noir de Schwarzschild, i.e. on va supposer qu'il n'existe pas de sources des perturbations gravitationnelles: on a écarté le trou noir de sa "position d'équilibre" où il est statique et à symétrie sphérique et on va regarder ce qui se passe. On cherche à résoudre les EDP

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + [\omega^2 - V_\ell^{\text{pol}}(r)] \right) \psi^{\ell m(\text{pol})}(\omega, r) = 0 \quad (80)$$

et

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + [\omega^2 - V_\ell^{\text{ax}}(r)] \right) \psi^{\ell m(\text{ax})}(\omega, r) = 0. \quad (81)$$

On s'intéresse plus particulièrement aux modes solutions de ces équations et vérifiant les conditions aux limites:

(i) les fonctions  $\psi^{\ell m(\text{pol/ax})}$  ont un comportement rentrant à l'horizon des événements  $r = 2M$ , i.e.

$$\psi^{\ell m} \underset{r_* \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-i\omega r_*} \quad (82a)$$

(ii) A l'infini spatial  $r \rightarrow +\infty$ , les fonctions  $\psi^{\ell m (\text{pol/ax})}$  présentent un comportement asymptotique du type

$$\psi^{\ell m} \underset{r_* \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{T_\ell(\omega)} e^{-i\omega r_* + i\ell\pi/2} - \frac{S_\ell(\omega)}{T_\ell(\omega)} e^{+i\omega r_* - i\ell\pi/2}. \quad (82b)$$

Ces équations permettent de définir les coefficients  $S_\ell(\omega)$  d'une matrice  $S$  ou matrice de diffusion en polaire et en axial.

- Pour certaines valeurs complexes de  $\omega$ ,  $S_\ell(\omega)$  présente un pôle simple (c'est le cas aussi de  $T_\ell(\omega)$  alors que  $S_\ell(\omega)/T_\ell(\omega)$  reste défini.) Ces valeurs complexes sont les fréquences des modes quasi-normaux du trou noir, ces modes étant définis comme les solutions de l'équation d'onde qui ont un comportement entrant à l'horizon et sortant à l'infini. Le spectre des fréquences quasi-normales est le spectre des résonances du trou noir.

- On note  $\omega_{\ell n} = \omega_{\ell n}^{(o)} - i\Gamma_{\ell n}/2$  avec  $\omega_{\ell n}^{(o)} > 0$  et  $\Gamma_{\ell n} > 0$  les fréquences quasi-normales. Ici,  $\omega_{\ell n}^{(o)}$  est donc la fréquence d'oscillation du mode quasi-normal correspondant tandis que  $\Gamma_{\ell n}/2$  représente son atténuation. Au voisinage de  $\omega_{\ell n}$ , les coefficients  $S_\ell(\omega)$  sont de la forme Breit-Wigner form, i.e.,

$$S_\ell(\omega) \propto \frac{\Gamma_{\ell p}/2}{\omega - \omega_{\ell p}^{(o)} + i\Gamma_{\ell p}/2}. \quad (83)$$

- Isopectralité: Chandrasekhar a prouvé que les spectres des fréquences quasi-normales en polaire et en axial sont identiques!

- Recherche des fréquences quasi-normales. Méthode numérique: les solutions de l'équation de Regge-Wheeler indépendante du temps peuvent être recherchée sous la forme

$$\Phi_\ell(r) = (r - 2M)^\rho \left(\frac{2M}{r}\right)^{2\rho} e^{-\rho\left(\frac{r-2M}{2M}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{r-2M}{r}\right)^k \quad (84)$$

avec  $\rho = -i2M\omega$ , les  $a_k$  vérifiant la relation de récurrence  $\alpha_k a_{k+1} + \beta_k a_k + \gamma_k a_{k-1} = 0$  avec  $\alpha_k = k^2 + 2k(\rho + 1) + 2\rho + 1$ ,  $\beta_k = -[2k^2 + 2k(4\rho + 1) + 8\rho^2 + 4\rho + \ell(\ell + 1) + 1]$  et  $\gamma_k = k^2 + 4k\rho + 4\rho^2$ . Le coefficient  $S_\ell(\omega)$  a un pôle lorsque  $\sum a_k$  converge ou, de façon équivalente lorsque le déterminant de Hill

$$D = \begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & \cdot & \cdot & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \cdot & \cdots \\ \cdot & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0. \quad (85)$$

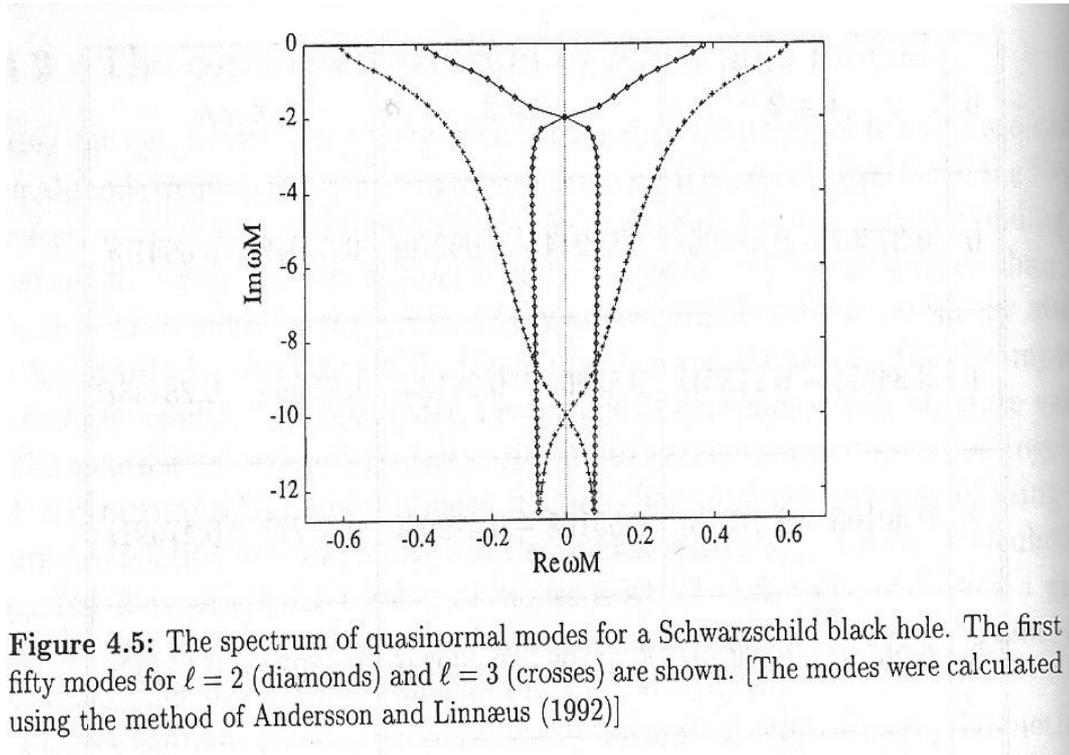


FIG. 4: Spectre des fréquences quasi-normales du trou noir de Schwarzschild.

TABLE I: Quelques valeurs des fréquences quasi-normales (2M=1).

$\ell$	$n$	Exact	Exact
		$\omega_{\ell n}^{(o)}$	$\Gamma_{\ell n}/2$
2	1	0.74734	-0.17793
	2	0.69342	-0.54783
	3	0.60211	-0.95655
3	1	1.19889	-0.18541
	2	1.16529	-0.56260
	3	1.10337	-0.95819
4	1	1.61836	-0.18832
	2	1.59326	-0.56866
	3	1.54542	-0.95982

• En unités physiques, les valeurs précédentes de  $\omega_{\ell n}^{(o)}$  et de  $\Gamma_{\ell n}/2$  donnent pour  $\ell = 2$  et  $n = 1$  les résultats suivants:

- Pour un trou noir de 10 masses solaires, la fréquence des oscillations est de 1.21 kHz et le temps caractéristique de leur atténuation est de  $5.55 \times 10^{-4}$  s.

- Pour un trou noir de  $10^6$  masses solaires, la fréquence des oscillations est de  $1.21 \times 10^{-2}$  Hz et le temps caractéristique de leur atténuation est de 55.5 s.

• Références:

- C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev. D* **1**, p. 2870 (1970)
- W. H. Press, *Astrophys. J.* **170**, p. L105 (1971)
- S. Chandrasekhar “The mathematical theory of black holes”, Oxford University Press (1984)
- E. W. Leaver”, *Proc. R. Soc. London A* **402**, p. 285 (1985)

## B. Interprétation physique des modes quasi-normaux et des résonances

- Interprétation en théorie du moment angulaire complexe (pôles de Regge):

$$\lambda_n(\omega) = \left[ 3\sqrt{3} M\omega + \frac{\sqrt{3} a_n}{18M\omega} \right] + i(n - 1/2) \left[ 1 + \frac{b_n}{27(M\omega)^2} \right] + \mathcal{O}_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\omega^3} \right) \quad (86)$$

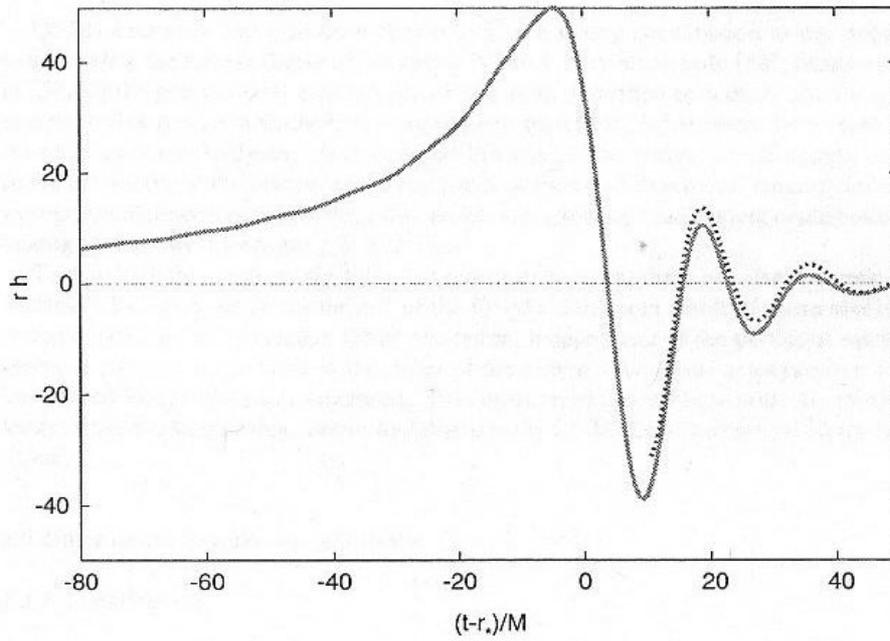
$$\operatorname{Re} \lambda_n \left( \omega_{\ell n}^{(0)} \right) = \ell + 1/2, \quad \ell \in \mathbf{N}. \quad (87a)$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{\operatorname{Im} \lambda_n(\omega) [d/d\omega \operatorname{Re} \lambda_n(\omega)]}{[d/d\omega \operatorname{Re} \lambda_n(\omega)]^2 + [d/d\omega \operatorname{Im} \lambda_n(\omega)]^2} \Big|_{\omega=\omega_{\ell n}^{(0)}} \quad (87b)$$

- Références:

- C. J. Goebel, *Astrophys. J.* **172**, L95 (1972)
- Y. Décanini, A. Folacci and B. P. Jensen, *Phys. Rev. D* **67**, 124017 (2003)
- Y. Décanini and A. Folacci, arXiv: 0906.2601

## VI. COMPLÉMENT ET CONCLUSION



**Fig. 1** The gravitational signal emitted when a Schwarzschild black hole is perturbed by a radially infalling particle (*solid line*); the analytical fit (*dashed line*) has been obtained using a linear combination of the first two  $\ell = 2$  black hole quasi-normal modes

FIG. 5: Reconstitution de la sonnerie du trou noir de Schwarzschild excité par une particule en chute radiale.

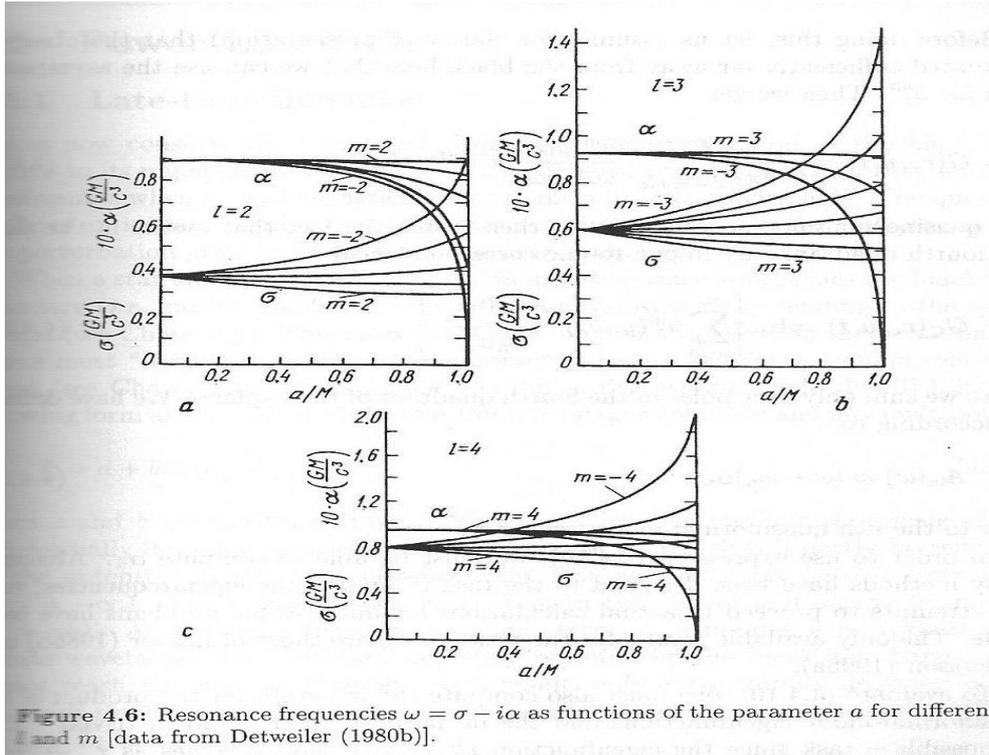


FIG. 6: Influence de la rotation du trou noir de Kerr sur la fréquence quasi-normale correspondant à  $\ell = 2$ .