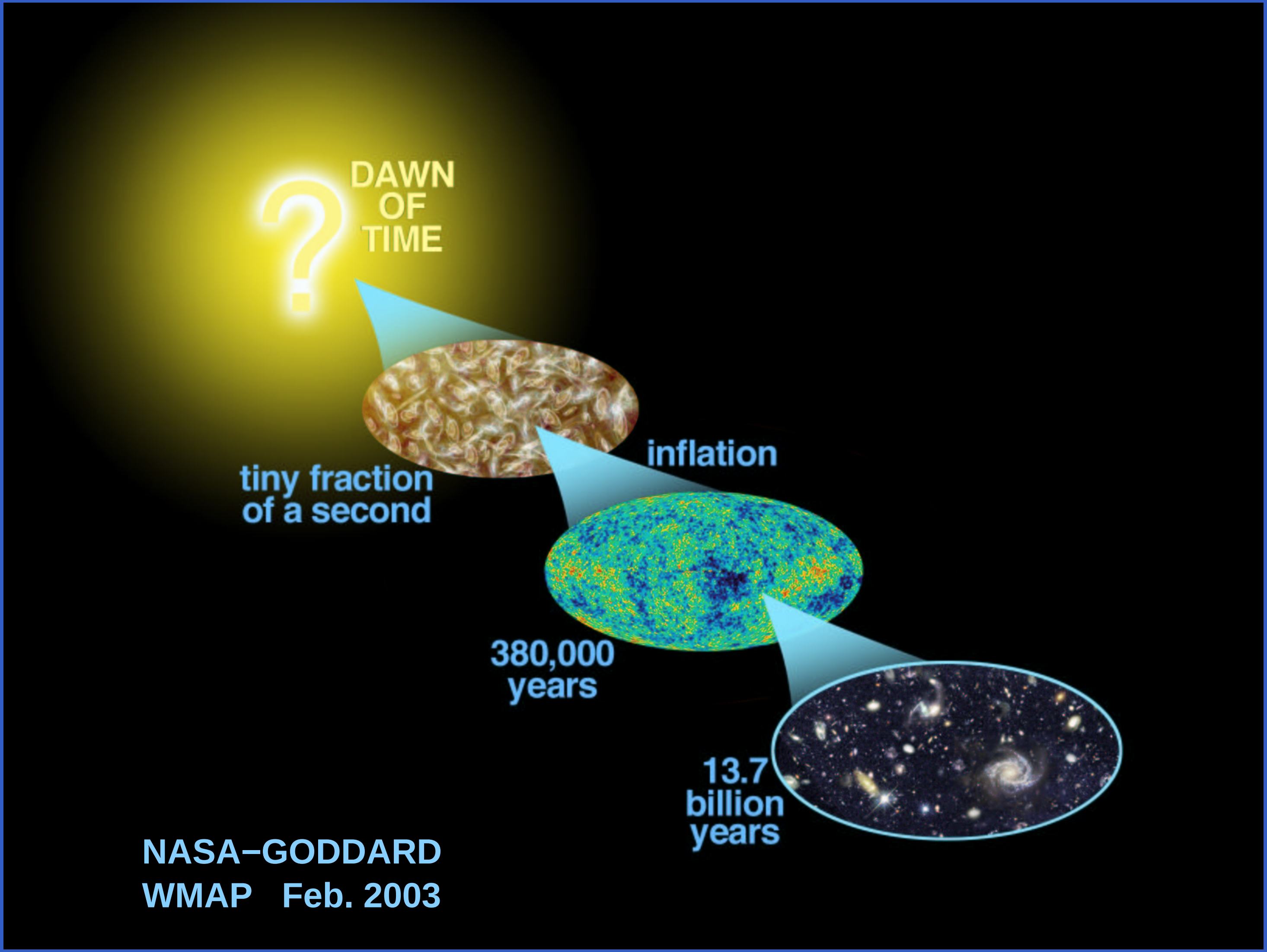
Le transport de masse : de Gaspard Monge à la reconstruction de l'Univers primitif

Uriel FRISCH

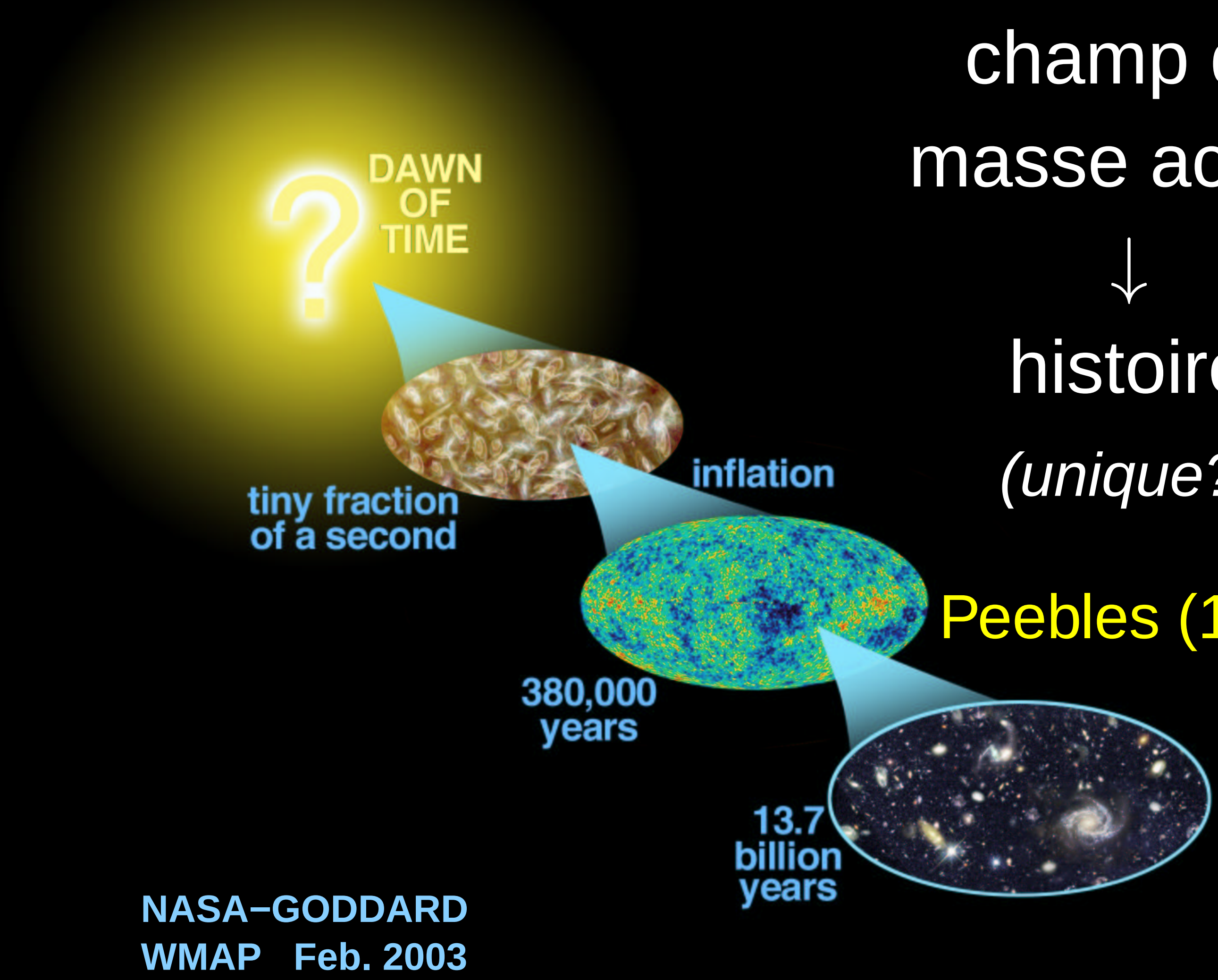
Observatoire de la Côte d'Azur, Nice, France

- Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevskiĭ *Mon. Not. R. Astron. Soc.* (2003, sous presse), **astro-ph/0304214**
- U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevski *Nature* **417** (2002) 260–262

Brève histoire de l’Univers



Reconstruction de l'histoire de l'Univers



champ de
masse actuel

↓

histoire

(unique?)

Peebles (1989)

Dynamique des fluides cosmologique

Euler :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_\mathbf{x})\mathbf{v} = -\frac{3}{2\tau}\Big(\mathbf{v} + \nabla_\mathbf{x}\varphi_\mathrm{g}\Big)$$

Conservation de la masse :

$$\partial_\tau \rho + \nabla_\mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Poisson :

$$\nabla_\mathbf{x}{}^2 \varphi_\mathrm{g} = \frac{\rho - 1}{\tau}$$

Dynamique des fluides cosmologique

Euler :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_\mathbf{x})\mathbf{v} = -\frac{3}{2\tau}\left(\mathbf{v} + \nabla_\mathbf{x}\varphi_\mathrm{g}\right)$$

Conservation de la masse :

$$\partial_\tau \rho + \nabla_\mathbf{x} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Poisson :

$$\nabla_\mathbf{x}{}^2 \varphi_\mathrm{g} = \frac{\rho - 1}{\tau}$$

"Esclavage" pour $\tau \to 0$:

$$\mathbf{v}_\mathrm{in} = -\nabla_\mathbf{x}\varphi_\mathrm{g}^{(\mathrm{in})}, \qquad \rho_\mathrm{in} = 1$$

Dynamique des fluides cosmologique

Euler :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} = \cancel{-\frac{3}{2\tau}(\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{g}})}$$

Conservation de la masse :

$$\partial_\tau \rho + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Poisson :

$$\nabla_{\mathbf{x}}{}^2\varphi_{\mathrm{g}} = \frac{\rho - 1}{\tau}$$

vers 1970

Approximation de Zeldovich :

$$\mathbf{v} \equiv -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{g}}$$

Application Lagrangienne potentielle

Équation de “Zeldovich” :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0$$

Application Lagrangienne potentielle

Équation de "Zeldovich" :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{in}} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{in})} \Rightarrow \mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathrm{v}}$$

Application Lagrangienne potentielle

Équation de “Zeldovich”/Burgers :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{in}} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{in})} \Rightarrow \mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathrm{v}}$$

Application Lagrangienne potentielle

Équation de “Zeldovich”/Burgers :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{in}} = -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{in})} \Rightarrow \mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{v}}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \tau\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \tau\nabla\varphi_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{in})}(\mathbf{q})$$

$$= \nabla\left[\frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - \tau\varphi_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{in})}(\mathbf{q})\right]$$

$$= \nabla\Phi(\mathbf{q})$$

Bertschinger–Dekel (1989)

Application Lagrangienne potentielle

Équation de “Zeldovich”/Burgers :

$$\partial_\tau \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}_{\rm in} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\rm g}^{(\rm in)} \Rightarrow \mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\rm v}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \tau \mathbf{v}_{\rm in}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \tau \nabla \varphi_{\rm g}^{(\rm in)}(\mathbf{q})$$

$$= \nabla \left[\frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - \tau \varphi_{\rm g}^{(\rm in)}(\mathbf{q}) \right]$$

$= \nabla \Phi(\mathbf{q})$ ... (graphe-)inversible si Φ convexe

Bertschinger–Dekel (1989)

L'équation de Monge–Ampère

Conservation de la masse :

$$\det \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x} = \frac{\rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{q})}{\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))} = \frac{\text{densité initiale}}{\text{densité présente}}$$

L'équation de Monge–Ampère

Conservation de la masse, $\rho_{\text{in}} = 1$:

$$\det \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x} = \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))} = \frac{\text{densité initiale}}{\text{densité présente}}$$

L'équation de Monge–Ampère

Conservation de la masse, $\rho_{\mathrm{in}} = 1$:

$$\det \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x} = \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))} = \frac{\text{densité initiale}}{\text{densité présente}}$$

Comme $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q})$:

$$\det(\nabla_{q_i} \nabla_{q_j} \Phi(\mathbf{q})) = \frac{1}{\rho_0\big(\nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q})\big)}$$

L'équation de Monge–Ampère

Conservation de la masse, $\rho_{\rm in} = 1$:

$$\det \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{x} = \frac{1}{\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))} = \frac{\text{densité initiale}}{\text{densité présente}}$$

Comme $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q})$:

$$\det(\nabla_{q_i} \nabla_{q_j} \Phi(\mathbf{q})) = \frac{1}{\rho_0\big(\nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q})\big)}$$

Transformée de Legendre–Fenchel :

$$\Theta(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{q}} \big(\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - \Phi(\mathbf{q})\big)$$

L'équation de Monge–Ampère

Conservation de la masse, $\rho_{\rm in} = 1$:

$$\det \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = \frac{\rho_0(\mathbf{x})}{1}$$

Comme $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{x})$:

$$\det(\nabla_{x_i} \nabla_{x_j} \Theta(\mathbf{x})) = \rho_0(\mathbf{x})$$

1820

$\rho_0(\mathbf{x})$ prescrite

Le transport de masse de Monge

. . .Il n'est pas indifférent que telle molécule de déblai soit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la somme de ces produits sera la moindre possible, et le prix du transport total sera un ***minimum****.*

Le transport de masse de Monge

Pour $\rho_{\text{in}}(\mathbf{q})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ donnés, minimiser

$$\int |\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}| \; \rho_{\text{in}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \int |\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})| \; \rho_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

sur tous les $(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{q}(\mathbf{x}))$ tels que $\rho_{\text{in}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$

Monge, Ampère, transport de masse

Pour $\rho_{\rm in}(\mathbf{q})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ donnés, minimiser

$$\int |\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^{\mathbf{2}} \rho_{\rm in}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \int |\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})|^{\mathbf{2}} \rho_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

sur tous les $(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{q}(\mathbf{x}))$ tels que $\rho_{\rm in}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$

Monge, Ampère, transport de masse

Théorème (Brenier 1987, 1991) *Les applications minimisantes sont des gradients de fonctions convexes :*

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x}).$$

Φ *et* Θ *sont solutions d'équations de Monge–Ampère*

Pour $\rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{q})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ donnés, minimiser

$$\int |\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^2 \rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \int |\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 \rho_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

sur tous les $(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{q}(\mathbf{x}))$ tels que $\rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$

Relaxation de Kantorovich

Pour $\rho_{\text{in}}(\mathbf{q})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ donnés, minimiser

$$\int |\mathbf{x}-\mathbf{q}|^2 \rho(\mathbf{q},\mathbf{x})\, d\mathbf{q}\, d\mathbf{x}$$

sur tous les $\rho(\mathbf{q},\mathbf{x})$ tels que

$$\int \rho(\mathbf{q},\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \rho_{\text{in}}(\mathbf{q})$$
$$\int \rho(\mathbf{q},\mathbf{x})\, d\mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x})$$

1942

Discrétisation and assignation

Densités discrètes :

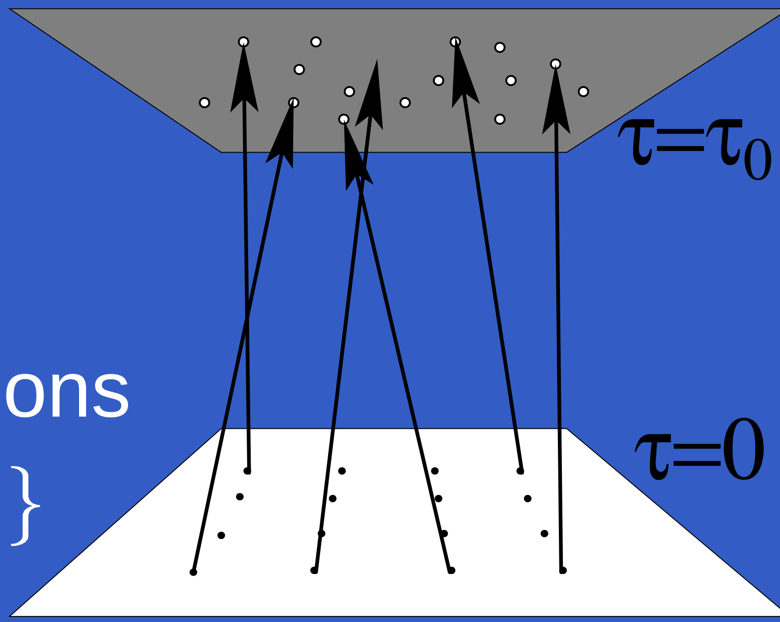
$$\rho_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad \rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j)$$

Minimiser le coût

$$\sum_{i=1}^{N} |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_{j(i)}|^2$$

sur toutes les permutations

$i \mapsto j(i)$ de $\{ 1, 2, \ldots, N \}$



Relaxation et problème dual

Minimiser $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_{j(i)}|^2$ sur toutes les permutations $i \mapsto j(i)$

Relaxation et problème dual

Minimiser $\sum_{i,j=1}^{N} |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2 f_{ij}$ sur toutes les matrices bistochastiques :

$$f_{ij} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} f_{kj} = \sum_{k=1}^{N} f_{ik} = 1$$

Relaxation et problème dual

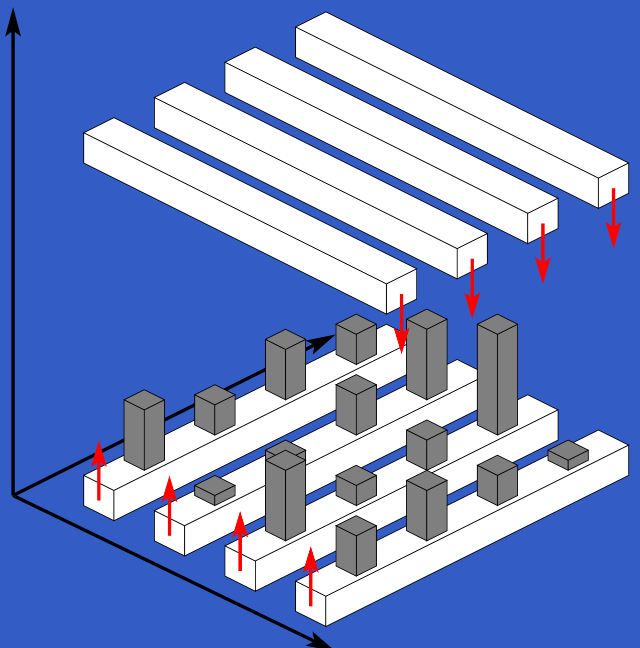
Minimiser $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2 f_{ij}$ sur toutes les matrices bistochastiques :

$$f_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} f_{kj} = \sum_{k=1}^{N} f_{ik} = 1$$

Problème dual :

Minimiser $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \sum_{j=1}^{N} \beta_j$

$$\alpha_i - \beta_j \geq C - |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2$$



Hénon 1950s–1990s

Relaxation et problème dual

Minimiser $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2 f_{ij}$ sur toutes

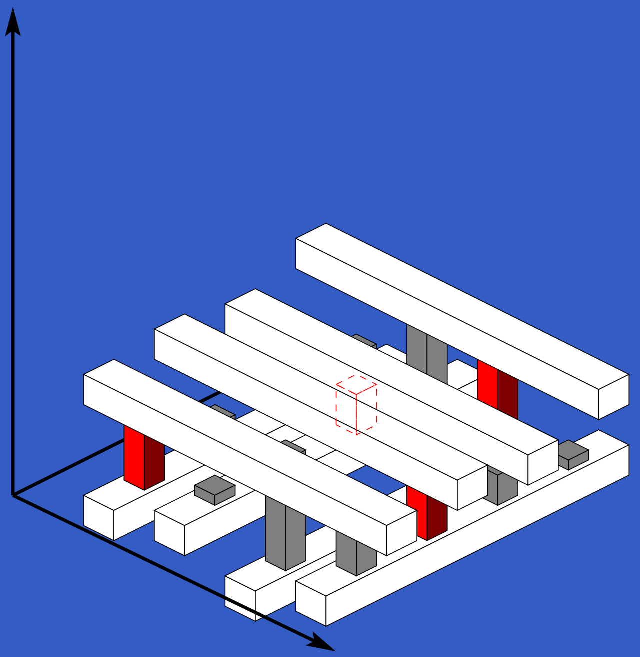
les matrices bistochastiques :

$$f_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} f_{kj} = \sum_{k=1}^{N} f_{ik} = 1$$

Problème dual :

Minimiser $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \sum_{j=1}^{N} \beta_j$

$$\alpha_i - \beta_j \geq C - |\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2$$



Hénon 1950s–1990s

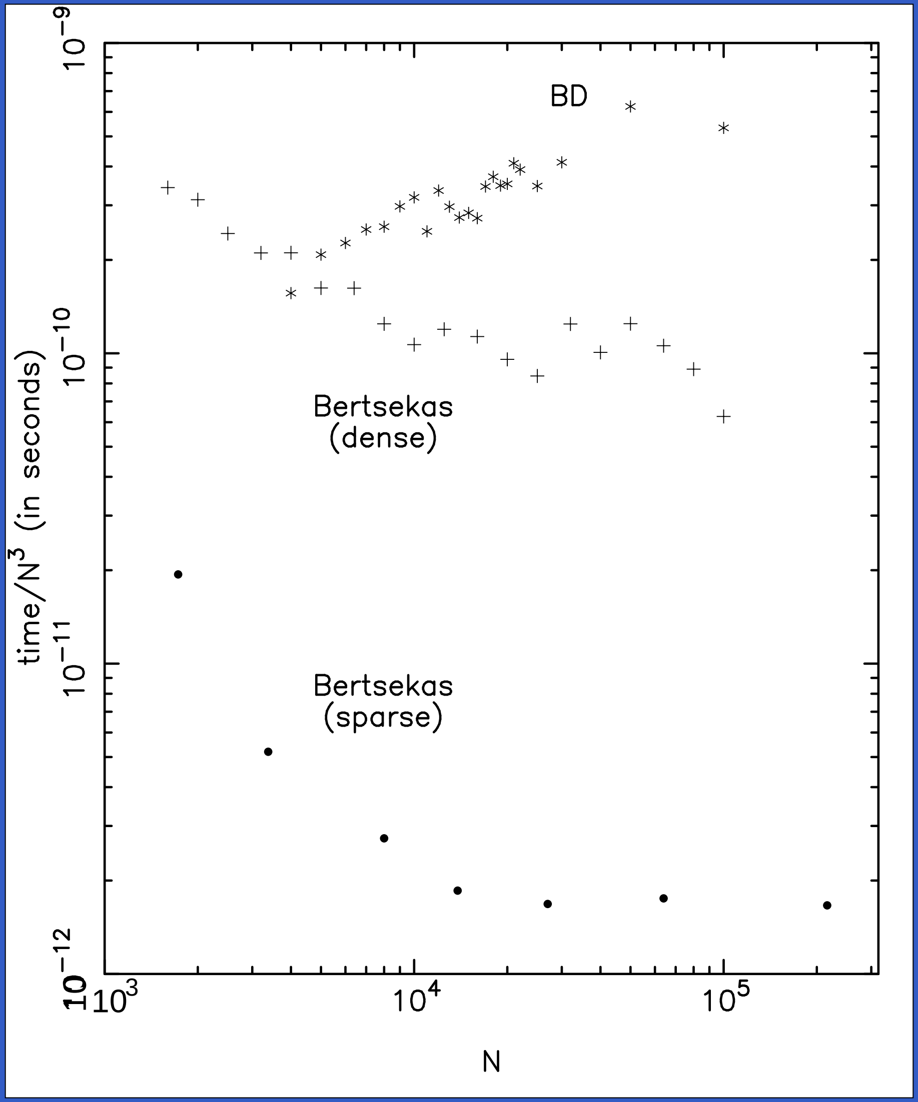
Complexité temporelle

- $\ast$ Burkard & Derigs 1980

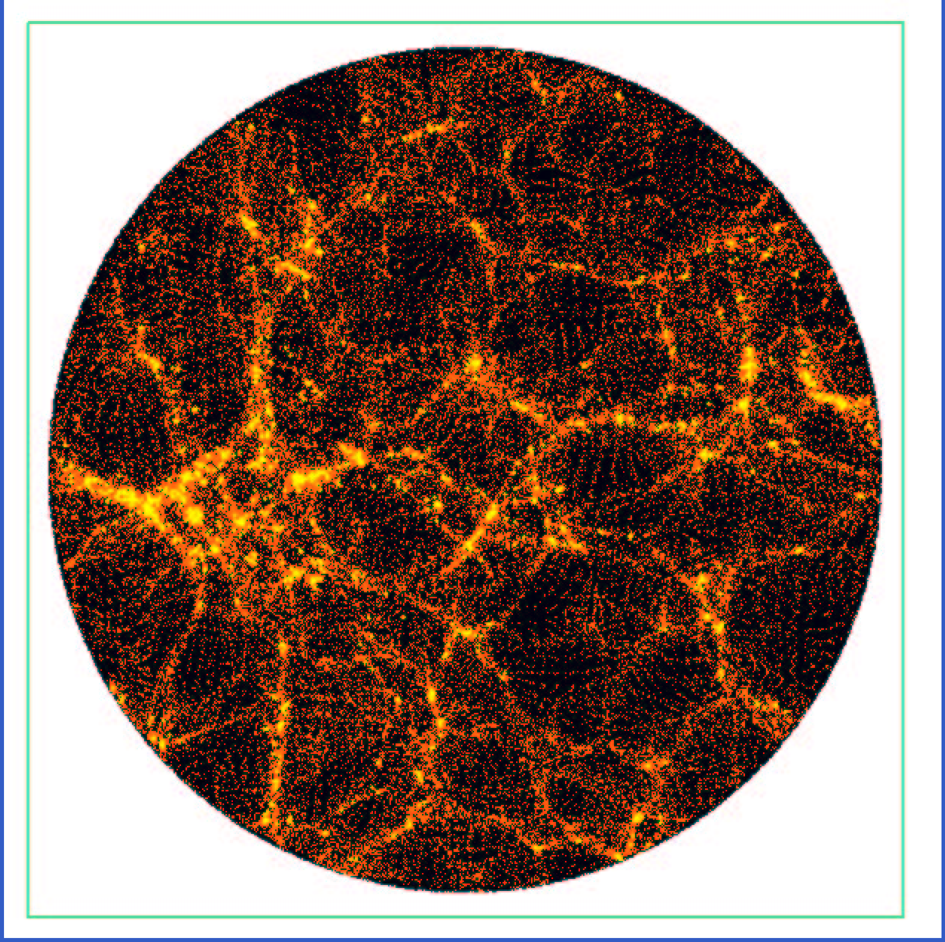
  Bertsekas 1979–2003

- $+$ enchères “denses”
- $\bullet$ enchères “creuses”

(temps en secondes divisé par N^3)

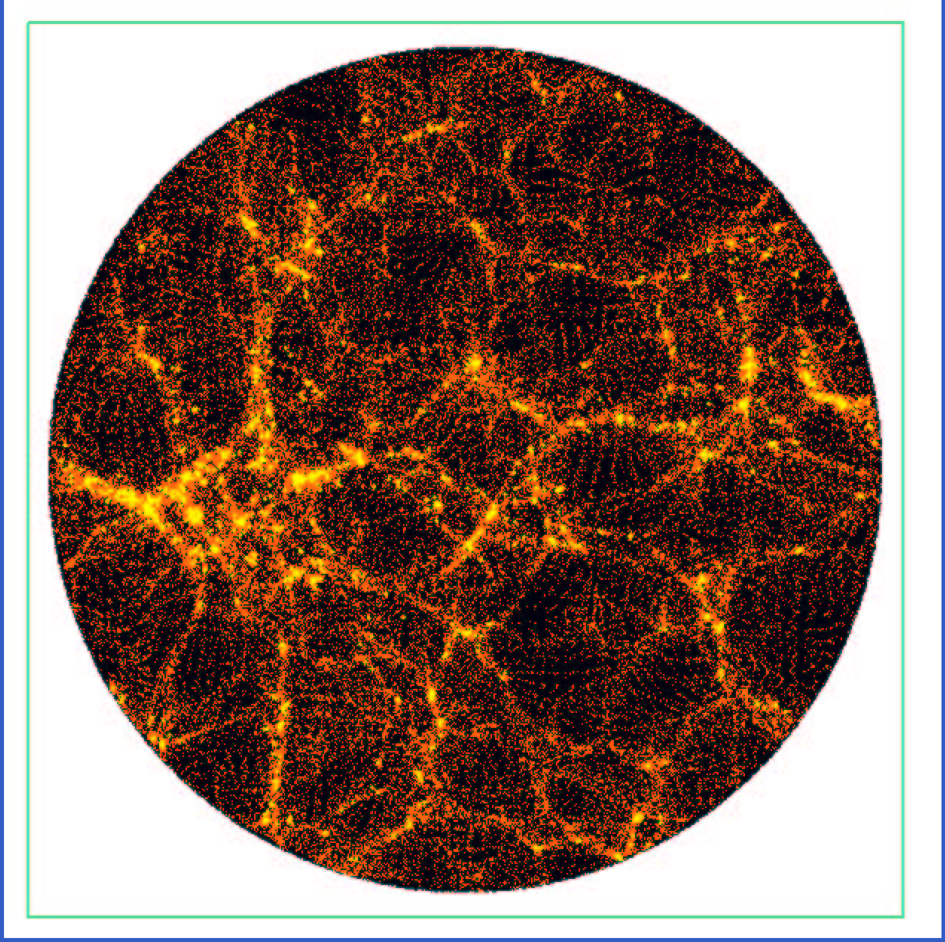


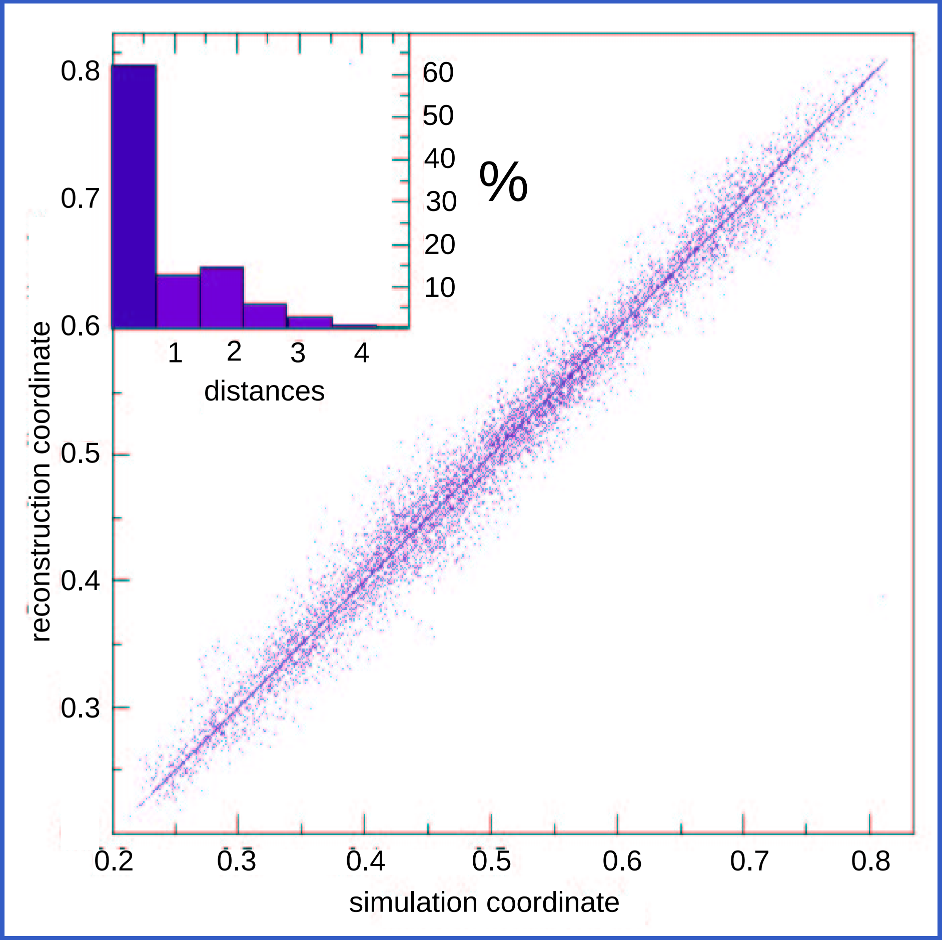
Test sur des simulations à N corps



128^3 points dans une boîte de taille $200\,h^{-1}$ Mpc (tranche des 10% médians)

Test sur des simulations à N corps





Problème variationnel d'Euler–Poisson

Minimiser $\displaystyle\int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\ \tau^{3/2}\left(\rho|\mathbf{v}|^2 + \frac{3}{2}|\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathrm{g}}|^2\right)$

- Conservation de la masse :
  $\partial_\tau\rho + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$
- Équation de Poisson : $\displaystyle{\nabla_{\mathbf{x}}}^2\varphi_{\mathrm{g}} = \frac{\rho - 1}{\tau}$
- $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x}, \tau_0) = \rho_0(\mathbf{x})$

Théorème (Loeper 2003) *À un changement de variables près, il s'agit d'un problème de minimisation convexe à solution unique* $(\rho, \mathbf{v}, \varphi_{\mathrm{g}})$.