

PHÉNOMÉNOLOGIE DU TRANSPORT DES ESPÈCES CHARGÉES DANS LA GALAXIE

David Maurin (LPNHE)
dmaurin@lpnhe.in2p3.fr

IN2P3 - CNRS - Universités Paris VI et Paris VII
4 place Jussieu, Tour 43 – Rez-de-chaussée
75252 Paris Cedex 05

École de Physique des Astroparticules
7-12 septembre 2009
OHP, Saint Michel l’Observatoire

Contents

I. GÉNÉRALITÉS SUR LE RAYONNEMENT COSMIQUE (PPT)	1
II. NOTRE GALAXIE DU POINT DE VUE DU RC (PPT)	1
3 Notion de grammage et “Leaky-Box Model”	2
3.1 Randonnée épique dans la Galaxie	2
3.2 Le modèle de la boîte qui fuit	5
4 Équation de diffusion : quelques propriétés	8
4.1 Préambule : justification de la diffusion avec les mains	8
4.2 La diffusion en quelques calculs	9
5 Solution dans des cas idéalisés : application au RCG	11
5.1 Noyaux stables et dégénérescence D_0/L	11
5.2 Noyaux radioactifs et détermination de D_0	12
5.3 Conclusions	14
VI. TRUCS TIÈDES ET CHAUDS DU RCG AUJOURD’HUI (PPT)	15
ANNEXES : QUELQUES QUANTITÉS UTILES	16

3 Notion de grammage et “Leaky-Box Model”

Le premier objectif est de comprendre les abondances anormales de certains éléments. En effet, ces derniers (comme le bore) sont surabondants de plusieurs ordres de grandeurs, par rapport aux abondances mesurées au niveau du soleil. Ceci nous indique que ces éléments ont été produits durant le transport des RC des sources jusqu’à nous.

Le but de cette section est donc d’introduire un modèle très simple capable d’expliquer une grande partie des observations du RCG.

3.1 Randonnée épique dans la Galaxie

Nous commençons par quelques définitions et notations avant d’entrer dans le vif du sujet.

3.1.1 Définitions

L’indice i indique l’espèce considérée. Par exemple, nous mesurons un flux de protons en installant un détecteur dans l’espace (AMS), ou un flux de γ grâce à un télescope Čerenkov au sol (H.E.S.S.).

- Intensité

$$I_i = \# \text{ particules cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} . \quad (1)$$

- Intensité différentielle

$$\boxed{\frac{dI_i}{dE} = \# \text{ particules cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ GeV}^{-1}} . \quad (2)$$

- Flux et flux différentiel : en toute rigueur, le flux est l’intensité vue à travers une surface sous-tendue par un angle solide $\Delta\Omega$ (du détecteur), i.e.

$$F_i(\Delta\Omega) = \int_{\Delta\Omega} I_i(\theta, \phi) d\Omega . \quad (3)$$

- Densité : puisque le flux de cosmiques est très isotrope aux énergies que nous considérons, l’intensité ne dépend pas de la direction. La densité de particules ayant une vitesse v est donc donnée par :

$$N_i = \frac{4\pi}{v} I_i \quad (\# \text{ particules cm}^{-3}) ;$$
$$\boxed{\frac{dN_i}{dE} = \frac{4\pi}{v} \frac{dI_i}{dE} \quad (\# \text{ particules cm}^{-3} \text{ GeV}^{-1})} \quad (\text{souvent notée } N_i(E)) . \quad (4)$$

Ceci dit, dans la suite, sauf mention explicite, toutes les quantités considérées sont des quantités différentielles que nous noterons comme leurs homologues non-différentielles : $I_i(E)$ et $N_i(E)$ sont l’intensité et la densité (différentielle) de l’espèce i du rayonnement cosmique. Notez aussi que l’intensité différentielle est souvent appelée abusivement *flux*.

3.1.2 Description plus détaillée du problème

Commençons par un peu de terminologie (définition pratique, pas forcément la meilleure) :

- **Les espèces primaires** (densité N_p ; e.g. les noyaux de C) sont celles présentes au niveau des sources du rayonnement cosmique (e.g. composition de l'ISM autour des restes de SN).
- **Les espèces secondaires** (densité N_s ; e.g. B) sont celles qui sont surabondantes par rapport aux abondances solaires (a priori absentes des sources).

Soit une espèce secondaire s donnée. Les seuls processus physiques connus pour créer cette espèce sont i) la fusion ou ii) la fragmentation d'autres noyaux. Aux énergies au-delà du GeV, la fusion est complètement inefficace ; reste donc la fragmentation¹. Considérons le flux de bore qui est secondaire. Les noyaux les plus abondants après le bore sont les noyaux de carbone, d'azote et d'oxygène, qui sont des noyaux primaires. La seule explication raisonnable pour expliquer l'origine du bore, est de faire l'hypothèse que des noyaux plus lourds et plus abondants se sont fragmentés entre le moment où ils ont été accélérés et leur détection. Pour se fragmenter, il faut qu'il y ait une cible : ce sera le gaz du milieu interstellaire (ISM).

Nous avons ainsi tous les ingrédients réunis pour comprendre l'origine des noyaux secondaires². Pour simplifier la discussion, nous considérons un noyau secondaire N_s , issu de la fragmentation d'un noyau primaire N_p . La réaction à considérer est donc la suivante :



A partir de cette réaction, nous aimerions être capable d'expliquer qualitativement l'abondance B/C observée dans le rayonnement cosmique.

Attention : dans tout ce cours, nous ne considérons que des noyaux énergétiques qui se fragmentent sur les protons (et dans une certaine mesure l'hélium) du milieu interstellaire. La physique nucléaire nous indique que l'énergie cinétique de chaque nucléon est conservée. Donc un C d'énergie 1 GeV/nucleon se fragmente en un B qui continue sa route avec la même énergie 1 GeV/nucleon. La réaction inverse $p + C \rightarrow B$ produit aussi du bore, mais au repos. Elle n'est donc pas considérée dans le RCG, bien qu'elle joue un rôle très important pour suivre les abondances du LiBeB au cours de l'évolution chimique de la Galaxie.

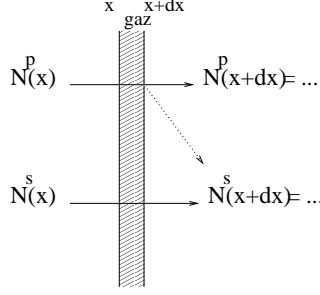
3.1.3 Notion de grammage

Pour l'instant, nous n'avons même pas de modèle en tête. Il s'agit juste de savoir si nous sommes capables de créer du bore dans les bonnes quantités. L'interprétation en terme de modèle de propagation viendra après. Nous avons d'abord besoin de définir le grammage x : si l'on attache un petit filet de surface 1 cm² à une particule, le grammage est la quantité de matière collectée dans ce petit filet le long du parcours de la particule. Le grammage x s'exprime en g cm⁻².

Que se passe-t-il lorsque l'on traverse un grammage x ? Le nombre de disparitions des noyaux N_p et N_s est proportionnel aux sections efficaces σ^p et σ^s ; le nombre de N_s créés est lui proportionnel à la section efficace de production $\sigma^{p \rightarrow s} \equiv \sigma^{ps}$. Nous rappelons que la section efficace (mb = 10⁻²⁷ cm²) donne la *surface* effective de réaction. Si nous faisons simplement le bilan de ce qui est

¹La dénomination fragmentation s'applique en réalité à un processus très spécifique de physique nucléaire, qui peut cohabiter avec la spallation, l'abrasion, l'évaporation, etc. Par abus de langage nous utiliserons indifféremment les mots spallation, fragmentation ici.

²Nous nous focalisons ici sur le bore, mais les noyaux suivants sont aussi secondaires : deutérium, ³He, Li, Be, B, et le groupe d'éléments Z=21-23 au dessous du Fer, sans parler d'éléments plus lourds au-delà de Z=30...



gagné et perdu en passant de x à $x + dx$, nous avons donc :

$$\begin{cases} N_p(x + dx) = N_p(x) - \frac{\sigma^p}{\bar{m}} dx N_p(x) \Leftrightarrow \frac{dN_p(x)}{dx} = -\frac{\sigma^p}{\bar{m}} N_p(x) \Leftrightarrow N_p(x) = N(0) \exp\left(-\frac{\sigma^p}{\bar{m}} x\right) \\ N_s(x + dx) = N_s(x) - \frac{\sigma^s}{\bar{m}} dx N_s(x) + \frac{\sigma^{ps}}{\bar{m}} dx N_p(x) \Leftrightarrow \frac{dN_s(x)}{dx} = -\frac{\sigma^s}{\bar{m}} N_s(x) + \frac{\sigma^{ps}}{\bar{m}} N_p(x) \end{cases} \quad (6)$$

Dans ces équations, la quantité \bar{m} est la masse atomique moyenne du milieu interstellaire en g (moyennée sur les différentes espèces). Si l'on ne considère que l'hydrogène de l'ISM, $\bar{m} = m_p(\text{amu})/\mathcal{N}_A$.

Après un peu d'algèbre, il est simple d'arriver au résultat suivant :

$$\frac{N_s(x)}{N_p(x)} = f(x, \sigma^{ps}, \sigma^p, \sigma^s) = \left(\frac{\sigma^{ps}}{\sigma^s - \sigma^p} \right) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\sigma^s}{\bar{m}} x\right)}{\exp\left(-\frac{\sigma^p}{\bar{m}} x\right)} = \left. \frac{N_s}{N_p} \right|_{\text{mesure}}. \quad (7)$$

Nous ne rentrerons pas dans le détail des valeurs numériques (les sections efficaces pour les noyaux sont de l'ordre de la centaine de mb). Ceci-dit, si l'on considère l'équation ci-dessous avec la bonne application numérique (voir par exemple dans le Longair, vol. 2, p. 310), nous obtenons comme bon grammage pour reproduire l'observation de B/C

$$\boxed{x_0^{\text{B/C}} = 5 \text{ g cm}^{-2}}. \quad (8)$$

Quelques commentaires sur cette quantité :

- les noyaux mesurés ont traversé $\sim 5 \text{ g cm}^{-2}$ de matière durant leur propagation (nous rappelons que nous n'avons toujours pas spécifié de modèle de propagation à ce stade).
- En utilisant $\bar{m} = m_p/\mathcal{N}_A$ et la densité moyenne de l'ISM de 1 cm^{-3} dans le disque, si le RC se propage en ligne droite, il doit avoir parcouru une distance $l = x/(n\bar{m}) = 1 \text{ Mpc}$. Nous voyons très bien que si l'on croit que les rayons cosmiques viennent de notre Galaxie, avec les sources (SN) dans le disque, ces noyaux n'ont pas pu aller en ligne droite (rayon de la Galaxie $\sim 20 \text{ kpc}$). Par ailleurs, ces RC se baladent à la vitesse $\sim c = 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1} = 3 \cdot 10^2 \text{ kpc Myr}^{-1}$, ce qui signifie qu'ils ont voyagé pendant un temps $t = l/c \sim 10 \text{ Myr}$.
- Considérons un détecteur sur ballon, volant à une altitude moyenne de 40 km (altitude typique). Le grammage dû à l'atmosphère résiduelle peut être calculée simplement (intégrale

de la densité sur l'épaisseur traversée) : elle vaut $\sim 10 \text{ g cm}^{-2}$. Ceci veut dire que durant l'instant final de la traversée de l'atmosphère, ils traverseront autant de matière que pendant les millions d'années de leur voyage dans la Galaxie. Ceci pour dire aussi que le résultat des expériences ballons doit en quelque sorte être *déconvolué* des effets de l'atmosphère pour exhiber les flux *vrais*.

3.2 Le modèle de la boîte qui fuit

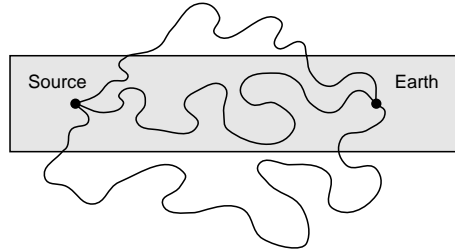
Si l'on essaie de connecter le modèle précédent (appelé *Slab Model*) à la réalité astrophysique, nous pouvons déjà nous poser plusieurs questions :

- Nous imaginons bien qu'il n'y a pas qu'une seule source produisant le rayonnement cosmique. Est-il alors raisonnable d'imaginer que si l'on a plusieurs sources, les cosmiques de chacune d'entre elles aient traversé le même grammage ?
- Les distances parcourues sont énormes et plus grande que la taille de la Galaxie, est-il tenable d'imaginer que les RC se sont propagés en ligne droite ?
- Le troisième point le plus critique est qu'expérimentalement, si l'on considère d'autres espèces secondaires, le grammage nécessaire pour retrouver leur flux diffère de celui nécessaire pour retrouver le rapport B/C.

Il est donc nécessaire d'aller plus loin. Nous allons le faire en deux étapes. D'abord en liant le grammage au Leaky-Box, puis en liant le LB aux modèles de diffusion.

3.2.1 Distribution de grammage

Comme nous l'avons dit, la distribution des sources est inhomogène, de même que la distribution de gaz. Il est donc facile d'imaginer que différents parcours de propagation traverseront différents grammage. En quelque sorte, la réalité physique consiste en une superposition de divers chemins (correspondant à des grammage différents) ayant des probabilités plus ou moins grande. En terme mathématique, ceci se traduit par une distribution de probabilité des grammages $G(x)$



(i.e. $\int_0^\infty G(x)dx = 1$), tel que :

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty xG(x)dx \quad \text{et} \quad N_i = \int_0^\infty N_i(x)G(x)dx \quad (9)$$

La quantité $\langle x \rangle$ n'est autre que le grammage moyen traversé par un noyau, qui est proche du grammage obtenu dans le modèle du *slab*. Et N_i est maintenant la densité obtenue comme la convolution de la densité $N_i(x)$ pour un grammage x à la probabilité associée $G(x)$.

La question est maintenant la suivante : quelle doit-être la forme de la distribution de grammage ? Nous sentons bien que cette forme est reliée fondamentalement au mode (modèle donc) de propagation impliqué. Diverses formes ont été utilisées dans la littérature à partir des années 50, avant de réaliser que la forme correcte—correspondant à celle attendue dans un modèle de diffusion—devait être donnée par

$$G(x) = \frac{1}{\lambda_{esc}} \exp\left(\frac{-x}{\lambda_{esc}}\right). \quad (10)$$

Avec ce choix, nous avons $\langle x \rangle = \lambda_{esc}$. Il se trouve qu'une telle distribution de grammage reproduit toutes les données secondaire/primaire simultanément.

3.2.2 Vers le leaky-box

Considérons maintenant l'équation générale que doit suivre une espèce i quelconque :

$$\frac{dN_i(x)}{dx} + \frac{\sigma^i}{\bar{m}} N_i(x) = \bar{q}_i + \sum_{k>i}^{n_{max}} \frac{\sigma^{ki}}{\bar{m}} N_k(x). \quad (11)$$

Si l'on intègre cette équation en utilisant $\bar{N}_i = \int_0^\infty N_i(x) G(x) dx$, et que l'on écrit $\tau_{esc} = \lambda_{esc}/(n\bar{m}v)$, il vient

$$\frac{\bar{N}_i}{\tau_{esc}(E)} + nv\sigma^i \bar{N}_i = \bar{q}_i + \sum_{k>i} nv\sigma^{ki} \bar{N}_i \quad (12)$$

C'est l'équation du LB. Pour un λ_{esc} typique de 10 g cm^{-2} , le temps typique de résidence dans la Galaxie est de

$$\tau_{esc} = \frac{\lambda_{esc}}{n\bar{m}v} \approx \frac{10 \text{ g cm}^{-2}}{1 \text{ cm}^{-3} \times 1.7 \cdot 10^{-24} \text{ g} \times 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}} \times 3 \cdot 10^{-14} (\text{s to Myr}) \approx 10 \text{ Myr}. \quad (13)$$

C'est un résultat que nous avons déjà calculé plus tôt. Notez que dans ce modèle, la Galaxie est considérée comme un milieu homogène avec des quantités moyennées qui ne dépendent pas des coordonnées spatiales.

Remarque : cette équation n'est pas complète, dans le sens où elle ne prend pas en compte les pertes et éventuels gains d'énergie, et la possibilité de décroissance radioactive (si le noyau est instable, voir plus loin).

N.B. : en pratique, ce sont les champs magnétiques qui jouent le rôle de l'agent confinant. Cependant ce confinement n'est pas parfait, ce qui explique pourquoi il faut considérer un temps d'échappement, qui peut dépendre de l'énergie de la particule. Là se trouve l'origine du nom de la boîte qui fuit (Leaky Box).

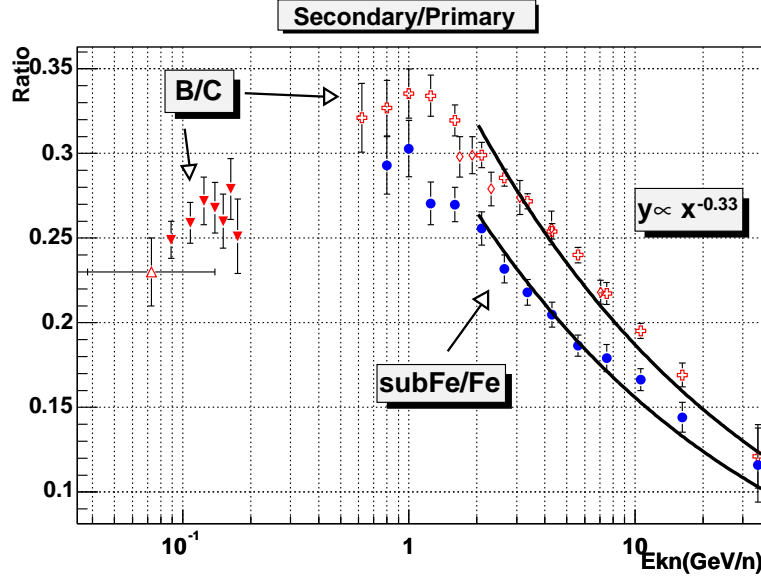
3.2.3 Phénoménologie du LB en deux mots

Le modèle du LB marche surprenamment bien malgré sa simplicité (même si ici, nous sommes parti du grammage pour le construire d'une manière un peu artificielle et détournée...). Nous allons considérer deux quantités : le rapport secondaire sur primaire, et le flux d'un primaire.

Rapport secondaire sur primaire : l'équation du LB est algébrique, il est donc aisé de trouver

$$\frac{\bar{N}_s}{\bar{N}_p} = \frac{\sigma^{ps}/\bar{m}}{\sigma^s/\bar{m} + 1/\lambda_{esc}} . \quad (14)$$

Il se trouve que le rapport B/C dépend de l'énergie, comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessous. La basse énergie doit tenir compte des pertes d'énergie, des sections efficaces de productions



(qui changent beaucoup en dessous du GeV/n), de la modulation solaire qui agit jusqu'à quelques GeV/n, d'où une forme en cloche difficile à interpréter simplement. Par contre, à haute énergie, l'échappement $\lambda_{esc}(E) = \lambda_0 E^{-\delta}$ devient le processus dominant, et l'on peut ré-écrire l'équation (14) comme

$$\frac{\bar{N}_s}{\bar{N}_p}(E) \propto \lambda_{esc}(E) \propto \lambda_0 E^{-\delta} . \quad (15)$$

Aujourd'hui, il n'y a pas suffisamment de données à haute énergie pour atteindre le régime où δ peut-être lu directement de la pente de B/C. A titre indicatif, les ajustements trouvés dans la littérature pour δ varient de $\delta = 0.3-0.8$. Par ailleurs, le grammage à la rigidité $\mathcal{R} = pc/Ze = 1$ GV est donné directement par λ_0 : cette valeur, selon les modèles, varie entre 5 et 15 g cm⁻². C'est de cette valeur que l'on a discuté avant. Nous voyons que pour de plus grandes énergies, le grammage moyen traversé diminue (et donc le temps de confinement dans la boîte diminue).

Flux d'un primaire : il est intéressant aussi d'écrire le flux d'une espèce primaire. En partant de l'équation (12), nous obtenons (si l'on néglige l'effet de la destruction à basse énergie σ^i)

$$\bar{N}_p \propto \bar{q}_p \times \lambda_{esc}(E) . \quad (16)$$

La quantité q_p dont nous n'avons pas encore parlé correspond au spectre d'injection au niveau des sources de l'espèce p . Le spectre mesuré des primaires donne en fait une loi de puissance $\bar{N}_p \propto E^{-\gamma}$. Ceci nous indique, avec $\lambda_{esc} \propto E^{-\delta}$, que le spectre d'injection est proportionnel à $\bar{q}_p \propto E^{-\gamma}/E^{-\delta} = E^{-\alpha}$, avec $\alpha = \gamma - \delta$. Les mesures donnent $\gamma \sim 2.6$, ce qui avec $\delta \sim 0.5$, donne $\alpha \sim 2.1$. C'est une très bonne chose puisque les modèles d'accélération par onde de choc prédisent justement un indice source ~ 2.0 . L'hypothèse est faite que l'indice spectral est universel pour toutes les espèces, seules les abondances sources varient d'une espèce à l'autre.

Conclusion : nous n'en dirons pas plus sur le LBM. Il a été pendant très longtemps utilisé, et il a des vertus pédagogiques. Cependant, le vrai modèle à considérer est le modèle de diffusion. Par ailleurs, il a été montré dans les années 70, que si les modèles de diffusion peuvent se ramener au LBM dans la plupart des cas, ce dernier ne permet pas de décrire correctement les noyaux radioactifs à basse énergie, ou la propagation des électrons et positrons à haute énergie. Il faut donc aller plus loin !

4 Équation de diffusion : quelques propriétés

Cette section est assez *mathématique* dans le sens où nous donnons une collection de résultats (formules) qui nous intéresseront pour la suite. Ceci dit le niveau de mathématique nécessaire est assez élémentaire, et vous êtes invités à (re)faire les calculs. D'autre part, je précise encore une fois qu'il ne s'agit que de phénoménologie : nous n'avons malheureusement pas le temps de nous plonger dans une justification de l'utilisation de la diffusion pour le rayonnement cosmique (voir ci-dessous pour une discussion très succincte). L'application des formules exposées ci-après est laissée à la section suivante.

4.1 Préambule : justification de la diffusion avec les mains

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, il paraît peu raisonnable que les noyaux se propagent en ligne droite. Par ailleurs, l'émission radio synchrotron observée dans plusieurs galaxies signe la présence d'électrons dans une zone plus large que l'épaisseur du disque de matière. Troisième point, les diverses mesures du champs magnétique galactique s'accordent pour trouver à la fois la présence de champs magnétiques réguliers et turbulents. Tout ces éléments indiquent que les particules chargées sont à la fois diffusées et confinées dans un halo diffusif (qui n'a rien à voir avec le halo de matière noire).

Dans le cadre de la théorie quasi-linéaire ($\delta B \ll B$), il est possible de calculer l'action de ces champs turbulents sur la fonction de distribution des particules. Ces questions sont trop complexes pour être traitées dans ce cours, mais le résultat net est une équation de diffusion. Dit autrement, tout se passe comme si les particules étaient déviées d'un petit angle à chaque interaction avec les champs magnétiques turbulents. Ceci conduit à une marche aléatoire, qui est analogue à un processus de diffusion.

4.2 La diffusion en quelques calculs

Du point de vue phénoménologique, l'équation de diffusion s'obtient à partir de l'équation de continuité en spécifiant la forme du courant de diffusion (loi de Fick).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_d + \frac{\partial N(r, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{j}_d = -D \vec{\nabla} N(r, t) \quad \text{donne} \quad \frac{\partial N(r, t)}{\partial t} - \nabla \cdot [D \nabla N(r, t)] = 0 \quad (17)$$

4.2.1 Forme de l'équation à 1D pour la diffusion isotrope

Si l'on considère un coefficient de diffusion isotrope (qui ne dépend pas de la position), nous avons alors

$$\boxed{\frac{\partial N(r, t)}{\partial t} - D \Delta_{\vec{r}} N(r, t) = 0} . \quad (18)$$

C'est l'équation de diffusion bien connue (équation de la chaleur, mouvement Brownien, équation de Schrödinger pour une particule libre). Pour simplifier, nous considérons la diffusion à 1D (il se trouve que la solution à 2D, 3D ou nD est très proche de la solution 1D, voir ci-après) :

$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N(z, t)}{\partial z^2} = 0 . \quad (19)$$

4.2.2 Solution pour un point source, bords à l'infini

Un point très important à se rappeler est que ce sont les conditions aux bords (BC) et/ou à l'origine (IC) qui vont complètement déterminer la forme des solutions. Les conditions aux bords sont de type Dirichlet (valeurs fixes de la fonction sur les bords), Neumann (valeurs fixes de la dérivée de la fonction sur les bords), Churchill, mixtes...³

Les conditions que nous implémentons sont les suivantes :

- $N(t = 0, z = 0) = N_0$;
- $N(t, z = \pm\infty) = 0$.

Il y a plusieurs façons plus ou moins longues pour retrouver cette solution. Les moins aventureux se contenteront de vérifier que la forme ci-dessous est bien solution de l'équation, et qu'elle vérifie à la fois les conditions aux bords et les conditions initiales :

$$N(z, t) = \frac{N_0}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(\frac{-z^2}{4Dt}\right) . \quad (20)$$

Le détail de l'extraction de la solution de manière rigoureuse peut-être faite, par exemple, de la manière suivante :

1. Faire la transformée de Fourier $\tilde{N}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwz} N(z) dz$ (t est une variable muette) ;
2. Trouver la solution $\tilde{N}(w)$ de l'équation dans l'espace de Fourier ;

³Pour aller plus loin sur les solutions de l'équation de propagation, voir Elements of Green's Functions and Propagation (Sect. 3, 8 et 9), G. Barton.

3. Écrire la transformée inverse de la solution $N(z) = 1/(2\pi) \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z} \tilde{N}(\omega) d\omega$;
4. Utiliser le théorème des résidus pour résoudre l'équation : on rappelle qu'il faut former un contour fermé et que l'intégrale sur ce contour est proportionnelle aux résidus de la fonction en ses pôles. Comme la fonction n'a pas de pôle (aucun point où le dénominateur s'annule), l'intégrale sur l'axe réel est égal à l'intégrale sur le demi-cercle accroché à cet axe. En utilisant $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/A} dx = \sqrt{A\pi}$, on arrive au résultat.

Remarque : en fait, le résultat se généralise assez bien à n -dimension (r est le module de la distance à n -dimension)

$$N_{n-dim}(r, t) = \frac{N_0}{(4\pi K t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-r^2}{4Kt}\right). \quad (21)$$

4.2.3 Distance parcourue lors d'un processus diffusif

Imaginons N_0 particules à l'instant $t = 0$ situées à l'origine. Quelle est la position moyenne des particules à l'instant t ? Quelle distance typique les particules ont parcouru durant cet instant t ? La fonction $N(r, t)$ normalisée à 1 sur tout l'espace est une probabilité.

$$\langle z(t) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z N(z, t) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} N(z, t) dz} = 0. \quad (22)$$

Vu que $N(z, t)$ est paire, $zN(z, t)$ est impaire et son intégrale est nulle. C'est le résultat standard de la diffusion. La position moyenne ne change pas, mais par contre, il y a une dispersion spatiale des points.

La distance moyenne parcourue par l'ensemble des particules est donnée par

$$d_{\text{diff}}^2 \equiv \langle z^2(t) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 N(z, t) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} N(z, t) dz} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) dz} = \frac{\sqrt{\pi}/2(4Dt)^{3/2}}{\sqrt{4Dt\pi}} = 2Dt. \quad (23)$$

Nous avons donc

$$d_{\text{diff}} = \sqrt{2Dt}. \quad (24)$$

Deux remarques : une bête analyse dimensionnelle de l'équation (19) aurait donné le bon résultat à un facteur près (notons d'ailleurs que $[D] = L^2/T$). Le résultat se généralise à n dimensions, avec

$$d_{\text{diff}}^{n-dim} = \sqrt{2nDt}, \quad (25)$$

soit $d_{\text{diff}}^{3-dim} = \sqrt{6Dt}$.

Attention : il faut garder à l'esprit que cette distance est une moyenne. Comme on le comprend aisément, la probabilité d'avoir une particule qui a parcourue une distance $k \times d_{\text{diff}}$ est d'autant plus faible que k est grand, mais c'est toujours possible⁴.

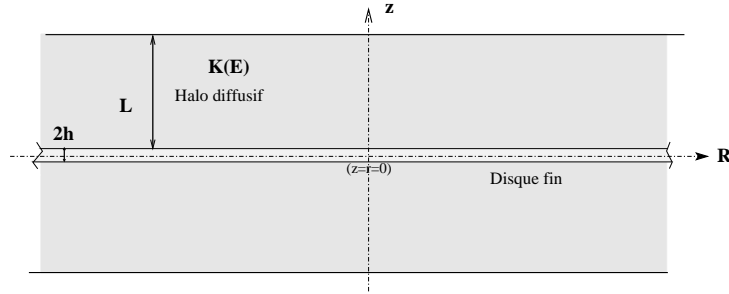
⁴Tant qu'on ne viole pas le principe de causalité, i.e. que l'on considère des distances plus petites que ct . Notez que la forme la plus simple de l'opérateur de diffusion n'empêche pas en théorie d'avoir des particules qui ont violé ce principe. Pour régler ce problème, il faut utiliser l'équation dite du Télégraphe, mais nous n'en avons de toute façon pas besoin ici.

5 Solution dans des cas idéalisés : application au RCG

Nous avons traité dans la section précédente de la propagation à partir d'un point source. Nous voulons ici considérer une situation un peu différente, dans une géométrie proche de celle des modèles utilisés pour décrire le RC. Les hypothèses que nous allons faire sont les suivantes :

- le régime stationnaire est atteint, i.e. $\partial N/\partial t = 0$;
- le gaz et les sources sont distribués dans un disque mince d'épaisseur h ;
- les particules peuvent diffuser dans une zone $|z| < L$, appelé halo diffusif ;
- le rayon de la Galaxie est considéré en première approximation infini.

Ceci est résumé sur la figure qui suit. L'avantage d'une telle géométrie est que la solution ne dépend



que de z , puisque le plan est infini suivant r . L'équation de transport dans ce modèle devient :

$$\boxed{-D \frac{d^2 N}{dz^2} + n_{ISM} \cdot v \cdot \sigma N 2h \delta(z) = 2h \delta(z) q} \quad (26)$$

Le $\delta(z)$ est simplement là pour rappeler que les spallations et les sources ne sont présentes que dans le disque mince, pas dans le halo diffusif.

5.1 Noyaux stables et dégénérescence D_0/L

Il est aisé de montrer que la solution de cette équation est donnée par

$$\boxed{\begin{cases} N(z) = N(0) \cdot \frac{L-z}{L} \\ \frac{2D}{2hL} N(0) + nv\sigma N(0) = q \end{cases}} \quad (27)$$

Cette seconde équation est similaire à l'équation du LBM si nous faisons la substitution

$$\boxed{\tau_{esc} = \frac{2hL}{2D}} \quad (28)$$

Ceci nous amène aux remarques suivantes :

- Le modèle de diffusion présenté est localement (en $z = 0$) équivalent au LBM. En réalité, il serait plus correct de dire que ces modèles sont équivalents car ils ont la même distribution de grammage (historiquement, le LBM a été proposé après le modèle de diffusion, et leurs lien a été établi ultérieurement).
- Comme le LBM est conçu pour reproduire les données du rayonnement cosmique, toutes les combinaisons de paramètres du modèle de diffusion qui vérifient l'équation (28), reproduiront aussi les données. Ceci indique qu'on ne peut pas déterminer simultanément la taille du halo de diffusion L et la normalisation D_0 du coefficient de diffusion. Le rapport secondaire/primaire a une dégénérescence dans ces paramètres.

Dernière remarque : pour revenir quelques instants sur la notion de grammage. Nous noterons que tous les modèles dont la distribution des grammages est exponentielle (voir Eq. 10) permettent de reproduire les données. Il est en fait possible de calculer la fonction $G(r, x)$ (qui dépend de la position maintenant) dans un modèle de diffusion et de montrer que cette fonction correspond à une sorte de combinaison linéaire d'exponentielles, bref de LB.

5.2 Noyaux radioactifs et détermination de D_0

Considérons maintenant un noyau radioactif. Nous avons vu qu'un noyau stable se propageait en moyenne pendant environ 10 Myr. Si l'on considère des noyaux qui ont une durée de vie inférieure à ce temps, nous nous attendons à ce qu'une partie de ces noyaux ait déchu. Le ^{10}Be , avec une demi-vie de 1.51 Myr, est le plus connu de ce qu'on appelle les horloges cosmiques (il y a aussi le ^{26}Cl , ^{36}Cl , ^{54}Mn , et encore plus d'horloges au-delà de $Z = 30$).

A basse énergie ($\lesssim \text{GeV/n}$), nous avons $\gamma = 1$, et donc la durée de vie d'un noyau radioactif en vol vaut

$$t_{rad} = \gamma\tau_0 = \gamma t_{1/2}/\ln(2) \sim \text{Myr} . \quad (29)$$

Nous avons trouvé auparavant $\tau_{esc} = 10$ Myr. Grossièrement, nous sentons bien qu'un noyau radioactif à basse énergie n'atteindra jamais les bords du halo diffusif : un tel noyau, au lieu de dépendre de L/D , ne dépendra que de la valeur de D . A haute énergie, avec γ qui augmente, nous voyons aussi que ce noyau va devenir sensible aux bords de la boîte de diffusion.

5.2.1 Valeur de D_0 et L

En pratique, nous considérons un noyau radioactif secondaire N_r , dont la production est liée à l'interaction du flux du seul noyau primaire N_p sur le gaz du disque (avec une section efficace σ^{pr}). Nous pouvons considérer l'équation de diffusion du noyau radioactif N_r comme étant dominée par le terme de décroissance radioactive :

$$-D \frac{dN_r^2}{dz^2} + \frac{N_r}{t_{rad}} = 2h\delta(z) \cdot nv\sigma^{pr} \cdot N_p(0) . \quad (30)$$

La solution est donnée par (on utilise la condition au bord $N_r(z \rightarrow \infty) = 0$)

$$\boxed{N_r(z) = N_r(0) \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{Dt_{rad}}}\right) \quad \text{avec} \quad N_r(0) = \frac{2h\nu\sigma^{pr}N_p(0)}{2\sqrt{Dt_{rad}}}} . \quad (31)$$

En pratique, nous n'avons pas encore accès à la mesure absolue du flux. En général, les flux absolus sont entachés de grandes barres d'erreurs, car du point de vue expérimental, il faut connaître parfaitement l'acceptance du détecteur, ce qui n'est pas aisé. Il est donc plus simple de travailler avec des rapports. Nous pouvons alors choisir des rapports isotopiques, comme $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$, ou alors des rapports élémentaux tels Be/B (optimise l'effet du noyau radioactif, car ^{10}Be décroît en ^{10}B). Dans les deux cas, nous avons affaire à un rapport secondaire sur secondaire. L'avantage du second par rapport au premier est que la mesure est connue sur une plus grande gamme d'énergie, car encore une fois, l'identification des isotopes est complexe du point de vue expérimental. L'avantage du premier est qu'on n'a pas un mélange de contributions de différents isotopes dans le rapport.

Nous n'irons pas beaucoup plus loin. Puisque $N_p(0)$ est connu (par la mesure), nous sommes capable de déterminer D à partir des radioactifs et D/L à partir de B/C (donc D et L). Hélas, dans la pratique, les erreurs instrumentales sont grandes, les modèles doivent prendre en compte les pertes d'énergie, les noyaux ont en général plusieurs progéniteurs... et au final, les incertitudes obtenues sur les valeurs de D_0 et L restent larges. Nous ne pouvons faire beaucoup mieux que trouver

$$D_0 = 10^{27} - 10^{29} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{soit} \quad D_0 = 3 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-1} \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1} ; \quad (32)$$

et

$$L \approx 1 - 20 \text{ kpc} . \quad (33)$$

Ceci nous permet de calculer la distance typique parcourue par un radioactif à basse énergie comme

$$l_{\text{rad}} \approx \sqrt{D_0 \times t_{\text{rad}}} = 170 \text{ pc} \times \sqrt{\frac{K}{3 \cdot 10^{-2} \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}}} \sqrt{\frac{\gamma\tau_0}{1 \text{ Myr}}} \approx 50 - 500 \text{ pc} . \quad (34)$$

Ceci vérifie *a posteriori* que le radioactif a bien une propagation très locale.

5.2.2 Analogie avec les électrons et positrons de haute énergie

Contrairement aux noyaux, la propagation des électrons et des positrons est dominée par les pertes d'énergie (radiation synchrotron, Compton inverse). Il est utile d'écrire le temps caractéristique que met une particule pour perdre son énergie :

$$t_{\text{loss}} \sim 300 \text{ Myr} \times \frac{1 \text{ GeV}}{E} . \quad (35)$$

Nous pouvons donc calculer la distance maximale typique sur laquelle de telles particules peuvent se propager avant de perdre leur énergie :

$$d_{\text{loss}} \approx \sqrt{D_0 \times t_{\text{loss}}} = 300 \text{ pc} \times \sqrt{\frac{10 \text{ GeV}}{E}} \sqrt{\frac{D}{3 \cdot 10^{-2} \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}}} \approx 0.1 - 1 \text{ kpc} \quad (@ 10 \text{ GeV}) . \quad (36)$$

Nous en concluons que les contributions primaires aux flux d'électrons et positrons ont une origine locale à haute énergie.

5.2.3 Une complication supplémentaire : radioactifs et la bulle locale !

Deux résultats doivent être mis en regard : le premier est que le flux des espèces radioactives a une origine locale ~ 100 pc. Le second est que nous vivons dans une bulle locale, sous-dense en gaz, de taille typique⁵ ~ 100 pc. Cette bulle locale n'a pour l'instant pas été prise en compte dans les calculs.

Pourtant, nous sentons bien intuitivement, que si l'on enlève le gaz dans un rayon de 100 pc, l'endroit le plus proche pour produire ces noyaux radioactifs sera la frontière de cette bulle locale, et il s'ensuivra qu'une grande partie de ces noyaux se sera désintégrée avant d'arriver sur Terre.

Nous considérons donc un noyau radioactif dans une géométrie sans bord (symétrie sphérique donc). En coordonnées sphériques et pour un point source stationnaire à une distance r (mesurée en 0 pour simplifier les équations), l'équation à résoudre est :

$$-D\Delta_{\vec{r}}N_r^\delta + \frac{N_r^\delta}{t_{rad}} = \delta(\vec{r}) , \quad (37)$$

Il est aisé de vérifier que la solution est donnée par

$$N_r^\delta(\vec{r}') \propto \frac{e^{-r'/\sqrt{Dt_{rad}}}}{r'} . \quad (38)$$

Le flux des espèces secondaires radioactives est produit par la fragmentation des primaires $N_p(0)$ dans tout le disque. Il faut donc intégrer sur toutes les sources $Q(r,z)$ —nous passons en cylindriques—, et comme les sources ne sont présentes que dans le disque $\propto \delta(z)$:

$$N_r(z=0) \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} N_r^\delta(\sqrt{r'^2+z'^2}) Q(r', z') r' dr' dz' \propto \int_0^\infty N_r^\delta(r') Q(r') r' dr' . \quad (39)$$

Le flux de radioactifs créés lorsque l'on tient compte de la bulle locale de taille r_h par rapport au flux de ceux créés dans le modèle sans trou, est donné par (dans le premier cas, il faut intégrer de r_h à l'infini le terme source ; $Q(r) = \theta(|r| - r_h)$, dans le second cas de 0 à l'infini ; $Q(r) = 1$) :

$$\frac{N_{r_h}}{N_{r_h=0}} = \exp\left(\frac{-r_h}{l_{rad}}\right) . \quad (40)$$

Il y a donc une atténuation exponentielle du flux dans le modèle de la bulle par rapport au calcul sans bulle. Bien sûr le flux mesuré reste inchangé, et donc ce qui change, c'est l'interprétation des paramètres D_0 et L selon que l'on choisisse l'un ou l'autre de ces deux modèles, ce qui peut avoir son importance.

5.3 Conclusions

Nous avons construit pas à pas un modèle de transport des espèces chargées, capable de reproduire la plupart des observables nucléaires. Dans la littérature actuelle, le jeu n'a pas vraiment changé, si ce n'est que les modèles sont plus raffinés et essaient de prendre en compte le plus d'information possible sur les données observationnelles. Nous voyons qu'un des enjeux principaux

⁵En réalité cette bulle est asymétrique, résultat de l'explosion d'une 10-20-aines de SN il y a ~ 20 Myr.

est la détermination des paramètres du modèle. Ceci permet de faire le lien avec la théorie de la turbulence, de l'accélération dans les sources, etc. Mais ceci joue aussi un rôle important dans le cadre des recherches indirectes de matière noire, où l'on espère avoir suffisamment compris les flux standards pour chercher des contributions exotiques.

Pour finir, il faut garder à l'esprit que même les modèles les plus utilisés restent rudimentaires. Ils sont souvent stationnaires, dans des géométries simples, avec un coefficient de diffusion qui reste constant dans toute la zone diffusive, etc. Il reste encore à coupler ce que l'on sait des champs magnétiques galactiques à une description microscopique qui permettrait de prendre en compte la dynamique des sources, du gaz, du champ magnétique, qui sont aussi couplés aux rayons cosmiques. Bref, encore beaucoup de travail en perspective pour avoir une version dynamique (non statique) de la propagation du rayonnement cosmique dans notre Galaxie et ailleurs.

Annexes : quelques quantités utiles ($c = \hbar = e \equiv 1$)

Notation	Unité	Quantité
E	GeV	Énergie totale
p	GeV	Impulsion
$\mathcal{R} \equiv pc/Ze$	GV	Rigidité
$\beta \equiv v/c = p/E$	-	-
$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = E/m$	-	Facteur de Lorentz
$N_i \equiv dN_i/dE$	$\#/\text{cm}^3/\text{GeV}$	Densité (différentielle) pour l'espèce i
$I_i = (v/4\pi) \times N_i$	$\#/\text{cm}^2/\text{GeV}/\text{s}/\text{sr}$	Intensité pour l'espèce i
x	g cm^{-2}	Grammage
$\tau_{esc}(\mathcal{R})$	Myr	Temps d'échappement
$\lambda_{esc}(\mathcal{R}) = \bar{m}\bar{n}v\tau_{esc}$	g cm^{-2}	
$D(\mathcal{R}) = D_0 \times \mathcal{R}^{-\delta}$	$\text{kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}$	D_0 est la normalisation, δ la pente
$dQ/dE = q^i \mathcal{R}^{-\alpha}$	$\text{cm}^{-3} \text{ GeV}^{-1}$	Spectre source (q_i est la normalisation, α est la pente)
σ^i	mb	$\sigma^{\text{H:He:CNO:Fe}} \sim 30 : 90 : 300 : 700 \text{ mb}$
σ^{ij}	mb	Section efficace de production $N_i + H \rightarrow N_j$

Notre Galaxie

$R \simeq 20 \text{ kpc}$	Rayon de la Galaxie
$L \simeq 1 - 15 \text{ kpc}$	Taille typique du halo
$h \simeq 100 \text{ pc}$	Épaisseur typique du disque
$R_\odot = 8. \text{ kpc}$	Distance centre galactique - soleil
$n_{ISM} = 1 \text{ cm}^{-3}$	Densité typique du disque

Facteurs de conversion

$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$	
$1 \text{ amu} \sim 1 \text{ GeV} = 1.78 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	
$1 \text{ cm} = 3.24 \cdot 10^{-22} \text{ kpc}$	$(1 \text{ pc} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m})$
$1 \text{ s} = 3.16 \cdot 10^{-14} \text{ Myr}$	
$1 \text{ km s}^{-1} = 10^{-3} \text{ kpc Myr}^{-1}$	
$1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 3 \cdot 10^{-30} \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}$	
$1 \text{ amu} = 1/\mathcal{N}_A = 1/(6.022045 \cdot 10^{23}) \text{ g}$	