

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

Introduction aux problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Centre de Recherche Astronomique de Lyon

Luminy, 6 octobre 2004

Plan

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

- 1 Qu'est-ce qu'un problème inverse ?
- 2 Un cas concret : la déconvolution d'image
- 3 Autres exemples d'applications
- 4 Optimisation sous contraintes à très grand nombre de paramètres

Qu'est-ce qu'un problème inverse ?

- 1 Le modèle direct est connu :

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

- les données : $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
 - le modèle $\mathbf{m} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ et les paramètres recherchés : $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$
 - le bruit : $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- 2 Quel sont les meilleurs paramètres \mathbf{x} compte tenu des données \mathbf{y} et du modèle \mathbf{m} ?
 - 3 Il peut y avoir beaucoup de paramètres ($p \gtrsim 10^6$) et même plus de paramètres que de mesures: $p \gtrsim n$.
 - 4 **Un simple ajustement de modèle (e.g maximum de vraisemblance) ne marche pas.**

Exemples de problèmes inverses

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Qu'est-ce qu'un
problème inverse ?

Maximum de
vraisemblance

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

1 modèles linéaires:

- formation d'image : $y(\omega) = \int h(\omega - \omega') x(\omega') d\omega' + \text{bruit}$
- intégrale de Fredholm du 1^{er} ordre (transformée d'Abel, réponse instrumentale linéaire, projection, ...):

$$y(\mathbf{r}) = \int h(\mathbf{r}, \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) ds + \text{bruit}$$

- après discrétisation : $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$

2 modèles non-linéaires :

- tout ou partie du noyau $h(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ à retrouver (déconvolution aveugle, synthèse spectrale, ...)
 - mesures de corrélation (à 2 ou 3 points)
- ⇒ unicité ?

Maximum de vraisemblance

- on maximise la probabilité des mesures étant donné le modèle (ML = *maximum likelihood*):

$$\mathbf{x}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x})) = \arg \min_{\mathbf{x}} \underbrace{\{-\log \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x}))\}}_{\mathcal{L}(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x}))}$$

- pour du bruit gaussien :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\text{ML}} &= \arg \min_{\mathbf{x}} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^T \cdot \text{Cov}(\mathbf{y})^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})] \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \frac{[y_i - m_i(\mathbf{x})]^2}{\text{Var}(y_i)} && \text{(indépendance)} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n [y_i - m_i(\mathbf{x})]^2 && \text{(bruit blanc)}\end{aligned}$$

Modèle linéaire et bruit gaussien

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Qu'est-ce qu'un
problème inverse ?

Maximum de
vraisemblance

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

maximum de vraisemblance :

$$\mathbf{x}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{W}}^2$$

avec $\mathbf{W} \triangleq \text{Cov}(\mathbf{y})^{-1}$ donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\text{ML}} &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} && \text{(bruit blanc)} \\ &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} && \text{(bruit blanc, } \mathbf{A} \text{ est inversible)}\end{aligned}$$

Déconvolution : modèle direct

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de
Régularisation

Choix des
hyperparamètres

Résultats

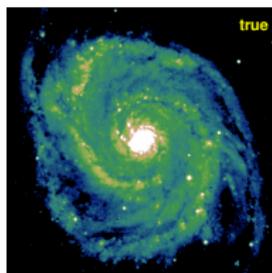
Saturne

Résumé

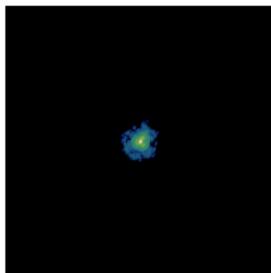
Autres
problèmes
inverses

Optimisation

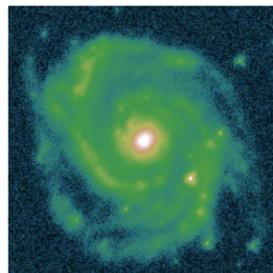
$$y(\omega) = \int h(\omega - \omega') x(\omega') d\omega' + \text{bruit}$$



★



+ **bruit** →



Maximum de vraisemblance pour la déconvolution

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de Régularisation

Choix des hyperparamètres

Résultats

Saturne

Résumé

Autres problèmes inverses

Optimisation

$$\mathbf{x}^{(\text{ML})} = \text{FFT}^{-1} \left(\frac{\text{FFT} \left(\begin{array}{c} \text{Image convolée} \\ \text{Image de référence} \end{array} \right)}{\text{FFT} \left(\text{Image de référence} \right)} \right) = \text{Image bruitée}$$

unconstrained maximum likelihood

Qu'est-ce qui cloche ?

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de Régularisation

Choix des hyperparamètres

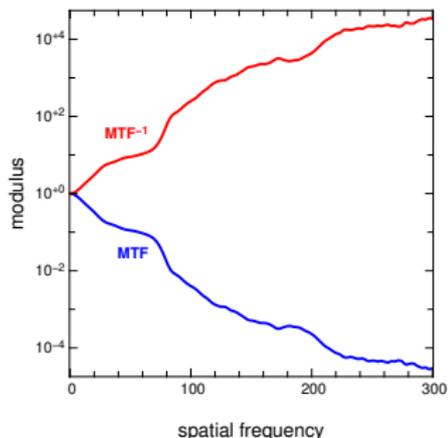
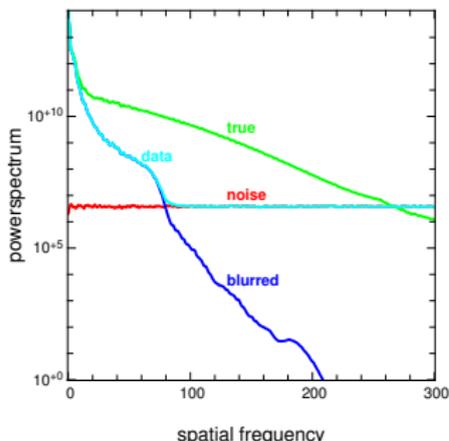
Résultats

Saturne

Résumé

Autres problèmes inverses

Optimisation



inversion directe (e.g. maximum de vraisemblance)

⇒ amplification du bruit

Filtrage de Wiener

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de

Régularisation

Choix des
hyperparamètres

Résultats

Saturne

Résumé

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

La solution au sens de Wiener est :

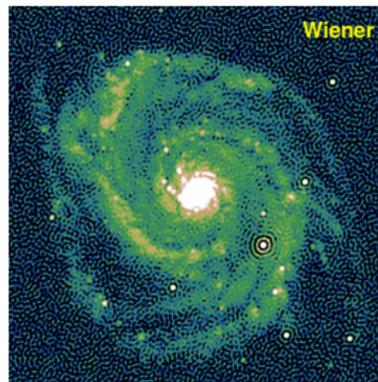
$$\hat{x}_u^{(\text{Wiener})} \triangleq \hat{f}_u^{(\text{Wiener})} \hat{y}_u$$

avec :

$$\mathbf{f}^{(\text{Wiener})} = \arg \min_{\mathbf{f}} E\{\|\mathbf{x}^{(\text{Wiener})} - \mathbf{x}^{(\text{true})}\|\}$$

qui donne :

$$\hat{x}_u^{(\text{Wiener})} = \frac{\hat{h}_u^* \hat{y}_u}{|\hat{h}_u|^2 + \frac{E\{|\hat{n}_u|^2\}}{E\{|\hat{x}_u|^2\}}}$$



Maximum a posteriori

- inversion du modèle direct est un problème **mal conditionné**, le maximum de vraisemblance :

$$\mathbf{x}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x})) = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x}))$$

est une mauvaise solution

⇒ **amplification du bruit**

- il faut prendre en compte des contraintes supplémentaires (**régularisation**)

⇒ la solution est le **maximum a posteriori (MAP)** :

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \arg \min \mathcal{L}(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x})) + \mu \mathcal{R}(\mathbf{x})$$

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de

Régularisation

Choix des

hyperparamètres

Résultats

Saturne

Résumé

Autres

problèmes

inverses

Optimisation

Régularisations quadratiques

- régularisation de Tikhonov généralisée :

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p})^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p})$$

solution analytique :

$$\mathbf{x}_\mu = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} + \mu \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} + \mu \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{p})$$

- contrainte de lissage

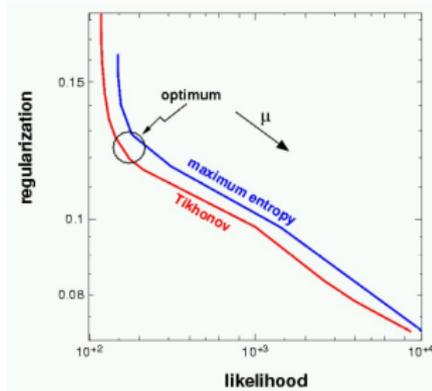
$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \sum_{ij} [x(i+1, j) - x(i, j)]^2 + \sum_{ij} [x(i, j+1) - x(i, j)]^2$$

- corrélation a priori (Tarantola-Valette)

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{p})^T \cdot \text{Cov}(\mathbf{x})^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

Comment choisir le(s) meilleur(s) hyperparamètre(s) ?

- 1 nombre de degrés de liberté équivalents :
 $\mathcal{L}(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x}_\mu)) = \text{NDF}$
- 2 méthode de Gull : $\mathcal{L}(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x}_\mu)) + \mu \mathcal{R}(\mathbf{x}_\mu) = \text{E}\{\chi^2\}$
- 3 cross-validation (CV) et cross-validation généralisée (GCV) (Golub, Heat & Wahba, 1979)
- 4 approche déterministe : Wiener (RSB), Lannes (résolution), Thiébaud (MAAD, résolution)
- 5 L-curves (Hansen)



Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de Régularisation

Choix des hyperparamètres

Résultats

Saturne

Résumé

Autres problèmes inverses

Optimisation

Résultats en déconvolution

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de Régularisation

Choix des hyperparamètres

Résultats

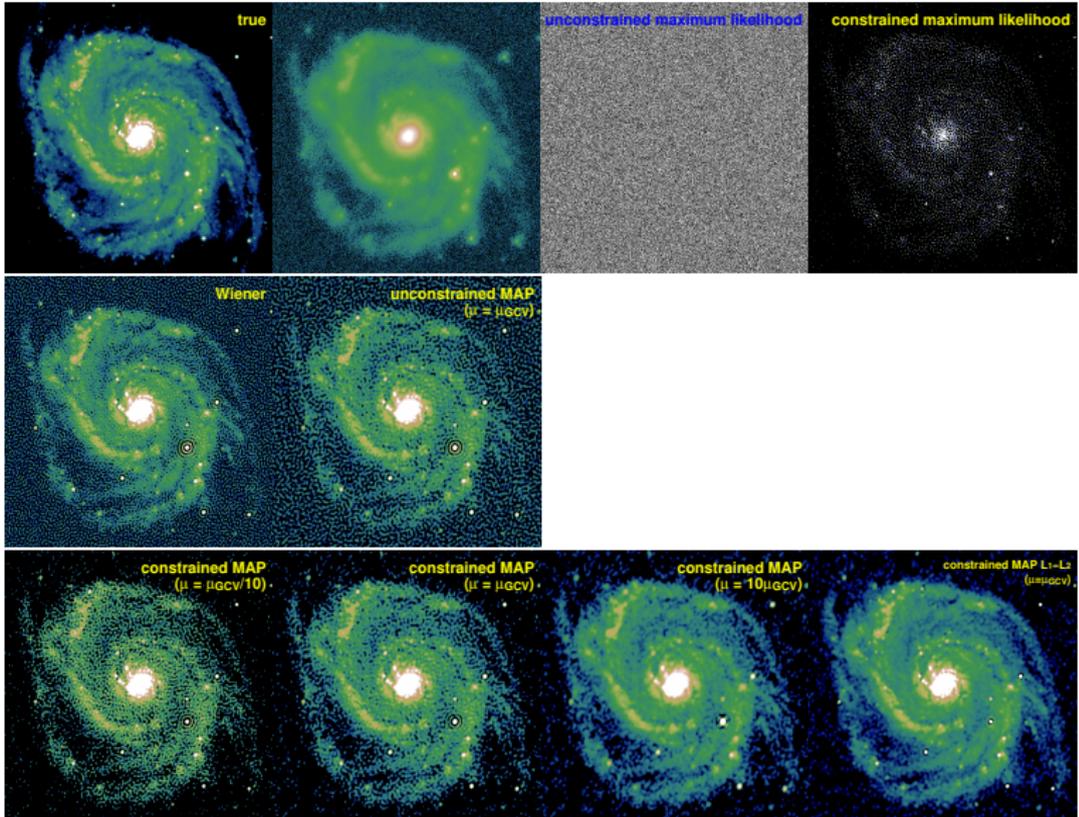
Saturne

Résumé

Autres

problèmes inverses

Optimisation



Tests : Image de Saturne

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct
Filtrage de Wiener
Maximum a posteriori

Différents types de
Régularisation

Choix des
hyperparamètres

Résultats

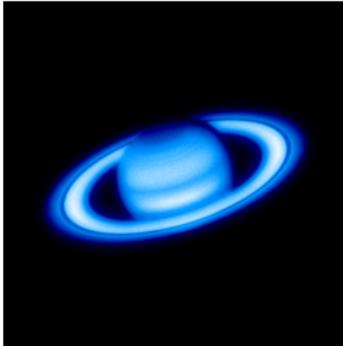
Saturne

Résumé

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

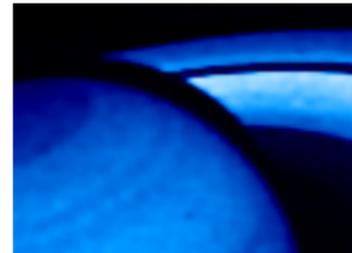
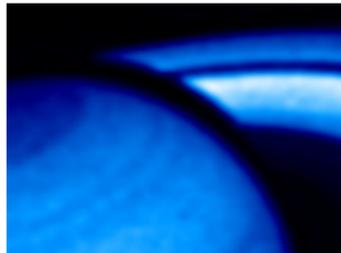
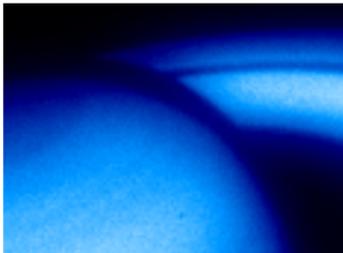
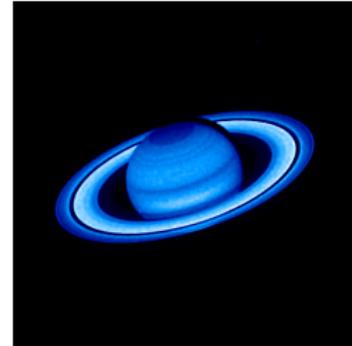
image brute



régul. quadratique



$\ell_1 - \ell_2$



Pour résumer

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Modèle direct

Filtrage de Wiener

Maximum a posteriori

Différents types de
Régularisation

Choix des
hyperparamètres

Résultats

Saturne

Résumé

Autres

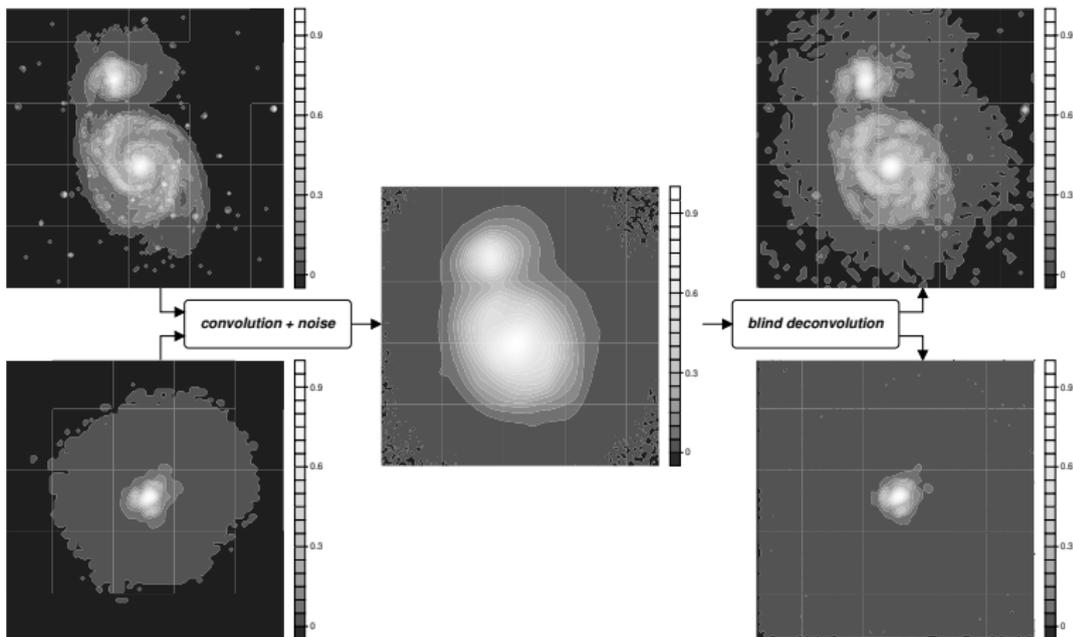
problèmes
inverses

Optimisation

- Un problème inverse c'est :
 - modèle direct (approximativement) connu
 - beaucoup de paramètres, peut être plus que de mesures
 - du bruit
 - mal posé ou **mal conditionné**
⇒ amplification du bruit
- solution = inversion sous contraintes a priori
(régularisation)
- **rien de magique**
 - on ne récupère pas plus d'information que : données + a priori
 - a priori ⇒ **biaise** le résultat
 - choix **judicieux** de la régularisation

Déconvolution aveugle

Que faire si la PSF est mal connue voire inconnue ?



Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution
multi-dimensionnelle

Interférométrie
optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

Déconvolution aveugle appliquée en médecine

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution
multi-dimensionnelle

Interférométrie
optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

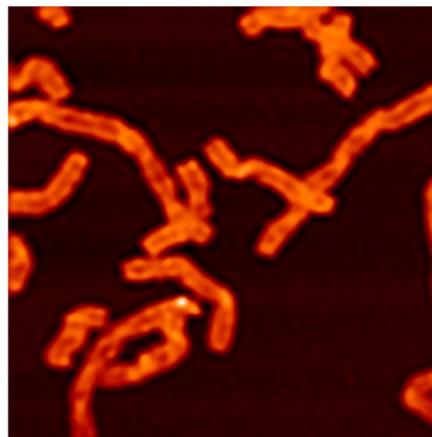
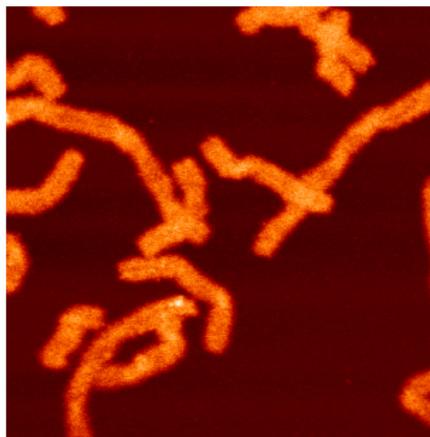


Image de chromosomes par microscopie confocale. Source : Jean-Claude Bernengo (Centre Commun de Quantimétrie, Université Claude Bernard, Lyon, France). Reconstruction par logiciel MAAD.

Multi-dimensional Algorithm for Automatic Deblurring

- 1 plusieurs types de régularisation (quadratiques, MEM, $\ell_1 - \ell_2$, ...)
- 2 contraintes de positivité, de support
- 3 prend en compte les données manquantes
- 4 orienté grandes images (optimisation par VMLM-B)
- 5 ajustement automatique du niveau de régularisation (GCV)
- 6 multi-dimensionnel
 - déconvolution spatio-temporelle : (x, y, t)
 - déconvolution multi-dimensionnelle (médecine, interférométrie des tavelures, ...) : (x, y, z, λ, t)
 - déconvolution multi-spectrale (spectroscopie-intégrale de champ) : (x, y, λ)

Interférométrie optique

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution multi-dimensionnelle

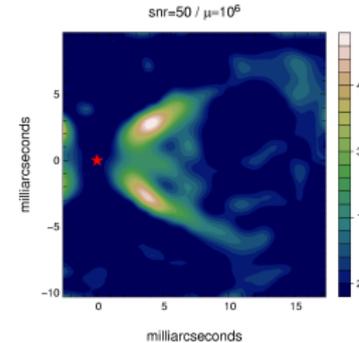
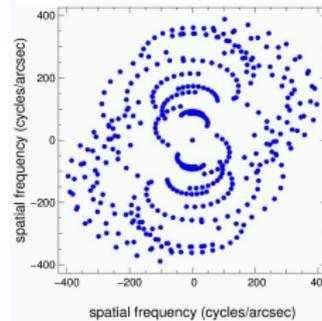
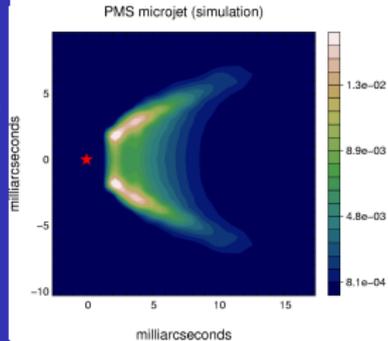
Interférométrie optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

- mesures = spectre de puissance et clôtures de phases (modèle non linéaire)
- peu de mesures et couverture du plan (u, v) inhomogène
- déficit de mesures de phase de Fourier

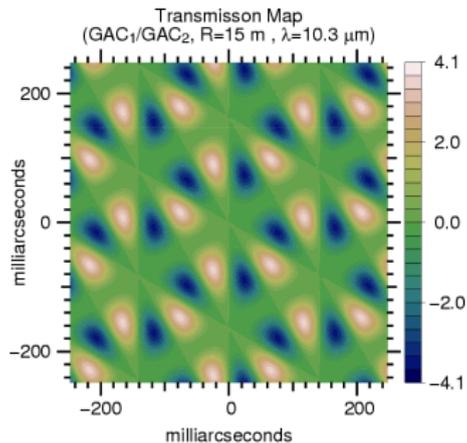
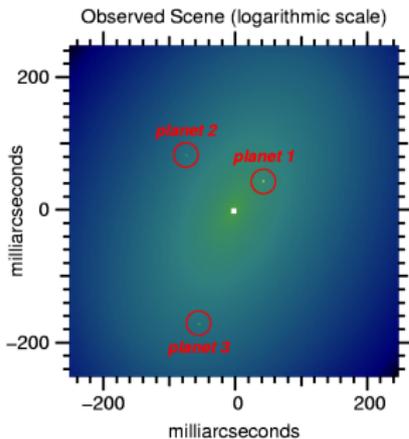


JMMC
Multi-aperture
Image
Reconstruction
Algorithm

Darwin : relation scène \mapsto données



$$A(\lambda, t) = \int R(\omega, \lambda, t) F(\omega, \lambda, t) d\omega$$



Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution
multi-dimensionnelle

Interférométrie
optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

Darwin : détection des planètes

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Déconvolution aveugle

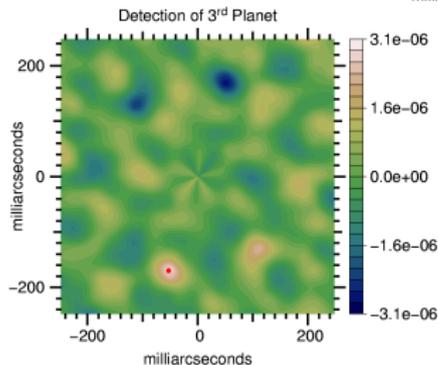
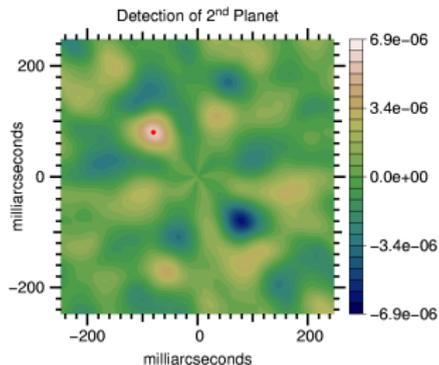
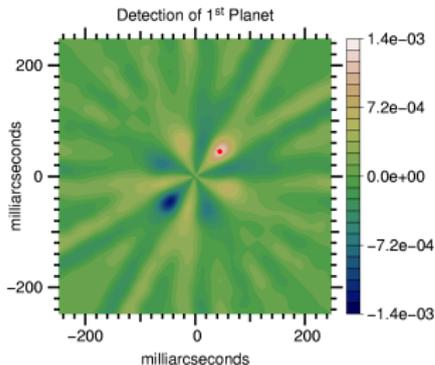
Déconvolution multi-dimensionnelle

Interférométrie optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation



Darwin : caractérisation des planètes

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Déconvolution aveugle

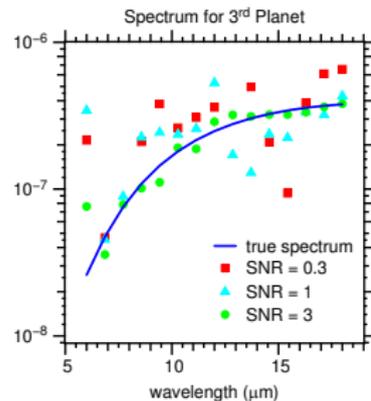
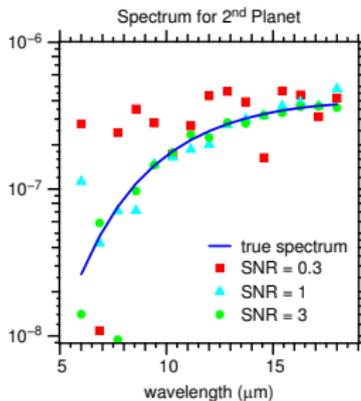
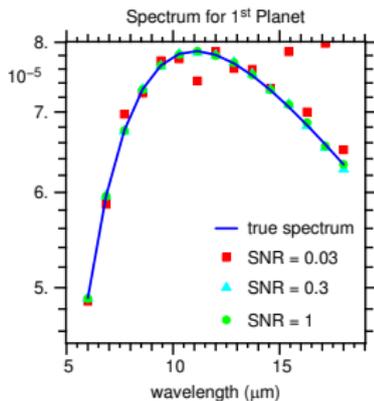
Déconvolution multi-dimensionnelle

Interférométrie optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation



Fonction de distribution, disque minces (1/2)

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Déconvolution aveugle

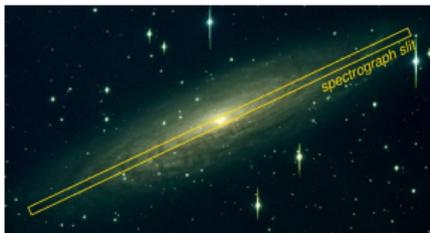
Déconvolution multi-dimensionnelle

Interférométrie optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation



observables: LOSV's \Rightarrow distribution de vitesses (cinématique) $F_\phi(R, v_\phi)$

inconnues: distribution des orbites $f(\varepsilon, R v_\phi)$

simplifications:

- disques minces
- cinématique du gaz HI \Rightarrow potentiel $\psi(R)$

$$F_\phi(R, v_\phi) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} v_\phi^2 - \psi(R)}^0 \frac{f(\varepsilon, R v_\phi)}{\sqrt{\varepsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_\phi^2}} d\varepsilon$$

(transformée d'Abel).

Fonction de distribution, disque minces (2/2)

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution multi-dimensionnelle

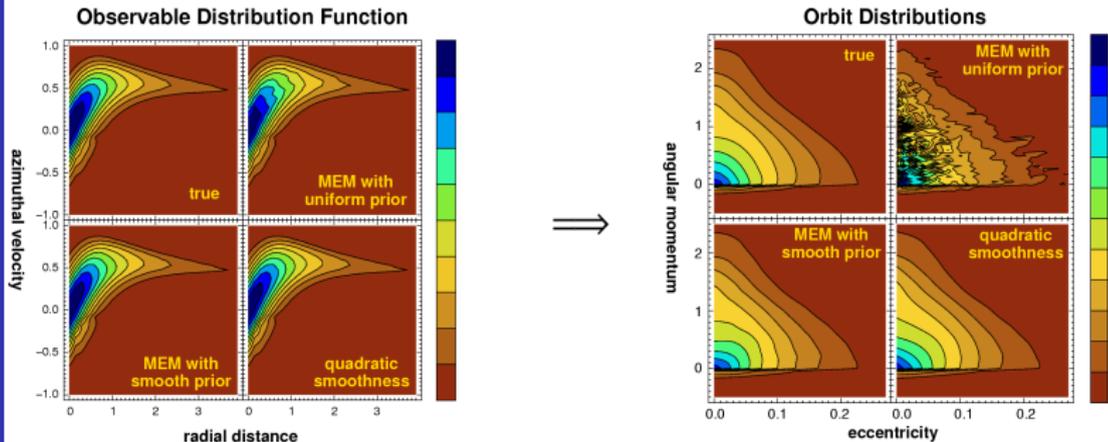
Interférométrie optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

$$F_{\phi}(R, v_{\phi}) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} v_{\phi}^2 - \psi(R)}^0 \frac{f(\varepsilon, R v_{\phi})}{\sqrt{\varepsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_{\phi}^2}} d\varepsilon$$



Pichon & Thiébaud, 1998.

Dynamique galactique : développements

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution
multi-dimensionnelle

Interférométrie
optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

- application à des données réelles (spectro longue fente ou intégrale de champ)
- couplage avec détermination du potentiel (problème non linéaire)
- étude de stabilité (Pichon & Cannon, 1997)
- disques non-minces

Synthèse spectrale

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution
multi-dimensionnelle

Interférométrie
optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

observables : spectre $F(\lambda)$

paramètres : $\Lambda(t)$ = fraction de luminosité émise par des étoiles d'âge $[t, t + dt]$

base : spectres age-métalicité $B(\lambda, t, Z)$ (e.g. PEGASE-HR)
fonction de métallicité $Z(t)$

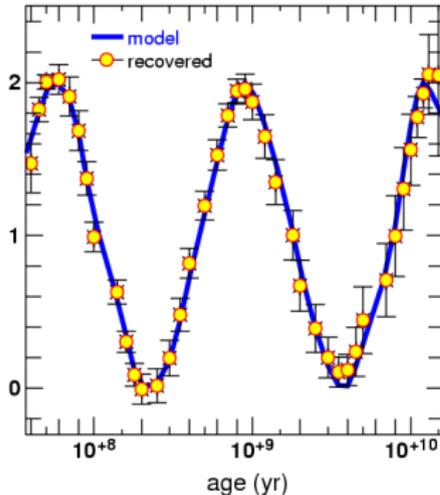
$$F_{\text{rest}}(\lambda) = \int_{t_i}^{t_f} \Lambda(t) B(\lambda, t, Z(t)) dt$$

collaboration Ch. Pichon, P. Ocvirk, A. Lançon (Obs. Strasbourg).

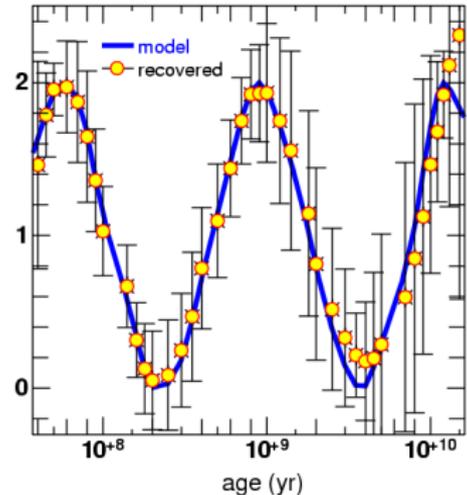
Synthèse spectrale

ça marche...

LWSAD of a simulated population SNR=100



LWSAD of a simulated population SNR=30



mais les choses se compliquent (non-linéaire) si :

- on cherche aussi la fonction de métallicité $Z(t)$
- on prend en compte l'effet Doppler à cause de la distribution de vitesses

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Déconvolution aveugle

Déconvolution multi-dimensionnelle

Interférométrie optique

Dynamique galactique

Synthèse spectrale

Optimisation

Pourquoi une méthode d'optimisation spécifique ?

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

Besoins

VMLM-B

Comparaison
VMLM-B vs. autres

Tests : Déconvolution

Tests MinPack-2

Saturne

- beaucoup de paramètres ($\geq 10^6$)
⇒ méthodes itératives
- non-linéaire (critère non-quadratique)
sinon programmation linéaire
- bornes sur les paramètres (e.g. positivité)
⇒ projection de gradient
- interface avec logiciel de traitement
- mais pas optimisation globale

Algorithme VMLM-B

- VMLM-B = *Variable Metric Limited Memory, Bounded* (Thiébaud, 2002 ; Schwartz and Polak, 1997), élaboré pour :
 - très grand nombre de paramètres ($\geq 10^6$)
 - optimisation non-linéaire
 - contraintes de type bornes
- approximation de type BFGS de l'inverse de la matrice Hessienne + projection de gradient pour prendre en compte les bornes
- en entrée (à fournir par l'utilisateur) :
 - solution de départ : $\mathbf{x}_{\text{start}}$
 - bornes : \mathbf{x}_{min} et/ou \mathbf{x}_{max}
 - pénalisation $f(\mathbf{x})$ et son gradient $g(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$
- facile à paralléliser
- facile à interfacer : *reverse-callback* (C, FORTRAN, IDL, Yorick, matlab, ...)

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

Besoins

VMLM-B

Comparaison
VMLM-B vs. autres

Tests : Déconvolution

Tests MinPack-2

Saturne

Comparaison VMLM-B vs. autres

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

Besoins

VMLM-B

Comparaison
VMLM-B vs. autres

Tests : Déconvolution

Tests MinPack-2

Saturne

● Compétiteurs :

- gradient conjugués avec projection
- NNLS (Lawson & Hanson, 1973)
- LANCELOT (Conn, Gould & Toint, 1992)
- LBFGS-B (Zhu, Byrd, Lu & Nocedal, 1997)
- BLMVM (TAO)
- VMLM-B (Thiébaud, 2002 ; Schwartz and Polak, 1997)
- ...

● Tests :

- déconvolution d'image avec régularisation
- déconvolution aveugle
- MINPACK-2

Tests : Déconvolution

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

Besoins
VMLM-B
Comparaison
VMLM-B vs. autres

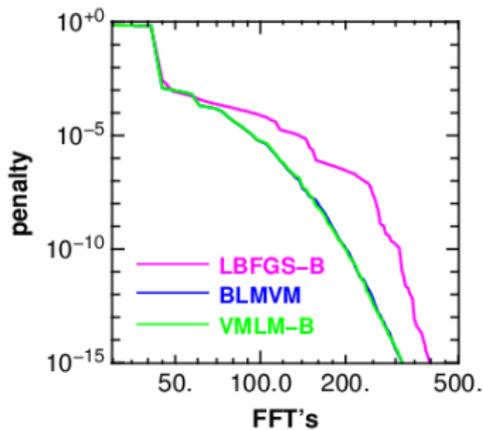
Tests : Déconvolution

Tests MinPack-2

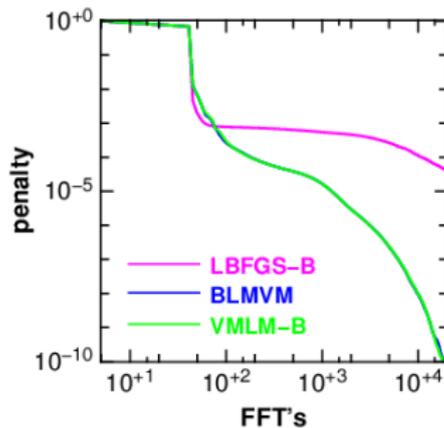
Saturne

deconvolution (image 512×512 de Jupiter)

regularisation quadratique



regularisation I1-I2



Tests : MinPack-2

Problèmes inverses en astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres problèmes inverses

Optimisation

Besoins

VMLM-B

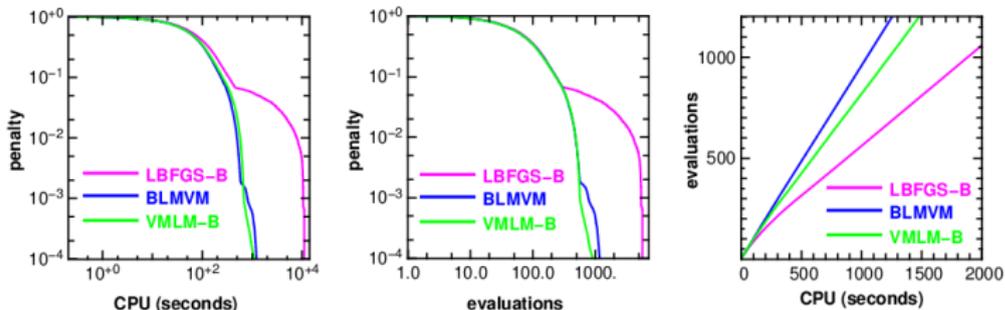
Comparaison VMLM-B vs. autres

Tests : Déconvolution

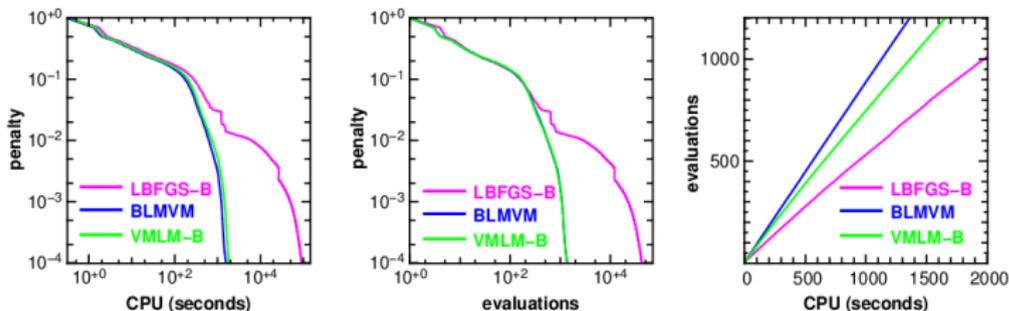
Tests MinPack-2

Saturne

MINPACK2: Elastic-plastic torsion problem – $n_x \times n_y = 10^3 \times 10^3$, $c=5$



MINPACK2: Pressure distribution in a journal bearing problem – $n_x \times n_y = 10^3 \times 10^3$, $ecc=0.1$, $b=10$



Tests : Image de Saturne

Problèmes
inverses en
astronomie

Eric Thiébaud

Introduction

Déconvolution

Autres
problèmes
inverses

Optimisation

Besoins

VMLM-B

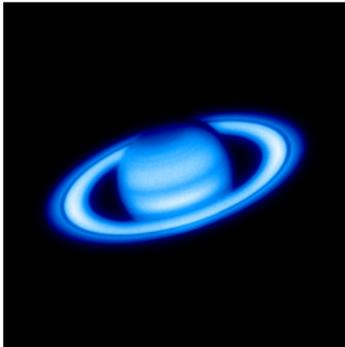
Comparaison
VMLM-B vs. autres

Tests : Déconvolution

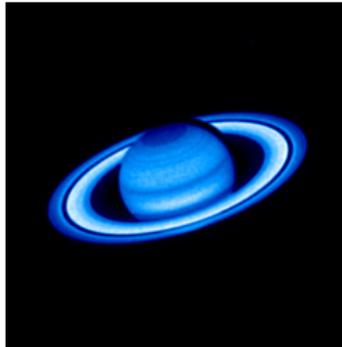
Tests MinPack-2

Saturne

image brute



régul. quadratique



$\ell_1 - \ell_2$

