VII Ecole de Cos[mologie]
P. Valageas

# Plan du Cours

## I Equations de la dynamique gravitationnelle

1°) Equations du mouvement
2°) Solutions self-similaires
3°) Conservation des paires

## II Stable-clustering ansatz

1°) Stable-clustering ansatz
2°) Invariance d'échelle + stable-clustering
3°) Généralisation
4°) Hamilton et al.

## III Description statistique

1°) Fonctions génératrices
2°) Modèle Balian-Schaeffer (1989)
3°) Modèles en arbres
4°) EPT
5°) Lognormale
6°) HEPTH

## IV Modèle de halos

1°) Collapse sphérique
2°) Press-Schechter
3°) Biais des halos
4°) Profils de densité
5°) Fonction de corrélation
6°) Spectre de puissance
7°) Galaxies
8°) Distribution des vitesses

## V Hiérarchie BBGKY et modèles hiérarchiques

## VI Références

## I 1°) Equations du mouvement

* En coordonnées physiques $(\vec{r}, \vec{v}, t)$ on a dans la limite continue :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} = -\nabla \phi, \quad \underline{\Delta_r \phi = 4\pi G \rho_r - \Lambda}$$

$\rho_r$ : densité physique

Fonction de distribution dans l'espace des phases $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $\rho_r(\vec{r}, t) = \int d\vec{v}\, f(\vec{r}, \vec{v}, t)$

L'équation de continuité pour $f$ s'écrit : $\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{r,v}\left(f(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{v}})\right) = 0$

soit : $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\dot{\vec{r}} f) + \frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\dot{\vec{v}} f) = 0$, $\underline{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0}$ (Vlasov)

* On se place en coordonnées ~~comouvantes~~ comobiles :

$$\underline{\vec{x} = \frac{\vec{r}}{a}}, \quad \underline{\vec{p} = a^2 \dot{\vec{x}}}$$

Donc : $\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{a^2}$ et : $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = a \dot{\vec{x}} + \dot{a} \vec{x} = \frac{\vec{p}}{a} + \dot{a} \vec{x} = \frac{\vec{p}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\dot{\vec{p}}}{a} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{\vec{p}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a}\vec{r} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\vec{r} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\vec{p}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}\right) = \frac{\dot{\vec{p}}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a}\vec{r}$$

$$\dot{\vec{p}} = a\dot{\vec{v}} - \ddot{a}\vec{r} = -a \vec{\nabla}_r \phi - \ddot{a}\vec{r}$$

On définit : $\underline{\phi = \varphi + \frac{2\pi}{3} G \bar{\rho}_r r^2 - \frac{\Lambda}{6} r^2}$

$$\vec{\nabla}_x \phi = a \vec{\nabla}_r \phi = \vec{\nabla}_x \varphi + \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}_r a\vec{r} - \frac{\Lambda}{3} a\vec{r}$$

$$\Delta_x \phi = a^2 \Delta_r \phi = \Delta_x \varphi + 4\pi G \bar{\rho}_r a^2 - \Lambda a^2 \qquad \text{or} \qquad \Delta_x \phi = 4\pi G a^2 \rho_r - \Lambda a^2$$

$$\Delta_x \varphi = 4\pi G a^2 (\rho_r - \bar{\rho}_r) = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_r \delta = \frac{4\pi G}{a} \bar{\rho}_x \delta \qquad \bar{\rho}_r = \frac{\bar{\rho}_x}{a^3}$$

$$\dot{\vec{p}} = -a \vec{\nabla}_r \phi - \ddot{a}\vec{r} = -\vec{\nabla}_x \varphi - \frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}_r a\vec{r} + \frac{\Lambda}{3} a\vec{r} - \ddot{a}\vec{r}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_x \varphi - a\vec{r}\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}_r - \frac{\Lambda}{3}\right]$$

Or l'éq. de Friedmann est :
$$\begin{cases} \underline{\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}_r a + \frac{\Lambda}{3} a} \\ \underline{\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}_r a^2 - \frac{c^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} a^2} \end{cases}$$

Donc : $\underline{\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_x \varphi}$

Donc l'éq. de continuité s'écrit,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\vec{p}}{a^2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \vec{\nabla}\varphi\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \\ \Delta\varphi = \dfrac{4\pi \mathcal{G}\bar{\rho}}{a}\,\delta \end{cases} \qquad \delta = \frac{\rho-\bar{\rho}}{\bar{\rho}}\ ,\quad \rho = \int f(\vec{x},\vec{p},t)\, d\vec{p} \qquad (\text{comobile})$$

→ système Vlasov-Poisson.

Force: $\vec{F}(\vec{x},t) = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}} = \dfrac{\mathcal{G}}{a}\displaystyle\int d\vec{x}'\,\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3}\left[\rho(\vec{x}')-\bar{\rho}\right] = \frac{\mathcal{G}}{a}\int d\vec{x}'\,\rho(\vec{x}')\,\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3}$

Donc on peut aussi l'écrire:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\vec{p}}{a^2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \\ \Delta\varphi = \dfrac{4\pi\mathcal{G}}{a}\bar{\rho}\,\delta = \dfrac{4\pi\mathcal{G}}{a}\left(\displaystyle\int f\, d\vec{p} - \bar{\rho}\right)\ ,\quad \vec{F} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}} = \dfrac{\mathcal{G}}{a}\displaystyle\int d\vec{x}'\,d\vec{p}'\, f(\vec{x}',\vec{p}')\,\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \end{cases}$$

## I 2°) Solutions self-similaires

Dans le cas d'un univers Einstein-de Sitter, $\Omega_m = 1$, $a \propto t^{2/3}$, il n'y a pas d'échelle particulière. Dans ce cas, le système Vlasov-Poisson admet des solutions self-similaires:

$$f(\vec{x},\vec{p},t) = t^{-3\alpha-1}\,\hat{f}\left(\frac{\vec{x}}{t^{\alpha}}, \frac{\vec{p}}{t^{\alpha+\frac{1}{3}}}\right)$$

C'est-à-dire que l'on a la symétrie: invariance d'échelle:

$$\underline{f(\vec{x},\vec{p},t) \longrightarrow f_\lambda(\vec{x},\vec{p},t) = \lambda^{-3\alpha-1} f\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}}, \frac{\vec{p}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{3}}}, \frac{t}{\lambda}\right)}$$

est aussi solution de la dynamique, $\forall\lambda>0$.

On a: $\rho_\lambda(\vec{x},t) = \displaystyle\int d\vec{p}\,\lambda^{-3\alpha-1} f\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}}, \frac{\vec{p}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{3}}}, \frac{t}{\lambda}\right) = \rho\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}}, \frac{t}{\lambda}\right)$

$$\vec{F}_\lambda(\vec{x},t) = \frac{\mathcal{G}}{a(t)}\int d\vec{x}'\,\rho\left(\frac{\vec{x}'}{\lambda^{\alpha}},\frac{t}{\lambda}\right)\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} = \frac{\mathcal{G}}{a\left(\frac{t}{\lambda}\right)\lambda^{2/3}}\int d\vec{x}'\,\rho\left(\vec{x}',\frac{t}{\lambda}\right)\lambda^{\alpha}\,\frac{\vec{x}'-\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}}}{\left|\vec{x}'-\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}}\right|^3} = \lambda^{\alpha-\frac{2}{3}}\,\vec{F}\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}},\frac{t}{\lambda}\right)$$

où on a utilisé: $a \propto t^{2/3}$ donc: $a(t) = a\left(\frac{t}{\lambda}\right)\lambda^{2/3}$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{a^2}\cdot\frac{\partial f_\lambda}{\partial\vec{x}} + \vec{F}_\lambda\cdot\frac{\partial f_\lambda}{\partial\vec{p}} = \lambda^{-3\alpha-1}\left[\lambda^{-1}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{a^2\left(\frac{t}{\lambda}\right)\lambda^{4/3}}\cdot\lambda^{-\alpha}\frac{\partial f}{\partial\vec{x}} + \lambda^{\alpha-\frac{2}{3}}\vec{F}\cdot\lambda^{-\alpha-\frac{1}{3}}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\right]\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}},\frac{\vec{p}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{3}}},\frac{t}{\lambda}\right)$$

$$= \lambda^{-3\alpha-2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{3}}\,a^2\left(\frac{t}{\lambda}\right)}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{x}} + \vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\right]\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^{\alpha}},\frac{\vec{p}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{3}}},\frac{t}{\lambda}\right) = 0$$

4)

Pour que le système vérifie cette symétrie, il faut qu'elle ne soit pas brisée par les conditions initiales. On a vu: $\rho(\vec{x},t) = \rho\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^\alpha}, \frac{t}{\lambda}\right)$, donc il faut:

$\xi\left(\frac{\vec{x}}{\lambda^\alpha}, \frac{t}{\lambda}\right) = \xi(\vec{x}, t)$, or dans le régime linéaire pour un spectre de puissance linéaire en loi de puissance $P_L(k) \propto k^n$, on a:

$$\sigma^2(x,t) = \cancel{\xi_L(x)} \langle \delta_{Lx}^2 \rangle = a^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(n+3)}$$

où: $\delta_x = \int \frac{d\vec{x}}{V} \delta(\vec{x})$, $\langle \delta_x^2 \rangle = \int \frac{d\vec{x}_1 d\vec{x}_2}{V^2} \langle \delta(\vec{x}_1)\delta(\vec{x}_2)\rangle$ et $\delta(\vec{x}) = \int d\vec{k}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} \delta(\vec{k})$

$$\delta_x = \int \frac{d\vec{x}}{V} \int d\vec{k}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} \delta(\vec{k}) = \int d\vec{k}\, F(kx)\, \delta(\vec{k}) \quad \text{avec: } F(kx) = \int \frac{d\vec{x}}{V} e^{i\vec{k}.\vec{x}}, \quad F(0)=1.$$

$$F(kx) = 3\,\frac{\sin kx - kx\cos kx}{(kx)^3} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(kx)^{-\frac{3}{2}} J_{3/2}(kx)$$

$$\langle \delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k}')\rangle = \delta_D(\vec{k}+\vec{k}')\, P(k)$$

$u = kx$

Donc: $\sigma^2(x) = \langle \delta_x^2 \rangle = \int d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, F(k_1x)F(k_2x)\langle\delta(\vec{k}_1)\delta(\vec{k}_2)\rangle = \int d\vec{k}\, F(kx)^2 P(k) = x^{-3}\int d\vec{u}\, F(u)\, P\left(\frac{u}{x}\right)$

$\sigma^2(x) \propto x^{-(n+3)}$

Donc: $\sigma^2(x,t) \sim t^{\frac{4}{3}} x^{-(n+3)}$, on veut: $\sigma^2\left(\frac{x}{\lambda^\alpha}, \frac{t}{\lambda}\right) = \sigma^2(x,t)$

$\sigma^2\left(\frac{x}{\lambda^\alpha}, \frac{t}{\lambda}\right) \sim t^{\frac{4}{3}} x^{-(n+3)} \lambda^{-\frac{4}{3}+(n+3)\alpha}$, $-\frac{4}{3}+(n+3)\alpha = 0$, $\underline{\alpha = \frac{4}{3(n+3)}}$.

## I3) Conservation des paires

A partir de l'équation de Vlasov on obtient une équation pour la conservation des paires: $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{a^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0$, $\rho = \int d\vec{p}\, f$

$$\langle \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}_1,t)\rho(\vec{x}_2,t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}^2(1+\xi)\right] = \bar{\rho}^2\frac{\partial \xi}{\partial t} = \langle \frac{\partial}{\partial t}\int d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2\, f(\vec{x}_1,\vec{p}_1,t)\, f(\vec{x}_2,\vec{p}_2,t)\rangle$$

$$\bar{\rho}^2\frac{\partial\xi}{\partial t} = \langle \int d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2 \left[-\frac{\vec{p}_1}{a^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1}(\vec{x}_1,\vec{p}_1)\, f(\vec{x}_2,\vec{p}_2) - \vec{F}_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} f_2 - \frac{\vec{p}_2}{a^2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \vec{x}_2} f_1 - \vec{F}_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_2} f_1\right]\rangle$$

$$\bar{\rho}^2\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1}\langle\int d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2\, \frac{\vec{p}_1}{a^2} f_1 f_2\rangle - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2}\langle\int d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2\, \frac{\vec{p}_2}{a^2} f_1 f_2\rangle$$

5)

$$\bar\rho^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1}\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_1}{a^2} \langle f_1 f_2\rangle - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2}\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_2}{a^2}\langle f_1 f_2\rangle$$

soit: $c(\vec{x}_1,\vec{p}_1;\vec{x}_2,\vec{p}_2) = \langle f(\vec{x}_1,\vec{p}_1) f(\vec{x}_2,\vec{p}_2)\rangle$, alors:

$$c(1,2) = c(\vec{x}_2-\vec{x}_1;\vec{p}_1,\vec{p}_2) = c(\vec{x}_1-\vec{x}_2;\vec{p}_2,\vec{p}_1) \;,\quad c(\vec{x};\vec{p}_1,\vec{p}_2) = c(-\vec{x};\vec{p}_2,\vec{p}_1)\;,\quad \vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$$

$$\bar\rho^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_1}{a^2} c(\vec{x};\vec{p}_1,\vec{p}_2) - \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_2}{a^2} c(\vec{x};\vec{p}_1,\vec{p}_2)$$

$$\bar\rho^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{a^2} c(\vec{x};\vec{p}_1,\vec{p}_2)$$

Or on a défini: $\vec{p} = a^2\dot{\vec{x}} = a\vec{v} - \dot a\vec{r} = a(\vec{v}-H\vec{x}) = a\vec{u}$, $\vec{u} = \vec{v}-H\vec{x}$

$\vec{u}$: vitesse particulière.

On définit la vitesse particulière moyenne:

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \frac{\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 (\vec{u}_2-\vec{u}_1)\, c(1,2)}{\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2\, c(1,2)} = \frac{\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{a} c(1,2)}{\bar\rho^2(1+\xi)} = u\frac{\vec{x}}{x}$$ car $\vec{u}/\!/\vec{x}$ par symétrie.

$$\bar\rho^2\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left[\frac{\bar\rho^2}{a}(1+\xi)\vec{u}\right]\;,\quad a\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left[\frac{\vec{x}}{x}(1+\xi)u\right] \qquad x = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$$

$$a\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{3}{x}(1+\xi)u - x_1\frac{1}{2}x^{-1}2x_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}(1+\xi)u\right] = -\frac{3}{x}(1+\xi)u - x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}(1+\xi)u\right]$$

$$a\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{3}{x}(1+\xi)u + \frac{1}{x}(1+\xi)u - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\xi)u\right] = -\frac{2}{x}(1+\xi)u - \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\xi)u\right] = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(1+\xi)u\right]$$

$$\underline{\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{ax^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(1+\xi)u\right] = 0}$$

En fait, cette équation traduit la conservation des paires:

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar n\int_0^x dx\, 4\pi x^2(1+\xi)\right) + 4\pi x^2\bar n(1+\xi)\frac{u}{a} = 0} \qquad \text{car } \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{u}}{a}$$

↓ variation du nbre moyen de voisins dans un rayon $x$ d'une particule

↘ flux moyen de voisins à travers la surface de rayon $x$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[x^2(1+\xi)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(1+\xi)\frac{u}{a}\right] = 0\;,\quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{ax^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(1+\xi)u\right] = 0$$

Donc le comportement de $\xi$ est lié à celui de la vitesse moyenne entre paires $u$.

→ à partir de $u$ on obtient $\xi$ (stable-clustering)

→ à partir de $\xi$ on obtient $u$ (modèle de halo)

En effet, la probabilité de trouver un objet dans chacun des éléments de volume $dV_1$ et $dV_2$ est : $dP = \bar{n}^2 \left(1+\xi(x_{12})\right) dV_1\, dV_2$

Pour un processus de Poisson uniforme les probabilités de trouver des objets en $dV_1$ et $dV_2$ sont indépendantes, donc la probabilité conjointe est : $dP = \bar{n}^2\, dV_1\, dV_2$ , $\xi = 0$.
Si les objets sont corrélés positivement : $\xi > 0$, si ils sont anti-corrélés : $\xi < 0$.

Comme la probabilité d'avoir une particule dans $dV_1$ est $\bar{n}\, dV_1$, la probabilité conditionnelle de trouver un objet en $dV_2$ sachant qu'il y en a un en $dV_1$ est :

$$dP(2|1) = \bar{n}\left(1+\xi(r)\right) dV_2$$

En d'autres termes, si on choisit une particule au hasard, la probabilité qu'elle ait un voisin à la distance $r$ en $dV$ est : $\underline{dP_c = \bar{n}\left(1+\xi(r)\right) dV}$

Donc le nombre moyen de voisins dans un rayon $R$ est : $N_c = \int_0^R dV\, \bar{n}(1+\xi) = \bar{n}\int_0^R dr\, 4\pi r^2 (1+\xi)$

Noter : de même, la probabilité de trouver 3 objets est :

$$dP_{123} = \bar{n}^3 \left[1 + \xi(x_{12}) + \xi(x_{13}) + \xi(x_{23}) + \xi_3(x_{12}, x_{13}, x_{23})\right] dV_1\, dV_2\, dV_3 .$$

## II 1°) Stable-clustering ansatz

On a vu : $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{a x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 (1+\xi) u\right] = 0$ .

A petite échelle où $\xi \gg 1$, les régions sur-denses virialisent et découplent de l'expansion générale. Si elles restent stables, la vitesse physique $v \simeq 0$ donc $\underline{\vec{u} \simeq -H\vec{r} = -\dot{a}\vec{x}}$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+\xi) = \frac{\dot{a}}{a x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^3(1+\xi)\right] , \qquad x^3\, a \frac{\partial}{\partial a}(1+\xi) = x\frac{\partial}{\partial x}\left[x^3(1+\xi)\right]$$

$\underline{\left(\frac{\partial}{\partial \ln a} - \frac{\partial}{\partial \ln x}\right)\left(x^3(1+\xi)\right) = 0}$ , donc : $x^3(1+\xi) = F_1(\ln a + \ln x) = F_2(ax)$ $\qquad r = ax$, $x =$

$\underline{1+\xi = a^3 F_3(ax)}$ , $\#$ voisins : $N_c = \bar{n}\int_0^x dx\, 4\pi x^2 (1+\xi(x)) = \bar{n}\int_0^r dr\, 4\pi r^2 F_3(r) = C^{te}/a$

Le nombre moyen de voisins à distance physique fixée est constant / temps.

De même, la conservation des triplets, ... donne : $\xi_p(\vec{x}_1, .., \vec{x}_p; a) \propto a^{3(p-1)}$

de sorte que :

$$\bar{n}^{p-1}\,\xi_p(\vec{x}_1, .., \vec{x}_p; a) = C^{te} / \text{temps} \quad \text{à séparation physique donnée.}$$

On note : $\bar{\xi}_p(R) = \int_V \frac{d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_p}{V^p}\,\xi_p(\vec{x}_1, .., \vec{x}_p)$ donc : $\bar{\xi}_p(R) \propto a^{3(p-1)} \propto \bar{\xi}_2(R)^{p-1}$.

On définit : $S_p = \frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^{p-1}}$, $S_p(R,t)$ indépendant du temps à petite échelle.

## II 2°) Invariance d'échelle + stable clustering

Si le système est invariant d'échelle on a vu en coordonnées comobiles :

$$\xi_p\left(\frac{\vec{x}_1}{\lambda^\alpha}, .., \frac{\vec{x}_p}{\lambda^\alpha}; \frac{t}{\lambda}\right) = \xi_p(\vec{x}_1, .., \vec{x}_p; t) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{4}{3(n+3)}, \quad a \propto t^{2/3}. \qquad \vec{r} = a\vec{x}$$

$$\xi_p(\vec{r}_1, .., \vec{r}_p; t) = \xi_p\left(\frac{\vec{r}_1}{\lambda^{\alpha+\frac{2}{3}}}, .., \frac{\vec{r}_p}{\lambda^{\alpha+\frac{2}{3}}}; \frac{t}{\lambda}\right) \qquad \cancel{\frac{\vec{r}}{a(t)}},\ \vec{r} \text{ en physiques}$$

car : $t \to \frac{t}{\lambda}$, $\vec{x} \to \frac{\vec{x}}{\lambda^\alpha}$, $\vec{r} \to \frac{\vec{r}}{a(t)}\,\frac{a(\frac{t}{\lambda})}{\lambda^\alpha} = \frac{\vec{r}}{\lambda^{\alpha+\frac{2}{3}}}$

Si on a de plus le stable-clustering : $\xi_p(\vec{r}_1, .., \vec{r}_p; t) = t^{2(p-1)}\,\hat{\xi}_p(\vec{r}_1, .., \vec{r}_p)$

$$\Rightarrow \quad t^{2(p-1)}\,\hat{\xi}_p(\vec{r}_1, .., \vec{r}_p) = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2(p-1)} \hat{\xi}_p\left(\frac{\vec{r}_1}{\lambda^{\alpha+\frac{2}{3}}}, .., \frac{\vec{r}_p}{\lambda^{\alpha+\frac{2}{3}}}\right)$$

soit : $\mu = \lambda^{-\alpha-\frac{2}{3}} = \lambda^{-\frac{3\alpha+2}{3}}$, $\qquad \hat{\xi}_p(\mu\vec{r}_1, .., \mu\vec{r}_p) = \mu^{-\frac{6}{3\alpha+2}(p-1)}\,\hat{\xi}_p(\vec{r}_1, .., \vec{r}_p)$

$\lambda = \mu^{-\frac{3}{3\alpha+2}}$

$$\hat{\xi}_p(\mu\vec{r}_1, .., \mu\vec{r}_p) = \mu^{-\gamma(p-1)}\,\hat{\xi}_p(\vec{r}_1, .., \vec{r}_p)$$

$$\gamma = \frac{6}{3\alpha+2} = \frac{3(n+3)}{n+5}$$

En particulier, les coefficients $S_p = \frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^{p-1}}$ sont indépendants du temps et de l'échelle.

8]

ApJ, 465, 14 (1996)



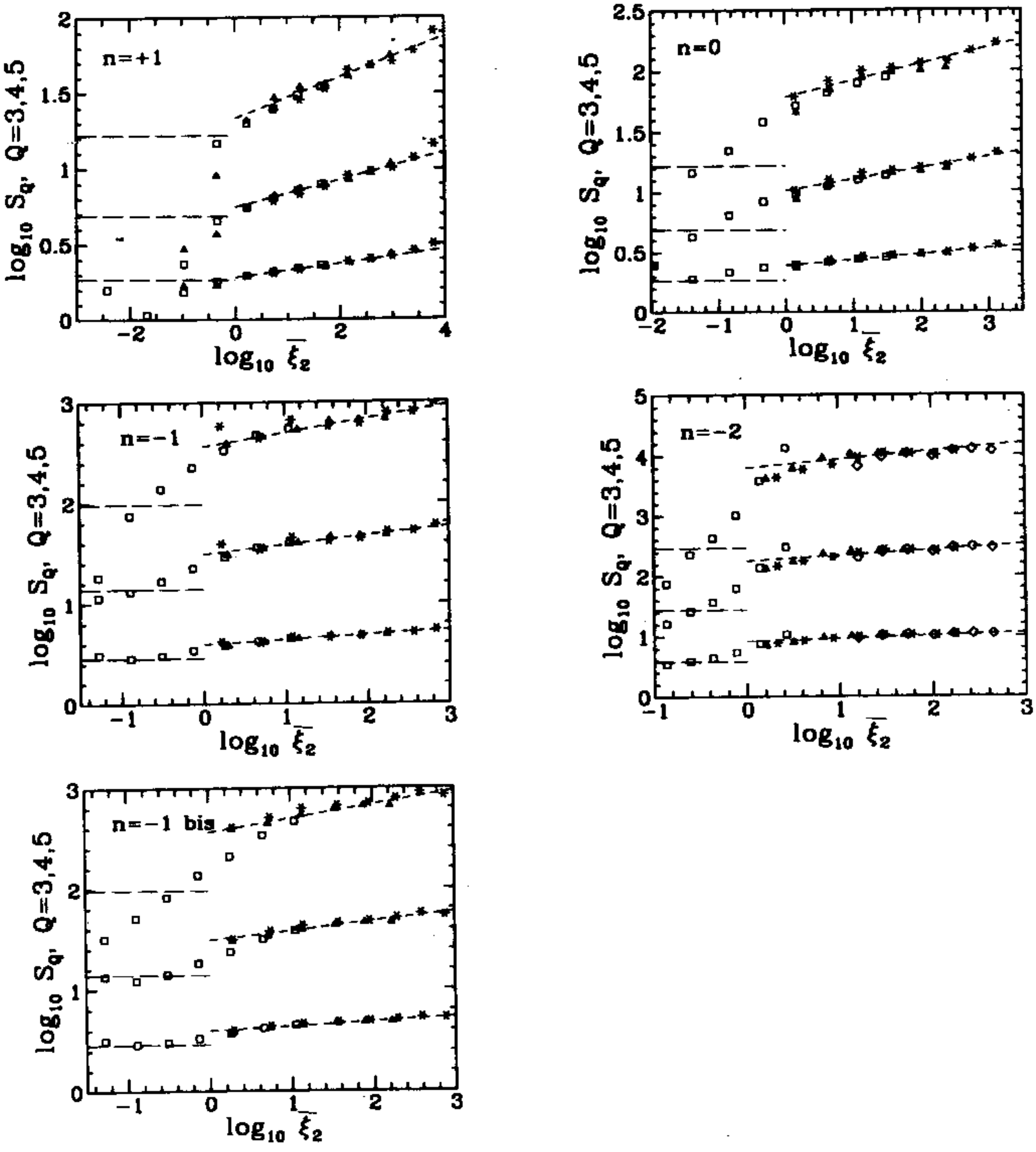



FIG. 5.—Same as Fig. 4, but finite volume effects have been corrected for when necessary, by extending to infinity the large-$N$ exponential tail exhibited by the CPDF (see Fig. 1); only the reliable scales have been displayed, i.e., $\ell_m \leq \ell \leq \ell_M$, where $\ell_m$ and $\ell_M$ are listed in Table 1. Now, the agreement with self-similarity is much better: the curves corresponding to various expansion factors all superimpose, for a given value of $Q$ and $n$. The long dashes give the predictions of eqs. (29), (30), and (31) from perturbation theory, valid in the limit $\bar{\xi}_2 \ll 1$. In the case $n = +1$, we display the predictions for $n = 0$ (see discussion in the text). The short dashes are the following phenomenological power-law fit: $S_Q = \bar{S}_Q(\bar{\xi}_2/100)^{0.045(Q-2)}$, valid for $\bar{\xi}_2 > 1$, for all $n$. The values of $\bar{S}_Q$ are given in Table 3.

## II 3°) Généralisation

On a vu : $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{a x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 (1+\xi) u\right] = 0$

On note : $\tilde{\xi} = \frac{3}{x^3} \int_0^x dx\, x^2 \xi(x) = \frac{1}{V} \int_0^x dx\, 4\pi x^2 \xi(x)$ , $N_c = \overline{N}(1+\tilde{\xi})$ # voisins.

on remarque : $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \tilde{\xi}\right) = 3 x^2 \xi$ donc : $1+\xi = \frac{1}{3x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 (1+\tilde{\xi})\right]$

on substitue :

$$\frac{1}{3x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 \frac{\partial}{\partial t}(1+\tilde{\xi})\right] = -\frac{1}{a x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u}{3} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 (1+\tilde{\xi})\right)\right]$$

d'où : $x^3 \frac{\partial}{\partial t}(1+\tilde{\xi}) = -\frac{u}{a} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 (1+\tilde{\xi})\right]$

On change de variable : $t \to a$ : $x^3 \dot{a} \frac{\partial}{\partial a}(1+\tilde{\xi}) = -\frac{u}{a} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 (1+\tilde{\xi})\right]$

$$a \frac{\partial}{\partial a}(1+\tilde{\xi}) = \left(\frac{u}{-\dot{a} x}\right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 (1+\tilde{\xi})\right]$$

On définit : $h(x,a) = -\frac{u}{\dot{a} x}$ , $\underline{\left(\frac{\partial}{\partial \ln a} - h \frac{\partial}{\partial \ln x}\right)(1+\tilde{\xi}) = 3h\,(1+\tilde{\xi})}$

- régime linéaire : on a vu : $x^3 \dot{a} \frac{\partial}{\partial a}(1+\tilde{\xi}) = -\frac{u}{a} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^3 (1+\tilde{\xi})\right]$
  $\tilde{\xi} \ll 1$ donc, avec $\tilde{\xi} \propto a^2$ : $x^3 \dot{a}\, 2 \frac{\tilde{\xi}}{a} = -\frac{u}{a} 3 x^2$ , $u = -\frac{2}{3} \dot{a} x \tilde{\xi}$
  $h(x,a) = \frac{2}{3} \tilde{\xi}$

- régime non-linéaire : $h = 1$

Si on suppose : $h(x,a) = h(\tilde{\xi})$ alors : $\left(\frac{\partial}{\partial \ln a} - h \frac{\partial}{\partial \ln x}\right) \ln(1+\tilde{\xi}) = 3h$

soit : $A = \ln a$, $X = \ln x$, $D = \ln(1+\tilde{\xi})$ : $\frac{\partial D}{\partial A} - h(D) \frac{\partial D}{\partial X} = 3h$

caractéristique : $\frac{dD}{ds} = 3h$ avec : $\frac{dA}{ds} = 1$, $\frac{dX}{ds} = -h$

donc : $ds = \frac{dD}{3h}$ , $s = \int \frac{dD}{3h} = \int_{\tilde{\xi}_0}^{\tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\xi}}{3h(1+\tilde{\xi})}$ $A = A_0 + s$ , $s = A - A_0 = \ln \frac{a}{a_0}$

$\ln \frac{a}{a_0} = \int_{\tilde{\xi}_0}^{\tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\xi}}{3h(1+\tilde{\xi})} = \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\xi}_L}{\tilde{\xi}_{L0}}$ , $\tilde{\xi}_L = \tilde{\xi}_{L0}\, e^{\frac{2}{3}\int_{\tilde{\xi}_0}^{\tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\xi}}{h(1+\tilde{\xi})}}$

et : $\frac{dX}{ds} = -h = -\frac{1}{3}\frac{dD}{ds}$ , $3X + D = C^{te}/s$ , $\ln x^3 (1+\tilde{\xi}) = C^{te}/s$.

D'où : $\underline{\tilde{\xi}_L(x_L) = \tilde{\xi}_{L0}(x_L)\, e^{\frac{2}{3}\int_{\tilde{\xi}_0}^{\tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\xi}}{h(1+\tilde{\xi})}}}$ et : $\underline{x^3(1+\tilde{\xi}) = x_L^3}$ , $a_0 \to 0$ .

Soit : $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\xi}(x,a) = \mathcal{F}(\tilde{\xi}_L(x_L))} \\ \underline{x^3(1+\tilde{\xi}) = x_L^3} \end{array} \right.$

- régime linéaire : $\tilde{\xi} \simeq \tilde{\xi}_L \ll 1$, $x \simeq x_L$, $\underline{\mathcal{F}(\tilde{\xi}_L) \simeq \tilde{\xi}_L}$ en $\tilde{\xi}_L \ll 1$.
- régime non-linéaire : si $h=1$, stable-clustering : $\xi(r,a) \propto a^3$ ($r$ physique)
  $a^3 x^3 = C^{te}/a$ : $r$ fixé, $\tilde{\xi}_L \propto a^2$ donc : $\underline{\mathcal{F}(\tilde{\xi}_L) \propto \tilde{\xi}_L^{3/2}}$ en $\tilde{\xi}_L \gg 1$.

## II 4) Hamilton et al.

En fait cette idée vient d'un point de vue Lagrangien où l'on suit l'évolution d'une région de masse donnée. En coordonnées comobiles, le nombre moyen de voisins est : $\underline{N_c = \int_0^x dV\, \bar{n}\,(1+\xi) = \bar{n}\, V(1+\tilde{\xi})}$.

Dans le champ linéaire : $x_L = C^{te}$, $\delta_L \propto D(t)$, donc on relie l'échelle Lagrangienne $x_L$ à l'échelle Eulérienne $x$ avec : $\underline{x^3(1+\tilde{\xi}) = x_L^3}$.

On suppose ensuite qu'après ce rescaling on a une dépendance universelle de la forme : $\tilde{\xi} = \mathcal{F}(\tilde{\xi}_L)$ : $\underline{\tilde{\xi}(x,a) = \mathcal{F}[\tilde{\xi}_L(x_L,a)]}$.

$\tilde{\xi}_L \ll 1$ : $\mathcal{F}(\tilde{\xi}_L) \simeq \tilde{\xi}_L$, $\tilde{\xi}_L \gg 1$ : $\tilde{\xi} \propto a^3$ et $\tilde{\xi}_L \propto D_+$, $\underline{\mathcal{F}(\tilde{\xi}_L) \propto \left(\frac{a}{D(t)}\right)^3 \tilde{\xi}_L^{3/2}}$.

En fait on vérifie numériquement que la fonction $\mathcal{F}$ dépend de $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, n)$.
Pour un spectre CDM on prend le $n$ à la transition non-linéaire.

On a vu : $\langle \delta_R^2 \rangle = \int d\vec{k}\, W(kR)^2 P(k) = \int_0^\infty \frac{dk}{k}\, 4\pi k^3 P(k)\, W(kR)^2 = \int_0^\infty \frac{dk}{k}\, \Delta^2(k)\, W(kR)^2$

$\Delta^2(k)$ : puissance par intervalle logarithmique de $k$.

On écrit : $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Delta^2(k,t) = \mathcal{F}[\Delta_L^2(k_L,t)]} \\ \underline{k^3 = (1+\Delta^2(k))\, k_L^3} \end{array} \right.$

11/

?V
Schaeffer
Lacey 99

astro-ph 9902320

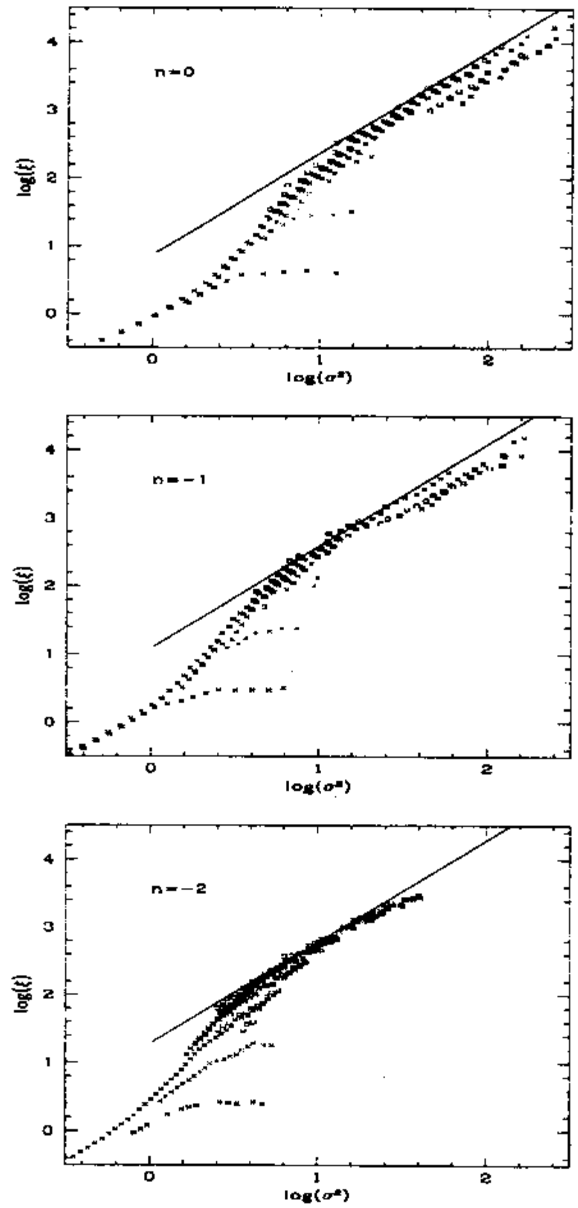



Figure 1: The two-point correlation function $\overline{\xi}(R)$ as a function of $\sigma^2(R_L)$ for the power-spectra $n = 0, -1$ and $-2$. The solid line is the asymptotic behaviour (12) for large $\overline{\xi}$, in the stable clustering regime, with normalization $\alpha$ from Tab.1. The crosses are numerical values obtained from counts-in-cells, while the squares are the estimates of $\overline{\xi}$ provided by measures of $\tilde{\xi}$ from neighbour counts, see main text and (23). Different shades of grey correspond to different comoving scales (0.2, 0.5, 1, 2, 4, 8 and 16 Mpc). The larger scales (8 and 16 Mpc) saturate at too low a value of $\overline{\xi}$, reflecting the finite size of the sample. The 0.2 Mpc scale presents deviations from the scaling in the highly non-linear regime (all curves should exactly superpose for power-law initial conditions), with a lack of power due to the softening-over a 0.2 Mpc radius- of the gravitational interaction.

## II 1°) Fonctions génératrices

A partir de la pdf $\mathcal{P}(\rho_R)$ on définit la fonction génératrice des moments $\psi(y)$ :

$$\underline{\psi(y) = \int_0^\infty d\rho_R \; e^{-y\rho_R} \, P(\rho_R) = \sum_{p=0}^\infty \frac{(-y)^p}{p!} \langle \rho_R^p \rangle} \quad , \quad \underline{P(\rho_R) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dy}{2\pi i} \, e^{y\rho_R} \, \psi(y)}$$

Elle est liée à la fonction génératrice des cumulants par :

$$\psi(y) = e^{-\tilde{\varphi}(y)} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(y) = -\sum_{p=1}^\infty \frac{(-y)^p}{p!} \langle \rho_R^p \rangle_c \, .$$

Donc : $$e^{-\tilde{\varphi}(y)} = \int_0 d\rho_R \; e^{-y\rho_R} \, P(\rho_R) \quad \text{et} \quad P(\rho_R) = \int \frac{dy}{2\pi i} \, e^{y\rho_R - \tilde{\varphi}(y)}$$

Dans le cadre du stable-clustering ansatz on a : $S_p = \frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}^{p-1}}$ indépendant de $(R, t)$.
Donc on introduit :

$$\underline{\varphi(y) = \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^{p-1}}{p!} S_p \, y^p} \quad , \quad \underline{S_1 = S_2 = 1 .}$$

$$\tilde{\varphi}(y) = \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^{p-1}}{p!} y^p \, \bar{\xi}_p = \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^{p-1}}{p!} y^p \, S_p \, \bar{\xi}^{p-1} = \frac{1}{\bar{\xi}} \varphi(y\bar{\xi}) \quad , \quad \tilde{\varphi}(y) = \varphi(y\bar{\xi})/\bar{\xi} \, .$$

Noter : on a en fait défini : $\rho_R = \int_V \frac{d\vec{x}}{V} \frac{\rho(\vec{x})}{\bar{\rho}} = 1 + \delta_R$ , $\langle \rho_R^p \rangle_c = \bar{\xi}_p = \int \frac{d\vec{x}_1 \ldots d\vec{x}_p}{V^p} \xi_p$ .
et $\langle \rho_R \rangle = 1$ .

Donc : $$\begin{cases} \underline{e^{-\varphi(y)/\bar{\xi}} = \int_0^\infty d\rho_R \; e^{-y\rho_R/\bar{\xi}} \, P(\rho_R)} \, , \\ \underline{P(\rho_R) = \int \frac{dy}{2\pi i \bar{\xi}} \, e^{[y\rho_R - \varphi(y)]/\bar{\xi}}} \end{cases}$$

En particulier, la skewness $S_3$ est : $\underline{S_3 = \frac{\bar{\xi}_3}{\bar{\xi}^2} = \frac{\langle \rho_R^3 \rangle_c}{\langle \rho_R^2 \rangle_c^2}}$ .

A l'origine : $\underline{\varphi(y) \simeq y - \frac{y^2}{2} + S_3 \frac{y^3}{6} + \ldots}$

De plus :
* $\mathrm{Re}(y) \geq 0$ : $\left| e^{-\varphi(y)/\bar{\xi}} \right| \leq \int_0^\infty d\rho_R \, P(\rho_R) \left| e^{-y\rho_R/\bar{\xi}} \right| \leq \int_0^\infty d\rho_R \, P(\rho_R) = 1$

  $\mathrm{Re}(y) \geq 0$ : $\mathrm{Re}(\varphi(y)) \geq 0$ .

* $-\frac{\varphi'}{\bar{\xi}} \, e^{-\frac{\varphi}{\bar{\xi}}} = \int_0^\infty d\rho_R \left(-\frac{\rho_R}{\bar{\xi}}\right) e^{-y\rho_R/\bar{\xi}} \, P(\rho_R)$ , $y \in \mathbb{R}$ : $\varphi(y) \in \mathbb{R}$ et $\varphi'(y) > 0$ .

13)

$\ast \quad y \geq 0 : \quad e^{-\varphi(y)/\xi} = \int_0^\infty d\rho_R \, P(\rho_R) \, e^{-\rho_R y/\xi} \geq \int_0^\alpha d\rho_R \, P(\rho_R) \, e^{-y\rho_R/\xi} \geq e^{-\alpha y/\xi} \int_0^\alpha d\rho_R \, P(\rho_R) \quad (\alpha$

de plus : $1 = \int_0^\infty d\rho_R \, P(\rho_R)\rho_R \geq \int_\alpha^\infty d\rho_R \, P(\rho_R)\rho_R \geq \alpha \int_\alpha^\infty d\rho_R \, P(\rho_R)$

donc : $\int_\alpha^\infty d\rho_R \, P(\rho_R) \leq \frac{1}{\alpha}$ , d'où : $\int_0^\alpha d\rho_R \, P(\rho_R) = 1 - \int_\alpha^\infty d\rho_R \, P(\rho_R) \geq 1 - \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 1)$

donc : $e^{-\varphi(y)/\xi} \geq e^{-\alpha y/\xi}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ , $\quad -\frac{\varphi(y)}{\xi} \geq -\frac{\alpha y}{\xi} + \ln \frac{\alpha-1}{\alpha}$

$\forall \alpha > 1 : \quad y \geq 0 : \quad \varphi(y) \leq \alpha y + \xi \ln \frac{\alpha}{\alpha-1}$

III 2) On prend comme modèle : (Balian Schaeffer 1989)

$$\begin{cases} y \to +\infty : & \varphi(y) \propto a \, y^{1-\omega} \ , \quad 0 < \omega < 1 \\ y \to y_s^+ < 0 : & \varphi(y) \simeq -a_s \Gamma(\omega_s)(y - y_s)^{-\omega_s} + \dots \end{cases}$$

$p \to \infty : \quad S_p \sim (-y_s)^{-p} \, p! = \frac{p!}{(-y_s)^p}$

$y_s = -\lim_{p\to\infty} p \frac{S_p}{S_{p+1}}$

par ex. $\omega_s = -\frac{3}{2}$

on a omis les termes plus réguliers.

2 échelles de densité $\rho_v$ et $\rho_c$ apparaissent dans le régime très non-linéaire $\xi \gg 1$ :

$\rho_v = \xi^{-\frac{\omega}{1-\omega}}$ , $\rho_c = \xi$ . $\quad \rho_v \ll 1 \ll \rho_c$ .

- pour $\rho \gg \rho_v$ on peut écrire : $P(\rho_R) = \int \frac{dy}{2\pi i \xi} e^{[y\rho_R - \varphi(y)]/\xi} \simeq -\frac{1}{\xi^2} \int \frac{dy}{2\pi i} e^{y\rho_R/\xi} \varphi(y)$

soit : $P(\rho_R) \simeq \frac{1}{\xi^2} h(x)$ avec $x = \frac{\rho_R}{\xi}$ , $h(x) = -\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dy}{2\pi i} e^{xy} \varphi(y)$

$\rho_R \gg \rho_c$ : $\quad P(\rho_R) \simeq \frac{a_s}{\xi^2} \left(\frac{\rho_R}{\xi}\right)^{\omega_s - 1} e^{-|y_s|\rho_R/\xi}$

$\rho_v \ll \rho_R \ll \rho_c$ : $\quad P(\rho_R) \simeq \frac{a(1-\omega)}{\Gamma(\omega)\,\xi^2} \left(\frac{\rho_R}{\xi}\right)^{\omega - 2}$

$\rho_R \ll \rho_v$ : $\quad P(\rho_R) \simeq a^{-\frac{1}{1-\omega}} \, \xi^{\frac{\omega}{1-\omega}} \sqrt{\frac{(1-\omega)^{1/\omega}}{2\pi\omega}} \, z^{-\frac{1+\omega}{2\omega}} \, e^{-\omega \left(\frac{z}{1-\omega}\right)^{-\frac{1-\omega}{\omega}}}$

avec : $z = a^{-\frac{1}{1-\omega}} \, \xi^{\frac{\omega}{1-\omega}} \rho_R$ .

- les moments vérifient : $\begin{cases} p > 1-\omega : & \langle \rho_R^p \rangle \sim \xi^{p-1} \\ p < 1-\omega : & \langle \rho_R^p \rangle \sim \xi^{-p\frac{\omega}{1-\omega}} \end{cases}$

14)

Valageas, 1999, A&A, 347, ~~757~~ 757

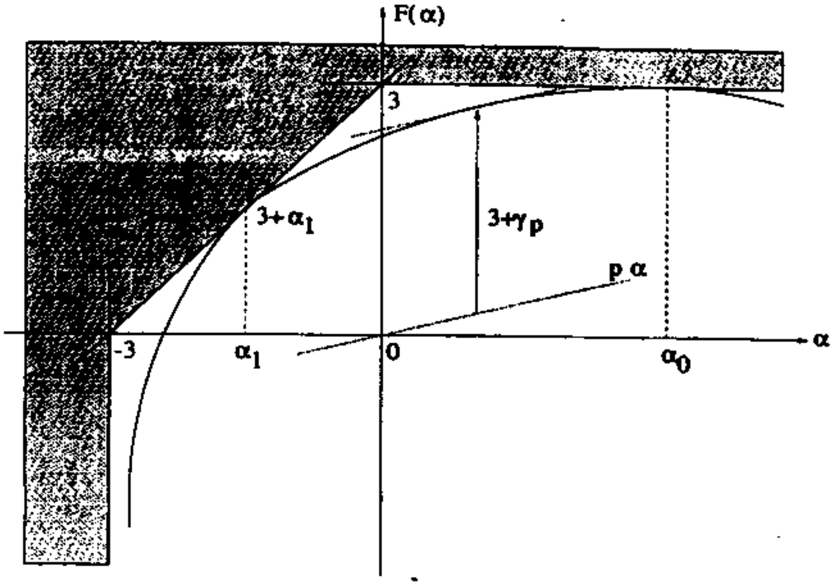



Figure 1: Geometrical construction of the scaling exponents $\gamma_p$ from the fractal dimensions $F(\alpha)$.

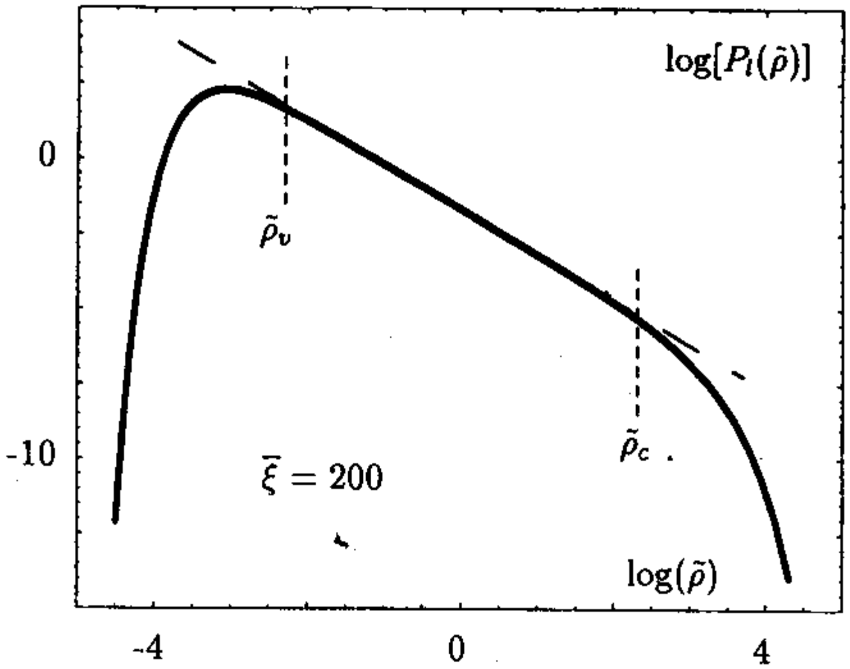



Figure 2: Probability $P_l(\tilde{\rho})$ for finding an overdensity $\tilde{\rho}$ in a cell within which the average correlation function is $\overline{\xi} = 200$ in the case $\omega_l = 1/2$, $\omega_{s,l} = -3/2$ and $x_{s,l} = 10$. The density distribution is a power-law with a cutoff at small ($\tilde{\rho}_v \sim \overline{\xi}^{\,-\omega_l/(1-\omega_l)}$) and large ($\tilde{\rho}_c \sim \overline{\xi}$) densities. Both $\tilde{\rho}_v$ and $\tilde{\rho}_c$ are scale-dependent: for large $\overline{\xi}$, $\tilde{\rho}_v$ goes to 0 while $\tilde{\rho}_c$ goes to infinity.

Dans le cas de l'ansatz du stable-clustering, les paramètres $S_p$ sont indépendants de l'échelle et du temps dans le régime linéaire. Donc 1 mesure de $\varphi(y)$ ou $P(\rho_R)$ en un point $(R,t)$ suffit. En pratique, pour un spectre de puissance qui n'est pas une loi de puissance, on écrit $\underline{\varphi(y;R,t) = \varphi(y;n)}$ où $n$ est l'indice du spectre linéaire $P_L(k)$ à l'échelle $x_L$ correspond à $x$. Donc $\varphi(y)$ est indépendant du temps à $R$ fixé, mais dépend de $R$.

<u>Noter:</u> A partir de la positivité de $\rho_R$ et $P(\rho_R)$ ~~et~~ on peut obtenir plusieurs résultats exacts sur les moments et les cumulants $\langle\rho_R^p\rangle$, $\langle\rho_R^p\rangle_c$.

Ainsi, Cauchy-Schwarz : $\langle \rho_R^p\rangle^2 = \langle \rho_R^{\frac{p+1}{2}} \rho_R^{\frac{p-1}{2}}\rangle^2 \leq \langle\rho_R^{p+1}\rangle \langle\rho_R^{p-1}\rangle$

$p\in\mathbb{R}$ : $\dfrac{\langle\rho_R^{p+1}\rangle}{\langle\rho_R^p\rangle} \geq \dfrac{\langle\rho_R^p\rangle}{\langle\rho_R^{p-1}\rangle}$ , or $\langle\rho_R\rangle = 1$ donc :

$p\in\mathbb{N}$ : $\dfrac{\langle\rho_R^{p+1}\rangle}{\langle\rho_R^p\rangle} \geq \langle\rho_R^2\rangle$ soit $\underline{\langle\rho_R^p\rangle \geq \langle\rho_R^2\rangle^{p-1}}$

A petite échelle : $R\to 0$, $\bar\xi\to\infty$ : $\dfrac{\langle\rho_R^p\rangle}{\bar\xi_p} \to 1$, $\cancel{\bar\xi_p \geq \bar\xi^{p-1}}$

si on a un comportement en puissance : $\langle\rho_R^p\rangle \sim R^{-\gamma_p}$, $\underline{\bar\xi_p \sim R^{-\gamma_p}}$

alors : $\underline{\gamma_p \geq (p-1)\gamma_2}$ , $\underline{S_p = \dfrac{\bar\xi_p}{\bar\xi_2^{p-1}} \sim R^{-\xi_p}}$ avec : $\underline{\xi_p = \gamma_p - (p-1)\gamma_2 \geq 0}$

Donc les coefficients $S_p$ sont constants ou augmentent avec $\bar\xi$.

## III 3°) Modèles en arbres

On décrit le champ de densité par : $\xi_p(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p) = \sum_\alpha Q_p^\alpha \sum_{t_\alpha} \prod_{p-1} \xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)$

- modèle minimal : $Q_p^\alpha = \prod_{\text{vertex}} \nu_{q_i}$ , $\nu_1 = 1$.

- modèle plus général : $Q_p^\alpha(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p) = \prod_{\text{vertex}} \nu_{q_i}(\vec{x}_{i_1}-\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_{i_{q_i}}-\vec{x}_i)$

$\nu_q$ fonction homogène des liens $\vec{x}_{ij}-\vec{x}_i$ sortant du point $\vec{x}_i$, de vertex $\nu_{q_i}$.
→ dépend des angles et des rapports de longueur.

Dans le cas du modèle d'arbres minimal, on définit la fonction génératrice :

$$\zeta(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \nu_p z^p \quad , \quad \varphi(y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p!} S_p y^p \qquad S_p = \frac{\langle \rho^p \rangle_c}{\langle \rho^2 \rangle_c^{p-1}} \;,\; S_1 = S_2 = 1.$$

$\nu_0 = \nu_1 = 1$.

Alors on obtient :

$$\begin{cases} \varphi(y) = y \int_V \frac{d\vec{x}}{V} \left[ \zeta(z(\vec{x})) - \frac{z(\vec{x})\,\zeta'(z(\vec{x}))}{2} \right] \\ z(\vec{x}) = -y \int_V \frac{d\vec{x}'}{V} \frac{\xi(\vec{x},\vec{x}')}{\bar{\xi}} \zeta'(z(\vec{x}')) \end{cases}$$

$$\zeta(z) = 1 - z + \nu_2 \frac{z^2}{2} + \dots \quad , \quad \varphi(y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} S_3 + \dots$$

Si on fait une approximation de champ moyen on obtient :

$$\begin{cases} \varphi(y) = y\left[\zeta(z) - \frac{z\,\zeta'(z)}{2}\right] \\ z = -y\,\zeta'(z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(y) = y\,\zeta(z) + \frac{z^2}{2} \\ z = -y\,\zeta'(z) \end{cases}$$

- Modèle stellaire : $\xi_p(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p) = \frac{\tilde{S}_p}{p} \sum_{i=1}^{p} \prod_{j\neq i} \xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)$

$$\langle \delta(\vec{k}_1)\dots\delta(\vec{k}_p)\rangle_c = \frac{\tilde{S}_p}{p}\, \delta_D(\vec{k}_1+\dots+\vec{k}_p) \sum_{i=1}^{p} \prod_{j\neq i} P(k_j)$$

* Autres modèles :

III 4°) . EPT : On garde la forme obtenue en théorie des perturbations mais on considère $n$ comme un paramètre libre $n_{eff}[\sigma(R)]$ à l'échelle Eulérienne $R$.

Donc :
$$\underline{z(\xi) = -\frac{3}{2}\,\xi^{\frac{n_{eff}+3}{6}} + \frac{3}{2}\,\xi^{\frac{n_{eff}-1}{6}}}$$
$\sigma \to 0$ : $n_{eff} \to n$.

$\sigma \to \infty$ : $n_{eff} \to \frac{3(n-1)}{3+n}$.

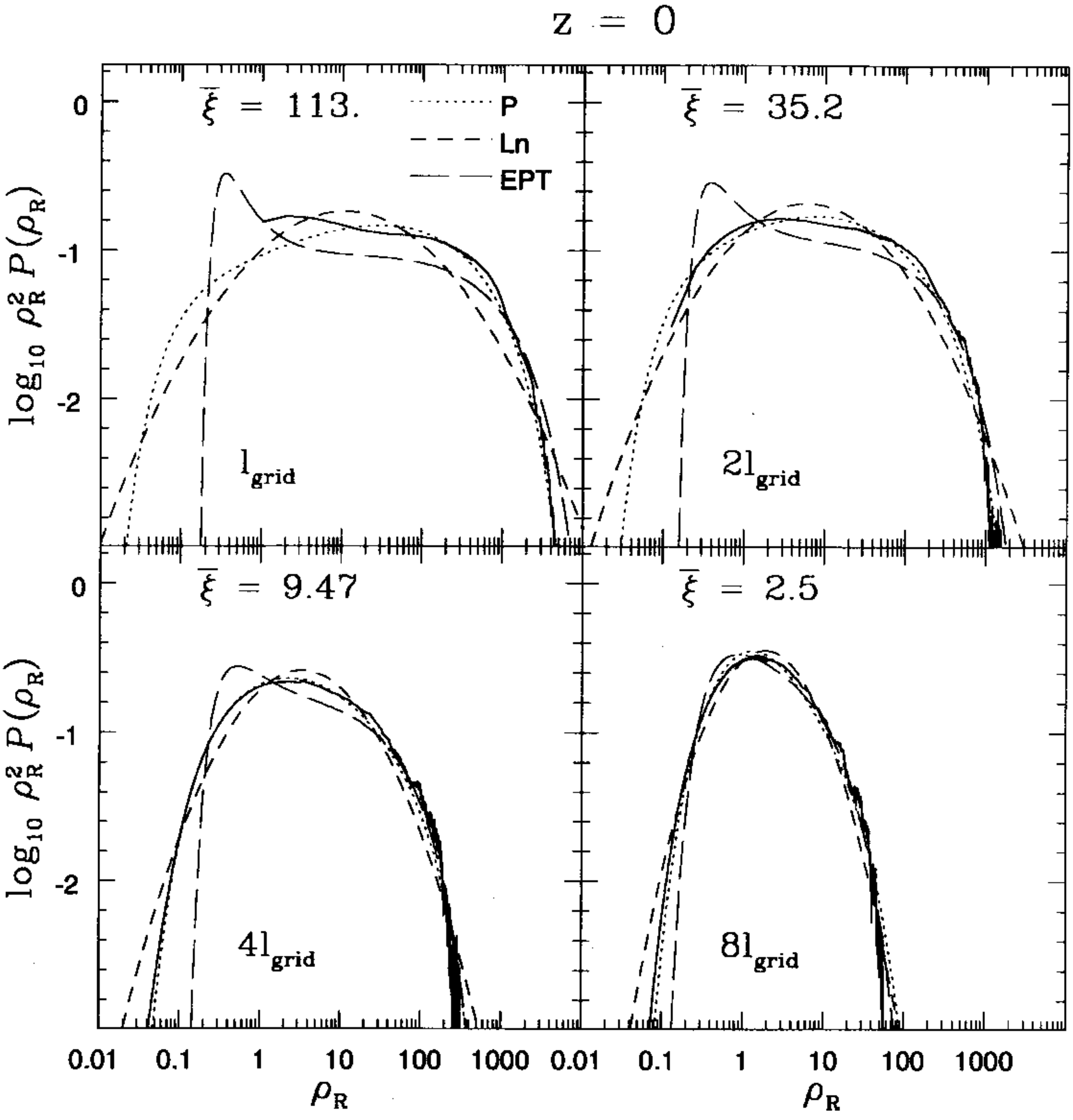
Noter : si $S_3$ est fixe (par ex. stable-clustering) alors $z(\xi)$ est fixe. Ce n'est pas le cas avec notre modèle où la partie concernant les sous-densités rares continue à évoluer.

En fait, le stable-clustering qui donne $\varphi(y) \sim y^{1-\omega}$ en $y \to +\infty$ et $\rho_v \sim \xi^{-\frac{\omega}{1-\omega}}$ ne s'applique pas en $y > y_v$ avec : $y_v = \rho_v^{-\frac{1}{\omega}} = \xi^{\frac{1}{1-\omega}} \to \infty$ en $\xi \to \infty$.
Donc ce régime disparaît en fait dans la limite $\xi \to \infty$.
Cela signifie aussi que le cutoff de $P(\rho_R)$ dans les régions sous-denses est donné par les détails des paramètres $S_p$ et ne peut pas être obtenu par le stable-clustering.

III 5°) . Lognormale : On peut aussi approximer $P(\rho_R)$ par une loi log-normale :
$$\underline{P(\rho_R) = \frac{1}{\rho_R\sqrt{2\pi\ln(1+\xi)}}\, e^{-\frac{\ln^2(\rho_R\sqrt{1+\xi})}{2\ln(1+\xi)}}} \qquad \underline{S_3 = 3+\xi}\,.$$
cette prédiction pour $S_3$ est en bon accord avec le régime quasi-linéaire pour $n \simeq -1$.

18

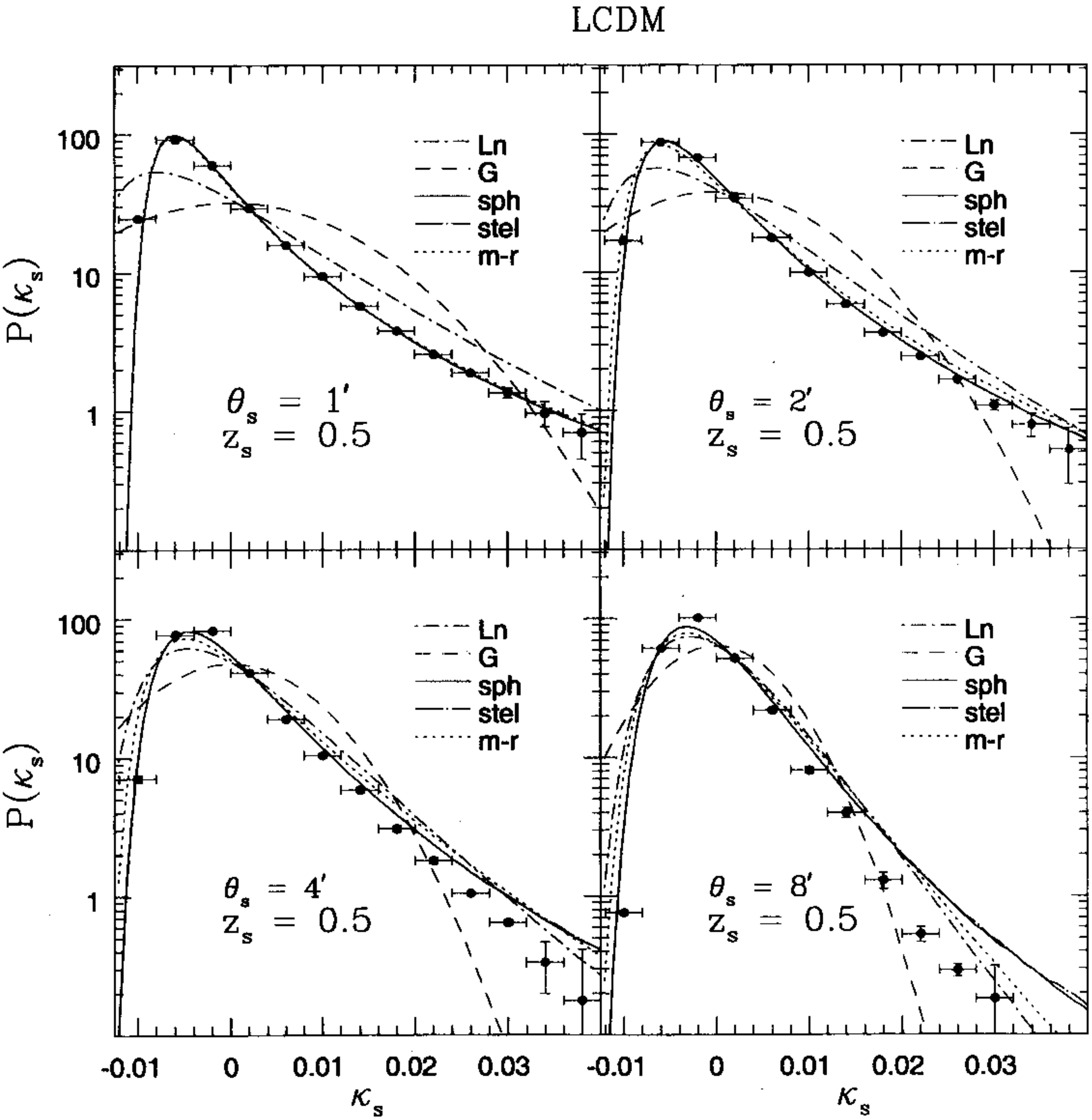
Valageas, Munshi, 2004, MNRAS, 354, 116



19

Weak lensing,

Barber, Munshi, Valageas, 2004, MNRAS, 347, 667



## III(c) HEPTH

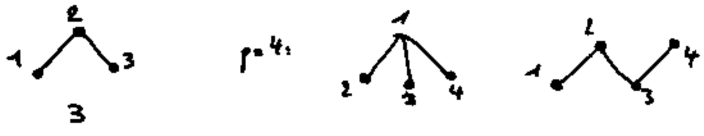
L'ansatz du stable clustering ne fournit pas la valeur des coefficients $S_p$. Un modèle pour cela est fournit par HEPTH.

Dans le cadre des modèles hiérarchiques on écrit :

$$\xi_p(\vec x_1,\dots,\vec x_p) = \langle \delta(\vec x_1)\dots\delta(\vec x_p)\rangle_c \quad , \quad \underline{\xi_p(\vec x_1,\dots,\vec x_p) = \sum_{(\alpha)} Q_p^{(\alpha)} \sum_{t_\alpha} \prod_{p-1} \xi_2(\vec x_i-\vec x_j)}$$

ce qui donne. $S_p(R,t) = \frac{\bar\xi_p}{\bar\xi^{p-1}}$ indépendant de $(R,t)$ si $Q_p^{(\alpha)}$ fixés, bien invariant par translation.

Il y a $p^{p-2}$ arbres étiquetés.




si $Q_p^{(\alpha)} = Q_p$, modèle dégénéré, alors $S_p = p^{p-2}\,Q_p$.

En Fourier on écrit : $\langle\delta(\vec k_1)\dots\delta(\vec k_p)\rangle_c = \delta_D(\vec k_1+\dots+\vec k_p)\; B_p(\vec k_1,\dots,\vec k_p)$

on définit : $Q_p(\vec k_1,\dots,\vec k_p) = \dfrac{B_p}{\sum_{(\alpha)}\sum_{t_\alpha}\prod_{p-1} P(k_{AB})}$ , $Q_3 = \dfrac{B_3}{P_1P_2 + 2\,\text{perm.}}$ , $Q_4 = \dfrac{B_4}{P_1P_2P_3 + 3\,\text{perm.} + P_1P_{12}P_4 + 11\,\text{perm}}$

$$S_p(R) = \frac{\langle \delta_R^p\rangle_c}{\langle\delta_R^2\rangle_c^{p-1}} = \frac{\int d\vec k_1\dots d\vec k_p\; B_p(\vec k_1,\dots,\vec k_p)\,\delta_D(\vec k_1+\dots+\vec k_p)\,W_1\dots W_p}{\left[\int d\vec k\; P(k)\,W(kR)^2\right]^{p-1}} .$$

$P_i = P(k_i)$ , $P_{ij} = P(|\vec k_i+\vec k_j|)$

- ~~pertur~~ théorie des perturbations à l'ordre des arbres (TL), ordre le plus bas :

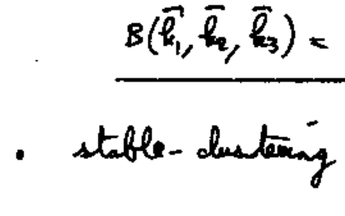
$$\underline{B(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3) = P(k_1)\,P(k_2)\left[\frac{10}{7} + \frac{\vec k_1\cdot\vec k_2}{k_1k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right) + \frac{4}{7}\left(\frac{\vec k_1\cdot\vec k_2}{k_1k_2}\right)^2\right] + 2\,\text{perm.}}$$

- stable-clustering :

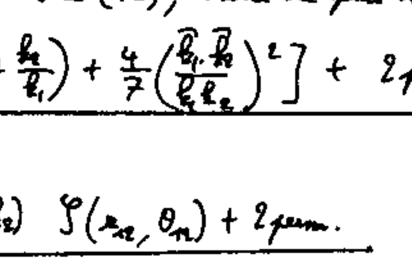
$$\underline{B(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3) = P(k_1)\,P(k_2)\;\zeta(x_{12},\theta_{12}) + 2\,\text{perm.}} \qquad \left\}\begin{array}{l} x_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j} \\ \theta_{ij} = (\widehat{\vec k_i,\vec k_j}) \end{array}\right.$$

indépendant de l'échelle mais pas des angles.

Les simulations numériques montrent.




$k_1 = k_2 = k_3$
triangle équilatéral



Dans le régime linéaire $Q_p$ sature et devient quasiment indépendant de la configuration : angles $\theta_{ij}$ et rapports $r_{ij}$. De plus, la valeur à saturation est très proche de la valeur prédite par la théorie des perturbations (TL) à $\theta = 0, \pi$ : configuration colinéaire. Par ailleurs, on note que $Q_p^{TL}(\theta, \pi)$ est effectivement indépendant de $\frac{k_1}{k_2}$ si $n = 0$ ou $-2$, et très faiblement dépendant sinon. Donc on choisit dans le régime non-linéaire : $\underline{Q_p^{NL} = Q_p^{TL}(\theta = 0, \pi)}$ et $\underline{S_p^{NL} = p^{p-2}\, Q_p^{NL}}$.

On choisit la configuration colinéaire : $\vec{k}_1 = \dots = \vec{k}_{p-1} = \vec{q}$, $\vec{k}_p = -(p-1)\,\vec{q}$.

Cela donne pour $p = 3$ :

$$Q_3^{NL} = \frac{q^n q^n \left[\frac{10}{7} + 2 + \frac{4}{7}\right] + 2\, q^n (2q)^n \left[\frac{10}{7} - \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{7}\right]}{q^n q^n + 2\, q^n (2q)^n} = \frac{4 + 2^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + 2^{n+1}} = \frac{4 - 2^n}{1 + 2^{n+1}}$$

$$\underline{Q_3^{NL} = \frac{4 - 2^n}{1 + 2^{n+1}}}\,, \qquad \underline{S_3^{NL} = 3\, \frac{4 - 2^n}{1 + 2^{n+1}}}\,.$$

Pour un spectre CDM, on prend $n(R)$ donné par : $n + 3 = -\left.\frac{d\ln \sigma_L^2}{d\ln R}\right|_R$ .

Noter : on calcule $n$ à l'échelle Eulérienne $R$, pas à l'échelle Lagrangienne $R_L$ qui donne de moins bons résultats !.

On peut également interpoler $B_3$ du régime linéaire au non-linéaire :

$$B(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = P(k_1)\, P(k_2) \left[\frac{10}{7}\, a(k_1)\, a(k_2) + \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{k_1 k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right) b(k_1)\, b(k_2) + \frac{4}{7} \left(\frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{k_1 k_2}\right)^2 c(k_1)\, c(k_2)\right] + 3 \text{ perm.}$$

TL : $a = b = c = 1$, NL : $a = \frac{7}{10}\, Q_3^{NL}$, $b = c = 0$.

$$a(k) = \frac{1 + \sqrt{0{,}7\, Q_3^{NL}}\, (kR_0)^{n+6}}{1 + (kR_0)^{n+6}}\,, \quad b(k) = \frac{1 + 0{,}2(n+3)\, (kR_0)^{n+3}}{1 + (kR_0)^{n+3{,}5}}\,, \quad c(k) = \frac{1 + \frac{4{,}5}{1{,}5 + (n+3)^4}\, (kR_0)^{n+3}}{1 + (kR_0)^{n+3{,}5}}\,.$$

On peut étendre ce calcul à tous les ordres $p \geq 3$.

# V 1°) Collapse sphérique

Dans le cas d'une géométrie sphérique on peut suivre analytiquement l'évolution d'une sur-densité ou d'une sous-densité. L'équation du mouvement s'écrit :

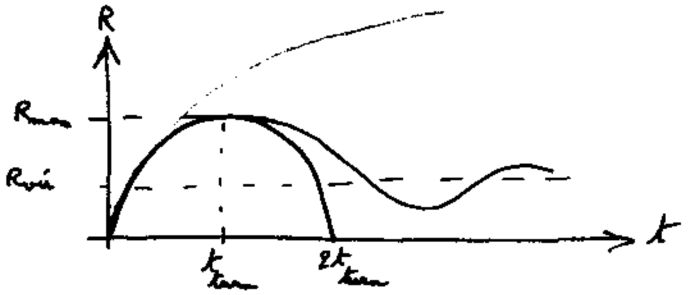
$$\ddot{R} = -\mathcal{G}\frac{M}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}R$$

Noter : éq. de Friedmann : $\ddot{a} = -\frac{4\pi\mathcal{G}}{3}a\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}a$.

Donc la région sphérique se comporte comme un univers de densité différente.

Dans le cas d'un univers Einstein - de Sitter on a :

$\ddot{R} = -\mathcal{G}\frac{M}{R^2}$, solution : $\begin{cases} R = A(1-\cos\theta) \\ t = B(\theta - \sin\theta) \end{cases}$ $\quad A^3 = \mathcal{G}MB^2$




Le rayon R est maximum en :

$\theta = \pi$, $\quad R = R_{max} = 2A$

$t = t_{turn} = \pi B$

Le collapse est total en : $\theta = 2\pi$, $R = 0$, $t = 2t_{turn} = 2\pi B$.

La dynamique d'une région non-perturbée de même masse est :

$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi\mathcal{G}t^2}$, $\quad R_b^3 = \frac{9}{2}\mathcal{G}Mt^2$, donc le contraste de densité $\delta$ est :

$$\begin{cases} 1+\delta = \left(\frac{R_b}{R}\right)^3 = \frac{9}{2}\frac{(\theta-\sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} \\ \delta_L = \frac{3}{20}\left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3} = \frac{3}{20}\left[6(\theta-\sin\theta)\right]^{2/3} \end{cases}$$

, le contraste de densité linéaire est :

$$\begin{cases} \delta = \mathcal{F}(\delta_L) \\ R_L^3 = (1+\delta)R^3 \end{cases}$$

Au moment du collapse on a : $\theta = 2\pi$, $\quad \underline{\delta_{Lc} = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \simeq 1{,}69}$.

La conservation de l'énergie et le théorème du viriel donnent à l'équilibre :

$$R_{vir} = \frac{R_{max}}{2} = A.$$

23) énergie : $E = T + V$, viriel : $2T + V = 0$.

Au turn-around (densité homogène) : $T = 0$, $V = -\frac{3}{10}\frac{\mathcal{G}M^2}{R_{max}}$

$$V = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{1}{2}\int_0^R dr\, 4\pi r^2 \rho\left(-\frac{\mathcal{G}M(<r)}{r}\right) = -2\pi\mathcal{G}\rho^2\frac{4\pi}{3}\int_0^R dr\, r^4 = -\frac{2\pi}{5}\frac{4\pi}{3}\mathcal{G}\rho^2 R^5$$

$$V = -\frac{3}{10}\frac{\mathcal{G}M^2}{R}$$

A la virialisation : $2T+V=0$, $T = -\frac{V}{2}$, $E = T+V = \frac{V}{2} = E_{turn} = V_{turn}$

$\frac{V_{vir}}{2} = V_{turn}$, $V \propto \frac{1}{R}$ donc : $R_{vir} = \frac{R_{turn}}{2} = A$.

Donc on a le contraste de densité non-linéaire : $\underline{1+\delta_{vir} = \left(\frac{R_L}{R_{vir}}\right)^3 = 18\pi^2 \simeq 178}$.

En effet, au turn-around on a :

$$1+\delta = \frac{9}{2}\frac{\pi^2}{2^3} = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5{,}55 \quad , \quad \text{en } 2\,t_{turn} :$$

$$(1+\delta)_{vir} = (1+\delta)_{turn} \times 2^3 \times 2^2 = 18\pi^2 .$$

Dans le cas d'une région sous-dense on a : $\begin{cases} R = A(\operatorname{ch}\eta - 1) \\ t = B(\operatorname{sh}\eta - 1) \end{cases}$ $\quad A^3 = \mathcal{G}MB^2$.

$$1+\delta = \frac{9}{2}\frac{(\operatorname{sh}\eta-1)^2}{(\operatorname{ch}\eta-1)^3} \quad , \quad \delta_L = -\frac{3}{20}\left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3} .$$

Dans le cas d'un univers ouvert $\Lambda = 0$, dans la limite $\Omega_m \to 0$, on obtient pour $\delta = \mathcal{F}(\delta_L)$ :

$$\underline{\delta(\delta_L) = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\delta_L\right)^{3/2}} - 1 .}$$

C'est une très bonne approximation pour tout $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ et le comportement $1+\mathcal{F}(\delta_L) \propto (-\delta_L)^{-3/2}$ en $\delta_L \to -\infty$ est exact.

## V 2°) Press-Schechter

On note $n(m)dm$ le nombre de halos de masse $m - m+dm$ par unité de volume.
La fraction de masse contenue dans ces halos est $\mu(m)\,dm$ avec :

$$\underline{n(m)\,dm = \frac{\bar{\rho}}{m}\,\mu(m)\,dm}\ .$$

On identifie :

- la fraction de masse qui se trouve au-dessus du seuil $\delta_c$ dans le champ de densité linéaire lissé à l'échelle $m$ :

$$F_1(>\delta_c, m) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{d\delta_c}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\delta_c^2/2\sigma^2} = \int_{\nu_c}^{\infty} \frac{d\nu}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\nu^2/2} \qquad \nu_c = \frac{\delta_c}{\sigma(m)}$$

- la fraction de masse dans des objets plus massifs que $m$ :

$$F_2(>m) = \int_m^{\infty} dm\ \mu(m)$$

On dérive par rapport à $m$ : $\quad \mu(m) = \frac{d\nu}{dm}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}}$, $\quad n(m) = \frac{\bar{\rho}}{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d\nu}{dm}\, e^{-\nu^2/2}$

On multiplie par un <u>facteur 2</u> pour compter toute la masse :

$$\underline{\mu(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d\nu}{dm}\, e^{-\nu^2/2}} \qquad \text{et} \qquad \underline{n(m) = \frac{\bar{\rho}}{m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d\nu}{dm}\, e^{-\nu^2/2}}\ .$$

On fait le changement de variable : $\nu' = \frac{\delta_c(z)^2}{\sigma(m)^2}$, $\nu' = \nu^2$, $\frac{d\nu'}{\nu'} = 2\frac{d\nu}{\nu}$

$$\mu(m)\,dm = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d\nu}{\nu}\,\nu\, e^{-\nu^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{d\nu'}{\nu'}\,\sqrt{\nu'}\, e^{-\nu'/2}$$

Si on écrit : $\quad n(m)\,dm = \frac{\bar{\rho}}{m}\,\nu f(\nu)\,\frac{d\nu}{\nu}\quad , \quad \underline{\nu = \frac{\delta_c^2}{\sigma(m)^2}}$

P.S : $\quad \underline{\nu f(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\, e^{-\nu/2}}$

Sheth & Tormen : $\quad \underline{\nu f(\nu) = A\left[1+(q\nu)^{-p}\right]\left(\frac{q\nu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-q\nu/2}} \qquad \begin{cases} A \simeq 0{,}32 \\ p = 0{,}3 \\ q \simeq 0{,}75 \end{cases} \qquad$ P.S. : $q = 1, p = 0$

→ fitte les simulations, peut s'interpréter comme le résultat du collapse ellipsoïdal.

## IV 3°) Biais des halos

La fonction de masse obtenue précédemment correspond à la densité moyenne. Cependant, le nombre moyen de halo dépend de l'environnement : on peut chercher à calculer le nbre de halos ayant collapsé à $z_1$ situés dans une vaste région $V_0$ à $z_0$ de densité moyenne $\delta_0$ : $N(m_1, z_1 | \delta_0, V_0, z_0)$

On écrit : $N(m_1, z_1 | \delta_0, V_0, z_0) = n(m_1, z_1 | \delta_{L0}, V_{L0}) V_{L0}$ $\quad \begin{cases} V_{L0} = V_0 (1+\delta_0) \\ \delta_0 = \mathcal{F}(\delta_{L0}, z_0) \text{ dynamique sphérique} \end{cases}$ $\delta_{L0}$ à $z=0$

On a déjà calculé $n(m_1, z_1) = n(m_1, z_1 | \delta_{L0} = 0, V_{L0} = \infty)$.

Comme pour Press-Schechter, on calcule : ~~$P(>\delta_c)$ sachant~~ $\delta_{L0}$, $P(>\delta_c(z_1), m_1 | \delta_0, m_0)$
→ probabilité conditionnelle.

Calcul par les fonctions génératrices : $\psi(y) = \langle e^{-y\delta_{L1}} \rangle = \int [d\delta_L]\, e^{-y\delta_{L1} - \frac{1}{2}\delta_L \cdot \Delta_L^{-1} \cdot \delta_L}$

$$\psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta_{L1}\, P(\delta_{L1})\, e^{-y\delta_{L1}} , \qquad P(\delta_{L1}) = \int \frac{dy}{2\pi i} \psi(y)\, e^{y\delta_{L1}}$$

Contrainte $\delta_{L0}$ : $\quad \psi_0(y) = \int [d\delta_L]\, e^{-y\delta_{L1} - \frac{1}{2}\delta_L \cdot \Delta_L^{-1} \cdot \delta_L}\, \delta_D(\hat{\delta}_{L0} - \delta_{L0})$

$$\psi_0(y) = \int [d\delta_L] \int dt\, e^{-y\delta_{L1} + it(\hat{\delta}_{L0} - \delta_{L0}) - \frac{1}{2}\delta_L \cdot \Delta_L^{-1} \cdot \delta_L}$$

avec : $\delta_{L1} = \int_{V_{L1}} \frac{d\vec{x}}{V_{L1}} \delta_L(\vec{x}) = F_1 \cdot \delta_L \quad , \quad \hat{\delta}_{L0} = F_0 \cdot \delta_L$ $\qquad \begin{cases} F_1(\vec{x}) = \dfrac{\theta(x < R_{L1})}{V_{L1}} \\ F_0(\vec{x}) = \dfrac{\theta(x < R_0)}{V_{L0}} \end{cases}$

$$\psi_0(y) = \int dt \int [d\delta_L]\, e^{-it\delta_{L0} + (-yF_1 + itF_0)\cdot \delta_L - \frac{1}{2}\delta_L \cdot \Delta_L^{-1} \cdot \delta_L}$$

$$\psi_0(y) = \int dt\, e^{-it\delta_{L0} + \frac{1}{2}(-yF_1 + itF_0)\cdot \Delta_L \cdot (-yF_1 + itF_0)}$$

$$\psi_0(y) = \int dt\, e^{-it\delta_{L0} + \frac{y^2}{2} F_1 \cdot \Delta_L \cdot F_1 - \frac{t^2}{2} F_0 \cdot \Delta_L \cdot F_0 - ity\, F_1 \cdot \Delta_L \cdot F_0}$$

On note : $\sigma_0^2 = F_0 \cdot \Delta_L \cdot F_0$, $\quad \sigma_1^2 = F_1 \cdot \Delta_L \cdot F_1$, $\quad \sigma_{10}^2 = F_1 \cdot \Delta_L \cdot F_0$

$$\psi_0(y) = \int dt\, e^{-it\delta_{L0} + \frac{\sigma_1^2}{2} y^2 - \frac{t^2}{2}\sigma_0^2 - ity\,\sigma_{10}^2} = \int dt\, e^{-\frac{1}{2}\left[\sigma_0 t + i\left(\frac{y\sigma_{10}^2}{\sigma_0} + \frac{\delta_{L0}}{\sigma_0}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y\sigma_{10}^2 + \delta_{L0}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2}{2} y^2}$$

$$\psi_0(y) = e^{\frac{1}{2} y^2 \sigma_1^2 - \frac{1}{2} y^2 \frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_0^2} - y\frac{\sigma_{10}^2 \delta_{L0}}{\sigma_0^2}} \qquad \text{car } \psi_0(0) = 1 .$$

Donc : $P(\delta_{L_1}|\delta_{L_0}) = \int \frac{dy}{2\pi i}\, e^{y\delta_{L_1} + \frac{1}{2}y^2\sigma_1^2 - \frac{1}{2}y^2\frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_0^2} - y\frac{\sigma_{10}^2\delta_{L_0}}{\sigma_0^2}}$

$$P(\delta_{L_1}|\delta_{L_0}) = \int \frac{dy}{2\pi i}\, e^{y\left(\delta_{L_1} - \frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_0^2}\delta_{L_0}\right) + \frac{1}{2}y^2\left(\sigma_1^2 - \frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2 - \frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_0^2}\right)}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\delta_{L_1} - \delta_{L_0}\frac{\sigma_{10}^2}{\sigma_0^2}\right)^2 / \left(\sigma_1^2 - \frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_0^2}\right)}$$

Soit : $x^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$ , $c^2 = \frac{\sigma_{10}^4}{\sigma_0^2\sigma_1^2}$

$$P(\delta_{L_1}, \delta_{L_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-c^2)}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\delta_{L_1} - \delta_{L_0}\frac{c}{x}\right)^2}{\sigma_1^2(1-c^2)}}$$

$$F(>m) = \int_m^\infty dm\, p_0(m) = \int_{\nu_c}^\infty \frac{d\nu}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\nu^2} \qquad \nu = \frac{\delta_{L_1} - \delta_{L_0}\frac{c}{x}}{\sigma_1\sqrt{1-c^2}}$$

Donc on trouve la même formule en terme de $\nu'$ en faisant : $\nu' \to \nu_{10} = \frac{\left(\delta_c(z_1) - \delta_{L_0}\frac{c}{x}\right)^2}{\sigma_1^2(1-c^2)}$.

$$\sigma_0^2 = \int_{V_0} \frac{dx\, dx'}{V_{L_0}^2}\, \Delta_L(x', x) = \sigma^2(R_{L_0})\ , \quad \sigma_1^2 = \sigma^2(R_{L_1})\ , \quad \sigma_{10}^2 = \int_{V_0}\frac{dx_0}{V_{L_0}}\int_{V_1}\frac{dx_1}{V_{L_1}}\, \Delta_L(x_0, x_1)$$

En Fourier : $\sigma_0^2 = \int d\vec{k}\, P_L(k)\, W(kR_0)^2$ , $\sigma_1^2 = \int d\vec{k}\, P_L(k)\, W(kR_1)^2$

$\sigma_{10}^2 = \int d\vec{k}\, P(k)\, W(kR_0)\, W(kR_1)$ $\qquad W(0) = 1$.

top-hat réel : $W(kR) = 3\,\frac{\sin kR - kR\cos kR}{(kR)^3}$

top-hat en Fourier : $W(kR) = \theta(kR < 1)$

dans ce cas : $R_1 < R_0$ : $\sigma_{10}^2 = \sigma_0^2$ , $c^2 = x^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$ , $\nu_{10} = \frac{(\delta_c(z_1) - \delta_{L_0})^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$.

Donc : $n(m_1, z_1|\delta_{L_0} V_{L_0})\, dm_1 = \frac{\bar{\rho}}{m_1}\, \nu_{10}\, f(\nu_{10})\, \frac{d\nu_{10}}{\nu_{10}}$

La surabondance de halos dans la région $V_0$ est donc :

$$1 + \delta_h(m_1, z_1|\delta_0, V_0) = \frac{n(m_1, z_1|\delta_{L_0}, V_{L_0})\, V_{L_0}}{n(m_1, z_1)\, V_0} = (1+\delta_0)\, \frac{n(m_1, z_1|\delta_{L_0}, V_{L_0})}{n(m_1, z_1)}$$

On se place dans la limite de grande échelle où $\sigma_0 \ll 1$ et $\sigma_0 \ll \sigma_1$, $\delta_0 \simeq \delta_{L_0}$ et $|\delta_0| \ll 1$.

Alors, $\nu_{10} \simeq \frac{(\delta_c(z_1) - \delta_{L_0})^2}{\sigma_1^2}$ , $n(m_1, z_1|\delta_{L_0}, V_{L_0}) \simeq n(m_1, z_1) - \delta_{L_0}\frac{\partial n}{\partial \delta_{c_1}} + \dots$

$$1 + \delta_h \simeq (1+\delta_0)\left(1 - \delta_{L_0}\frac{\partial \ln n}{\partial \delta_{c_1}}\right) \simeq 1 + \delta_0 - \delta_{L_0}\frac{\partial \ln n}{\partial \delta_{c_1}}$$

On prend $z_0 = \cancel{z_0} = 0$.

On a obtenu (PS) : $n = \frac{\bar{\rho}}{m}\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\, e^{-\frac{\nu}{2}}\, \frac{d\ln\nu}{d\ln m}$ , $\nu = \frac{\delta_c^2}{\sigma^2}$ , $\frac{d\ln\nu}{d\ln m} = -2\,\frac{d\ln\sigma}{d\ln m}$

$$\frac{\partial \ln n}{\partial \delta_{c_1}} = \frac{\partial}{\partial \delta_{c_1}}\left[\frac{1}{2}\ln\nu - \frac{\nu}{2}\right] = \frac{\partial\nu}{\partial\delta_{c_1}}\left(\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\nu}{\partial\delta_{c_1}} = \frac{2\delta_{c_1}}{\sigma^2} = \frac{2\nu}{\delta_{c_1}}$$

$$\frac{\partial \ln n}{\partial \delta_{c_1}} = \frac{2\nu}{\delta_{c_1}}\left(\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1-\nu}{\delta_{c_1}}$$

Donc : $1+\delta_h = 1+\delta_0 - \delta_0\,\frac{1-\nu}{\delta_{c_1}} = 1+\delta_0\left(1+\frac{\nu-1}{\delta_{c_1}}\right)$

$$\underline{\delta_h(m|\delta_0) \simeq b(m)\,\delta_0} \qquad \text{avec} \qquad \underline{b(m) = 1+\frac{\nu-1}{\delta_c(z_1)}}$$

On trouve que les halos massifs, $\nu \gg 1$, sont plus corrélés que la matière noire, alors que les halos de petite masse sont moins corrélés.

Les halos qui se sont virialisés il y a longtemps ne sont pas biaisés ($\delta_{c_1} \gg 1$).

Si on utilise la fonction de masse de S.T. en faisant encore $\nu \to \nu_{10}$ on a :

$$\underline{b(m) = 1+\frac{q\nu-1}{\delta_c(z_1)} + \frac{2p}{\delta_c(z_1)\left[1+(q\nu)^p\right]}}$$

Noter : par construction $b(m)$ vérifie : $\underline{\int_0^\infty dm\, \frac{m}{\bar{\rho}}\, n(m)\, b(m) = 1}$ .

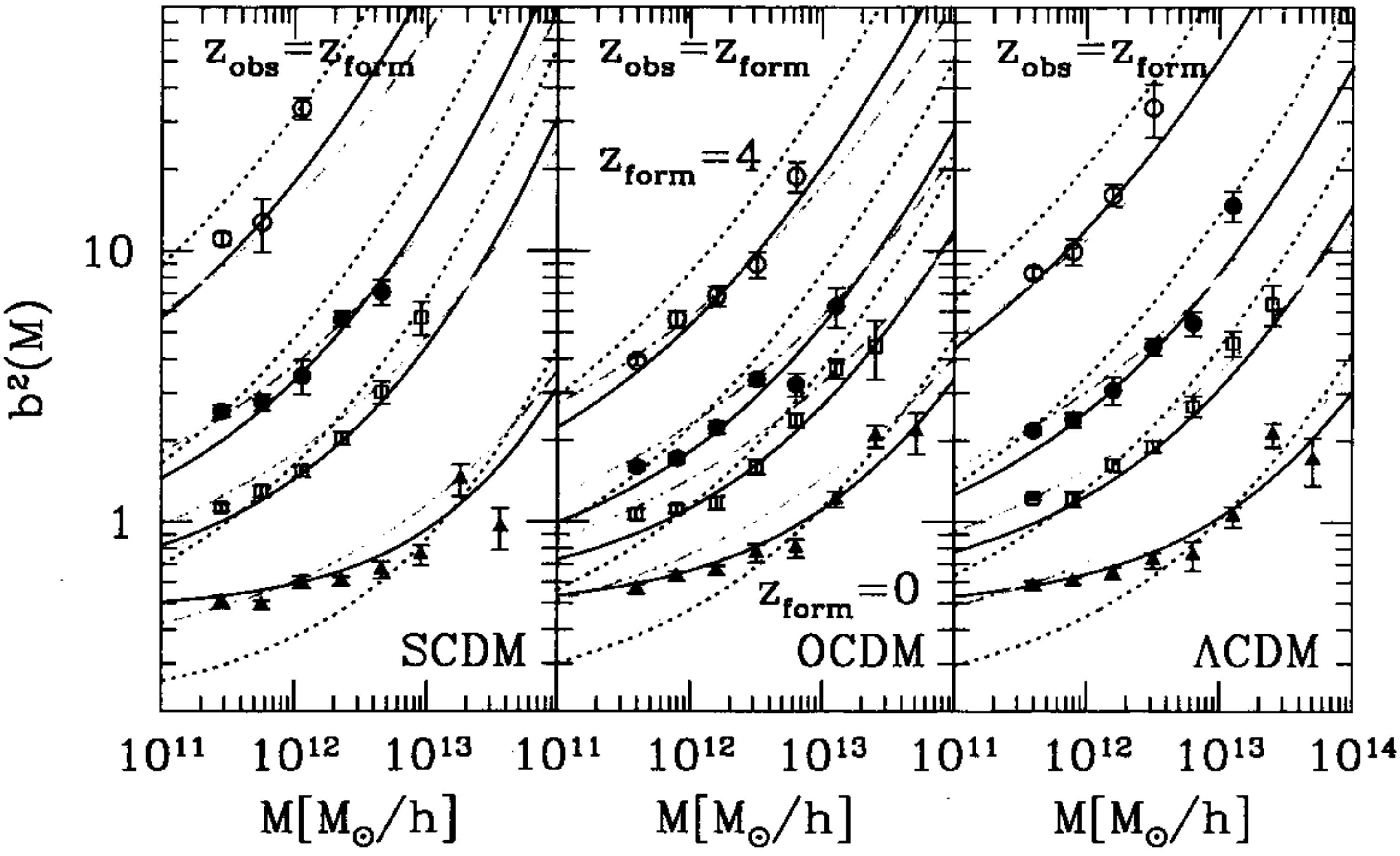
En effet : dans de grandes cellules on a par construction :

$$n(m|\delta) \simeq \left[1+b(m)\,\delta\right] n(m)$$

$$\int dm\; n(m|\delta)\,\frac{m}{\bar{\rho}} = 1+\delta = \int dm\,\left[1+b(m)\delta\right] n(m)\,\frac{m}{\bar{\rho}} = 1+\delta\int dm\,\frac{m}{\bar{\rho}}\,n(m)\,b(m) .$$

Sheth, Tormen, 1999, MNRAS, 308, 119

biais des halos



IV 4)

## Profils de densité

Les simulations numériques suggèrent des profils de la forme :

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^2} \quad \text{(NFW)} \qquad \text{ou} \qquad \rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1,5}\left[1+\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1,5}\right]} \quad \text{M99}$$

$$m = \int_0^{R_{vir}} dr\, 4\pi r^2 \rho(r) \qquad m = 4\pi \rho_s r_s^3 \left[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c}\right] \quad \text{NFW}$$

$$m = 4\pi \rho_s r_s^3 \, \frac{2\ln(1+c^{1,5})}{3} \quad \text{M99}$$

où on a définit la concentration : $c = \frac{R_{vir}}{r_s}$.

NFW : $\bar{c}(m) \simeq 9\left(\frac{m}{m_*}\right)^{-0,13}$

M99 : $\bar{c}(m) \simeq 6\left(\frac{m}{m_*}\right)^{-0,15}$ $\qquad \left(\sigma(m_*) = \delta_c\right)$.

La densité de coeur $\rho_s$ est proportionnelle à $\bar{\rho}(z_f)$ où $z_f$ est le redshift de formation du halo. Pour $m \gg m_*$ : $z_f \simeq 0$, $\rho_s \simeq (1+\Delta_{vir})\bar{\rho}$ et $r_s \simeq R_{vir}$, $c \simeq 1$,
pour $m \ll m_*$ : $(1+z_f) \sim \sigma(m) \sim \left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{6}}$, $\rho_s \simeq (1+\Delta_{vir})\bar{\rho}\left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{2}}$

$\underline{m \gg m_*}$ : $z_f \simeq 0$, $\rho_s \simeq (1+\Delta_{vir})\bar{\rho}$, $r_s \simeq R_{vir}$, $\underline{c \simeq 1}$

$\underline{m \ll m_*}$ : $(1+z_f) \sim \sigma(m) \sim \left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{6}}$, $\rho_s \simeq (1+\Delta_{vir})\bar{\rho}\left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{2}}$

$$m \sim \rho_s r_s^3 \sim (1+\Delta_{vir})\bar{\rho}\left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{2}} r_s^3 \sim (1+\Delta_{vir})\bar{\rho}\, R_{vir}^3, \qquad R_{vir}^3 \sim r_s^3 \left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{c \sim \left(\frac{m}{m_*}\right)^{-\frac{n+3}{6}}}$$

5°)

## Fonction de corrélation

On décrit le champ de matière comme une collection de halos :

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i \rho(\vec{x}-\vec{x}_i|m_i) = \sum_i \int dm\, d\vec{x}'\; \delta(m-m_i)\, \delta_D(\vec{x}'-\vec{x}_i)\; m\, u(\vec{x}-\vec{x}'|m)$$

$u$ : profil normalisé : $u(\vec{x}-\vec{x}_i|m) = \frac{1}{m}\rho(\vec{x}-\vec{x}_i|m)$, $\int d\vec{x}\; u(\vec{x}-\vec{x}_i|m) = 1$.

La densité de halos est : $\langle \sum_i \delta_D(m-m_i)\, \delta_D(\vec{x}'-\vec{x}_i)\rangle = n(m)$

$$\bar{\rho} = \langle \rho(\vec{x})\rangle = \int dm\, d\vec{x}'\; n(m)\, m\, u(\vec{x}-\vec{x}'|m) = \int dm\; n(m)\, m$$

De même, la fonction de corrélation est : $\underline{\xi(\vec{x}-\vec{x}') = \xi^{1h}(\vec{x}-\vec{x}') + \xi^{2h}(\vec{x}-\vec{x}')}$

$\xi^{1h}$ : les 2 pts sont dans le même halo

$\xi^{2h}$ : les 2 pts sont dans des halos différents

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\xi^{1h}(\vec{x}-\vec{x}') = \int dm\, \frac{m^2 n(m)}{\bar{\rho}^2} \int d\vec{x}_1\; u(\vec{x}-\vec{x}_1|m)\, u(\vec{x}'-\vec{x}_1|m)} \\ \underline{\xi^{2h}(\vec{x}-\vec{x}') = \int dm_1\, \frac{m_1 n(m_1)}{\bar{\rho}} \int dm_2\, \frac{m_2 n(m_2)}{\bar{\rho}} \int d\vec{x}_1\; u(\vec{x}-\vec{x}_1|m_1) \int d\vec{x}_2\; u(\vec{x}'-\vec{x}_2|m_2)\; \xi_{hh}(\vec{x}_1-\vec{x}_2|m_1,m_2)} \end{array}\right.$$

$\xi_{hh}$ : corrélation de 2 halos.

~~$\vec{x}_1-\vec{x}_2 = \vec{x}-\vec{x}' + \vec{x}_1-\vec{x} + \vec{x}'-\vec{x}_2 \simeq \vec{x}-\vec{x}'$ pour des échelles $\gg$ taille des halos.~~

On écrit :

$$\underline{\xi_{hh}(x|m_1,m_2) \simeq b(m_1)\, b(m_2)\, \xi_L(x)}$$

Noter : à grande échelle $\vec{x}_1-\vec{x}_2 \simeq \vec{x}-\vec{x}'$, $\xi_{hh}(\vec{x}_1-\vec{x}_2|m_1,m_2) \simeq b(m_1)\, b(m_2)\, \xi_L(\vec{x}-\vec{x}')$

or : $\int dm\, \frac{m}{\bar{\rho}}\, n(m)\, b(m) = 1$, donc : $\xi^{2h}(\vec{x}-\vec{x}') \simeq \xi_L(\vec{x}-\vec{x}')$ à grande échelle

On utilise $\xi_L(x)$ au lieu de $\xi(x)$ car aux échelles intermédiaires on surestime $\xi_{hh}$ car on n'a pas tenu compte des effets d'exclusion. En fait, la comparaison avec les simulations montre que cette approximation est suffisante. De plus, aux petites échelles $\xi$ est dominée par $\xi^{1h}$.

## IV (6°) Spectre de puissance

On a : $P(\vec k) = \int d\vec x \; e^{-i\vec k.\vec x}\, \xi(x)$ , $\quad u(\vec k) = \int d\vec x \; e^{-i\vec k.\vec x}\, \rho(\vec x)$

On a à nouveau 2 contributions : $\underline{P(k) = P^{1h}(k) + P^{2h}(k)}$

$$P^{1h}(k) = \int dm \left(\frac{m}{\bar\rho}\right)^2 n(m) \int d\vec x\, e^{-i\vec k.\vec x} \int d\vec x_1 \int \frac{d\vec k_1\, d\vec k_2}{(2\pi)^6}\, e^{i\vec k_1.(\vec x-\vec x_1)}\, e^{-i\vec k_2.\vec x_1}\, u(\vec k_1|m)\, u(\vec k_2|m) \qquad (\text{où } \vec x' = c$$

$\int \frac{d\vec x_1}{(2\pi)^3} \to \delta_D(\vec k_1+\vec k_2)$ , $\int \frac{d\vec x}{(2\pi)^3} \to \delta_D(\vec k_1-\vec k)$

$$\underline{P^{1h}(k) = \int dm \left(\frac{m}{\bar\rho}\right)^2 n(m)\; u(\vec k|m)\; u(-\vec k|m) = \int dm \left(\frac{m}{\bar\rho}\right)^2 n(m)\, |u(k|m)|^2}$$

$$P^{2h}(k) = \int dm_1 \frac{m_1}{\bar\rho}\, n(m_1) \int dm_2 \frac{m_2}{\bar\rho}\, n(m_2) \int d\vec x\, e^{-i\vec k.\vec x} \int d\vec x_1\, d\vec x_2 \int \frac{d\vec k_1\, d\vec k_2\, d\vec k'}{(2\pi)^9}\, e^{i\vec k_1.(\vec x-\vec x_1)}\, e^{-i\vec k_2.\vec x_2}\, e^{i\vec k'.(\vec x_1-\vec x_2)}$$

$$\times\; u(\vec k_1|m_1)\, u(\vec k_2|m_2)\, P_{hh}(k|m_1,m_2)$$

$\int \frac{d\vec x}{(2\pi)^3} \to \delta_D(-\vec k+\vec k_1)$ , $\int \frac{d\vec x_1}{(2\pi)^3} \to \delta_D(-\vec k_1+\vec k')$ , $\int \frac{d\vec x_2}{(2\pi)^3} \to \delta_D(-\vec k_2-\vec k')$

$$\underline{P^{2h}(k) = \int dm_1 \frac{m_1}{\bar\rho}\, n(m_1) \int dm_2 \frac{m_2}{\bar\rho}\, n(m_2)\; u(k|m_1)\, u(k|m_2)\; P_{hh}(k|m_1,m_2)}$$

On approxime : $\underline{P_{hh}(k|m_1,m_2) \simeq b(m_1)\, b(m_2)\, P_L(k)}$ .

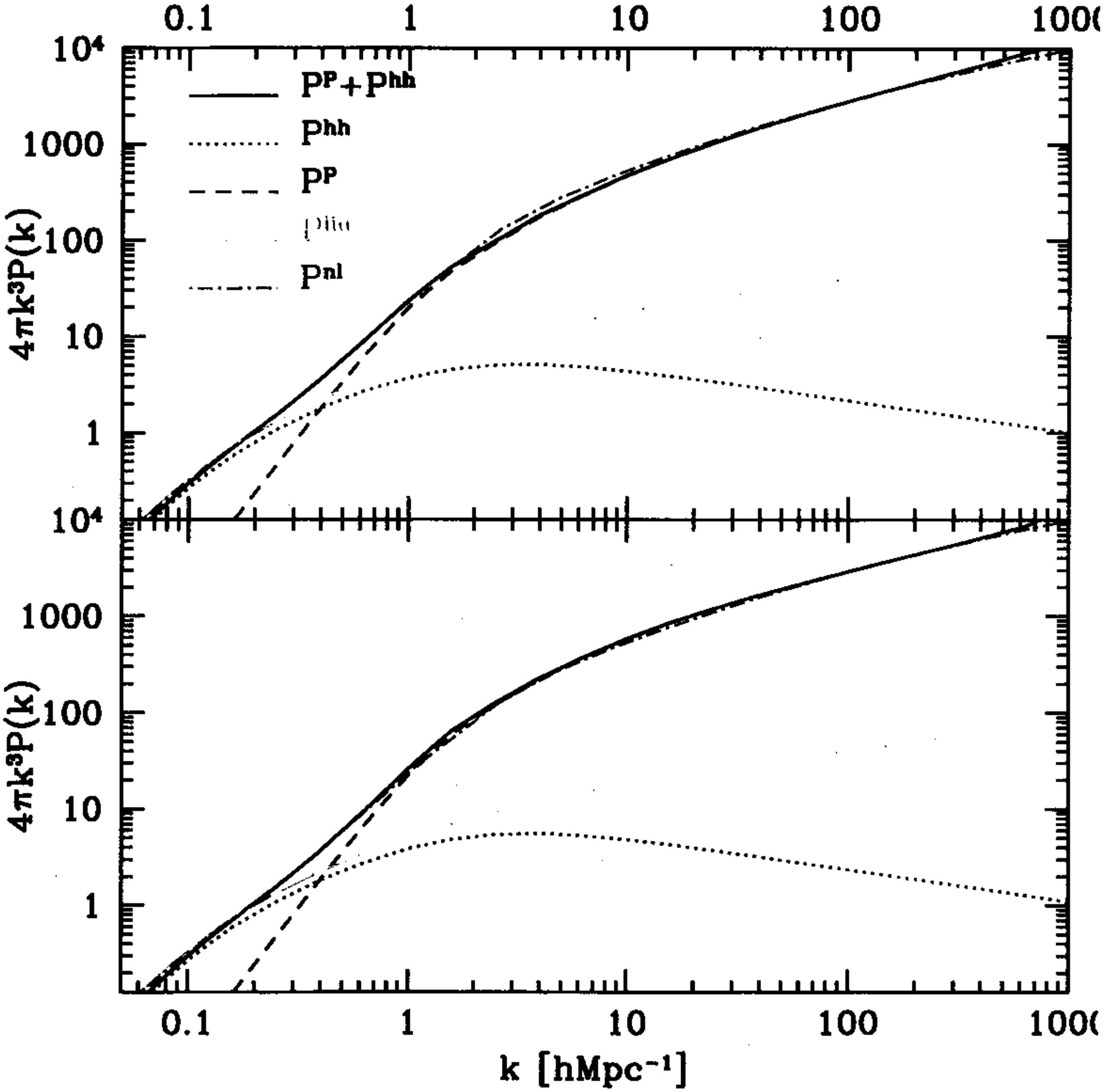
* On peut noter 2 problèmes :
- $\int_0^\infty dx\, 4\pi x^2\, \xi(x) \neq 0$ soit $P(k=0) \neq 0$
- $P^{1h}(k\to 0) \to \int dm \left(\frac{m}{\bar\rho}\right)^2 n(m) = C^{te} > 0$

donc en $k\to 0$, $P^{1h}$ domine sur $P^{2h} \propto P_L(k) \to 0$ .

$\Rightarrow$ On peut penser utiliser des profils compensés : $\int d\vec x\; u(\vec x-\vec x_i|m_i) = 0$ , $u(k=0|m_i) = 0$ .
Dans ce cas on a bien $\int_0^\infty dx\, 4\pi x^2\, \xi(x) = 0$ , $P^{1h}(k\to 0) \to 0$ , mais à la limite de grandes échelles on a :
$$P^{1h}(k) \sim u(k)^2 , \quad P^{2h}(k) \sim u(k)^2\, P_L(k)$$
$\to$ il n'y a pas assez de puissance à grande échelle et on ne retrouve pas $P_L(k)$ .

Modèle de halos : spectre de puissance DM.

Seljak, 2000, MNRAS, 318, 203



IV 7°)

## Galaxies

Les galaxies se forment à l'intérieur des halos de matière noire. On écrit :

$$\underline{P_{gal}(k) = P_{gal}^{1h}(k) + P_{gal}^{2h}(k)} \qquad \text{avec :}$$

$$\begin{cases} P_{gal}^{1h}(k) = \int dm \; n(m) \; \dfrac{\langle N_{gal}(N_{gal}-1)|m\rangle}{\bar{n}_{gal}^2} \; |u_{gal}(k|m)|^p \\ P_{gal}^{2h}(k) = P_L(k) \left[ \int dm \; n(m) \; b(m) \; \dfrac{\langle N_{gal}|m\rangle}{\bar{n}_{gal}} \; u_{gal}(k|m) \right]^2 \end{cases}$$

$P^{1h}$ : $\langle N_{gal}(N_{gal}-1)\rangle$ : les halos avec $N_{gal} = 1$ ne contribuent pas à la fonction de corrélation à 2 points à travers $P^{1h}$.

$P^{2h}$ : on a utilisé : $P_{hh}(k) \simeq b(m_1)\, b(m_2)\, P_L(k)$.

$$\bar{n}_{gal} = \int dm \; n(m) \; \langle N_{gal}|m\rangle$$

Aux grandes échelles on obtient : $P_{gal}(k) \simeq P_{gal}^{2h}(k) \simeq b_{gal}^2 \, P_L(k)$

avec : $\quad b_{gal} = \int dm \; n(m) \; b(m) \; \dfrac{\langle N_{gal}|m\rangle}{\bar{n}_{gal}}$.

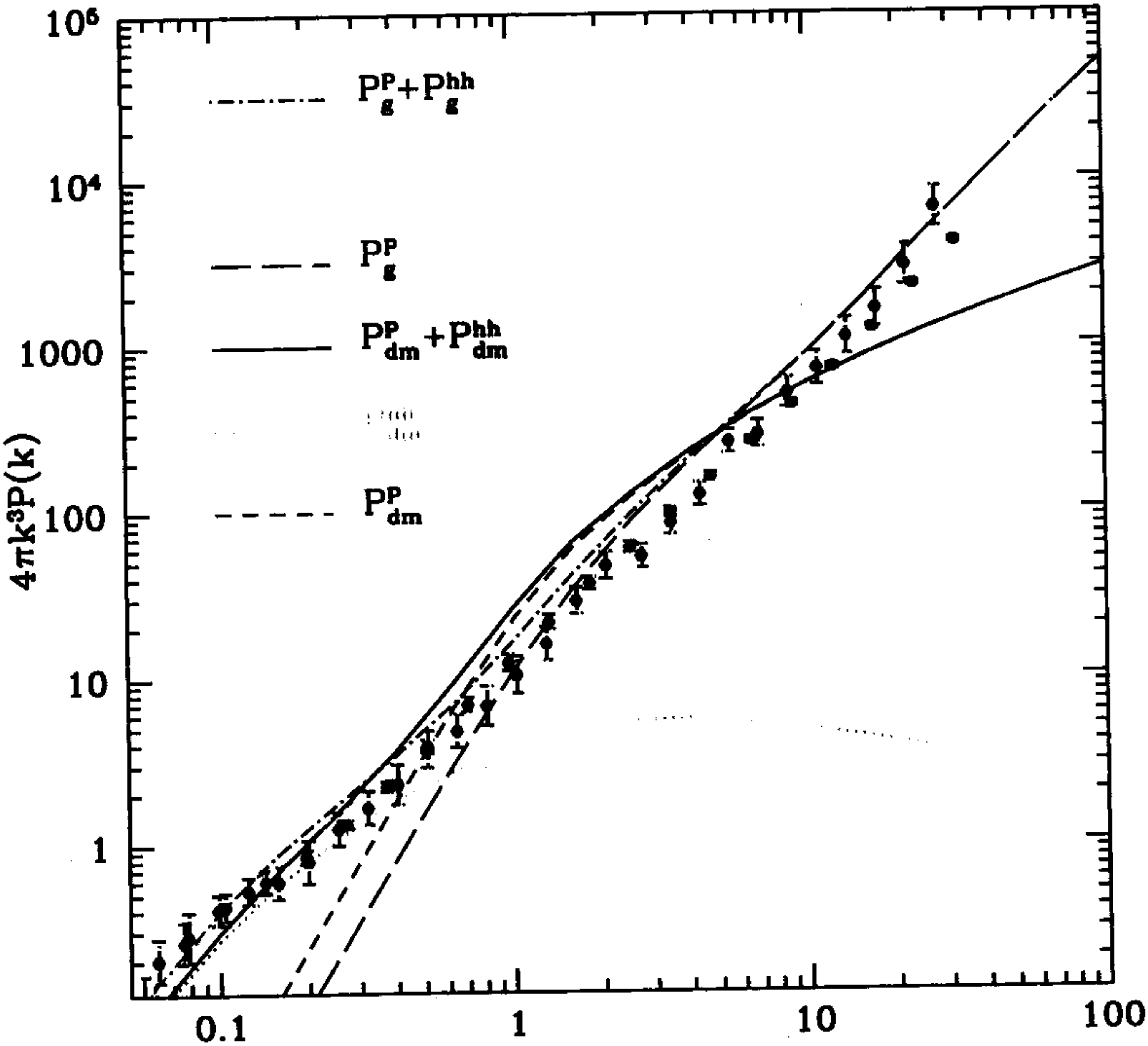
De plus, dans $P_{gal}^{1h}(k)$ on prend $p = 2$ si $\langle N(N-1)\rangle > 1$, car dans la limite de nombreuses galaxies les paires sont dominées par les galaxies du halo, et on prend $p = 1$ si $\langle N(N-1)\rangle < 1$ car dans ce cas opposé les paires sont dominées par la galaxie centrale associée à une galaxie du halo.

On voit que les galaxies suivent la matière noire <u>seulement si</u> on a :

- $\langle N_{gal}|m\rangle \propto m$, $\quad \langle N_{gal}(N_{gal}-1)\rangle \propto m^2$
- il y a de nombreuses galaxies par halo : $p = 2$
- $u_{gal}(k|m) \propto u(k|m)$ : les galaxies suivent la matière noire de chaque halo.

Modèle de halos : spectres de puissance DM et galaxies

Seljak, 2000, MNRAS, 318, 203



Les simulations donnent : $\langle N \rangle$ et $\langle N(N-1) \rangle$ augmentent moins vite que $m$ et $m^2$, car les halos massifs sont plus chauds et le gaz prend plus de temps pour se refroidir. De plus, les petites galaxies ont $N \simeq 1$ de sorte que $\langle N(N-1) \rangle < \langle N \rangle^2$ et le terme $P^{1h}$ est atténué par rapport à $P^{2h}$ en comparaison de la matière noire. Cela explique le comportement observé aux échelles de transition où $\Delta^2_{gal}(k) \sim 1$.

Par contre, en $k \to \infty$ on a plus de puissance pour $P^{1h}_{gal}(k)$ que pour la matière noire grâce aux halos qui n'ont qu'une galaxie centrale, ce qui change $u(k)^2$ en $u(k)$.

IV 8°)

## Distribution des vitesses

Chaque particule est dans un halo : $v = v_{vir} + v_{halo}$.

On suppose : $\underline{\sigma^2(m) = \sigma^2_{vir}(m) + \sigma^2_{halo}(m)}$.

- viriel : $\sigma^2_{vir} \propto \frac{\mathcal{G} m}{R} \sim m^{2/3} (\Delta_{vir} \bar{\rho})^{1/3}$ car $\frac{m}{R^3} \sim \Delta_{vir} \bar{\rho}$.

  donc $\underline{\sigma_{vir} \propto m^{1/3}}$

- vitesse des halos : on utilise la théorie linéaire lissée à l'échelle $R$ :

$$\underline{\sigma^2_{halo}(m) \propto \int d\vec{k} \; \frac{P_L(k)}{k^2} \; W(kR(m))^2 \; \simeq C^{te}/m}$$

rajouter la contrainte de pic ne change pas beaucoup le résultat.

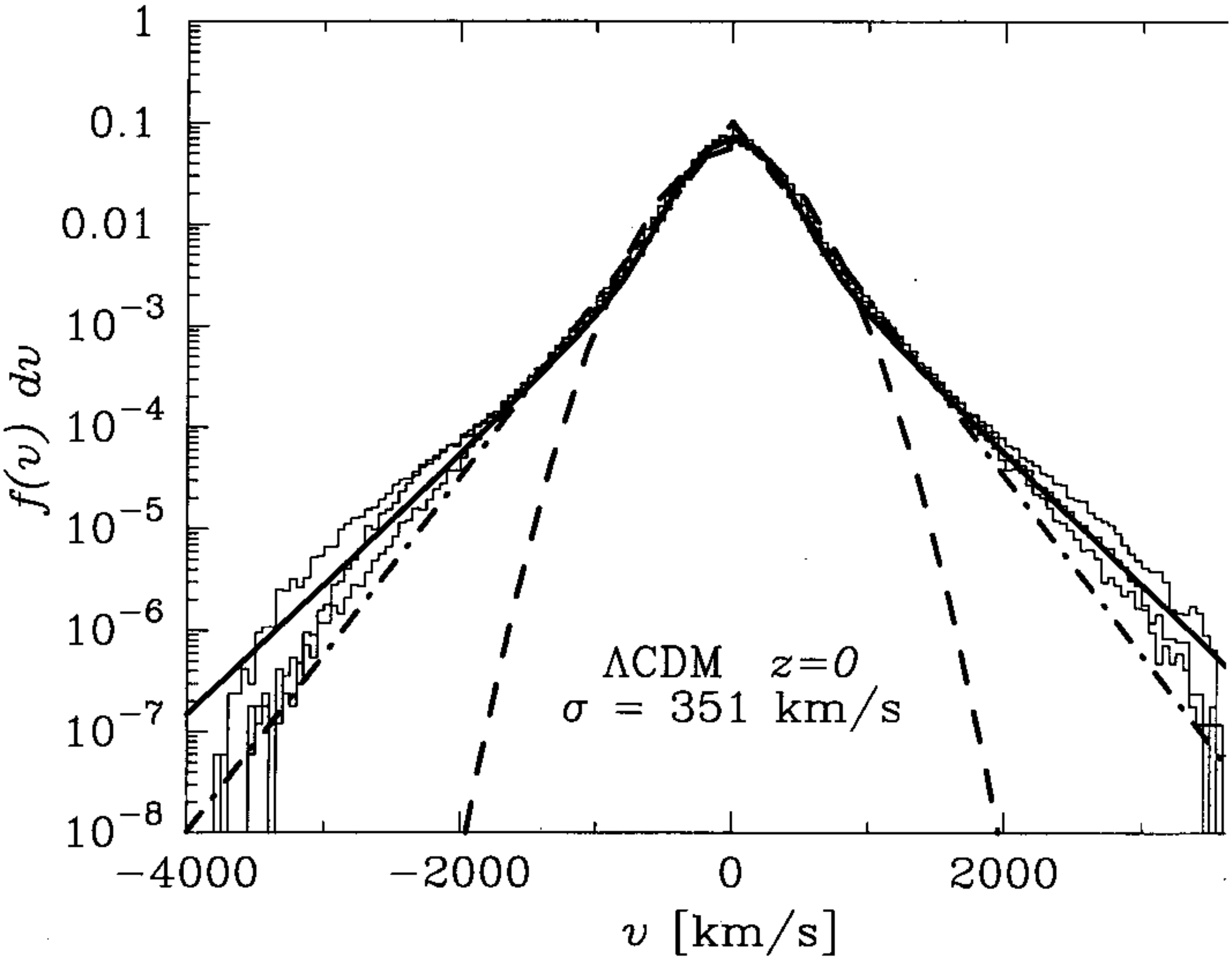
On écrit donc pour la distribution de vitesse le long de la ligne de visée :

$$f(v) = \int dm \; \frac{m}{\bar{\rho}} \; n(m) \; P(v|m) \qquad \text{et} \quad P(v|m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma^2 = \frac{\sigma^2_{vir} + \sigma^2_{halo}}{3}.$$

On obtient un coeur Gaussien et des queues de distribution moins abruptes, car $\sigma^2_{vir} \propto m^{2/3}$.

Modèle de halos : distribution de vitesses

Cooray, Sheth, 2002, Phys. Rep., 372, 1



# V Hiérarchie BBGKY et modèles hiérarchiques

Les modèles hiérarchiques supposent : $\xi_p(\vec{x}_1;\dots;\vec{x}_p) = \sum_{(\alpha)} Q_p^{(\alpha)} \sum_{t_\alpha} \prod_{p-1} \xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)$

En particulier : $\xi_3(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) = Q_3\left[\xi_{12}\,\xi_{23} + \xi_{23}\,\xi_{31} + \xi_{31}\,\xi_{12}\right]$

$$\xi_4(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4) = Q_4^{A}\underbrace{\left[\xi_{12}\,\xi_{23}\,\xi_{34}+\dots\right]}_{\text{12 termes snake}} + Q_4^{*}\underbrace{\left[\xi_{12}\,\xi_{13}\,\xi_{14}+\dots\right]}_{\text{4 termes star}}$$

On peut essayer dans l'espace des phases :

$$g_N(\vec{x}_1,\vec{p}_1;\dots;\vec{x}_N\vec{p}_N) = E_N(\bar{p}) \sum_{(\alpha)} Q_N^{\alpha} \sum_{t_\alpha} \prod_{N-1} C_{ij}$$

$$\bar{p} = \frac{\vec{p}_1+\dots+\vec{p}_N}{N}, \quad C_{ij} = C(\vec{x}_{ij},\vec{p}_{ij}) \qquad \vec{x}_{ij} = \vec{x}_i - \vec{x}_j, \quad \vec{p}_{ij} = \vec{p}_i - \vec{p}_j$$

$$\int d\vec{p}_1\dots d\vec{p}_N \; g_N = \xi_N \quad \text{donc : } \int d\vec{p}\; E_p(p) = 1, \quad \int d\vec{p}\; C(\vec{x},\vec{p}) = \xi(\vec{x}).$$

L'équation de Vlasov est : $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{a^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\mathcal{G}}{a}\int d\vec{x}'\,d\vec{p}'\; f(\vec{x}',\vec{p}')\,\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}(\vec{x},\vec{p}) = 0$

$\rho(\vec{x}) = \int d\vec{p}\; f$, $\quad$ • $\langle f(\vec{x}_1,\vec{p}_1)\dots f(\vec{x}_N,\vec{p}_N)\rangle_c = \bar{\rho}^N g_N(\vec{x}_1,\vec{p}_1;\dots;\vec{x}_N,\vec{p}_N)$

Donc dans la limite petite échelle, $\xi_{N+1} \gg \xi_N$, $g_{N+1} \gg g_N$, on obtient la hiérarchie BBGKY :

$$\frac{\partial g_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{p}_i}{a^2}\cdot\frac{\partial g_N}{\partial \vec{x}_i} + \frac{\mathcal{G}\bar{\rho}}{a}\int d\vec{x}_{N+1}\,d\vec{p}_{N+1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{x}_{N+1}-\vec{x}_i}{|\vec{x}_{N+1}-\vec{x}_i|^3}\cdot\frac{\partial g_{N+1}}{\partial \vec{p}_i}(\vec{x}_1,\vec{p}_1;\dots;\vec{x}_N,\vec{p}_N;\vec{x}_{N+1},\vec{p}_{N+1}) = 0$$

On peut essayer de substituer le modèle hiérarchique dans cette hiérarchie.

$N=2$, $\int d\vec{p}_1\,d\vec{p}_2\,d\vec{p}_3 = \int d\bar{p}_3\,d\vec{p}_{12}\,d\vec{p}_{23}$, .... on a en intégrant $\int d\bar{p}_3$ :

$$\frac{\partial C_{12}}{\partial t} + \frac{\vec{p}_{12}}{a^2}\cdot\frac{\partial C_{12}}{\partial \vec{x}_{12}} + Q_3\frac{\mathcal{G}\bar{\rho}}{a}\int d\vec{x}_3\left(\frac{\vec{x}_{31}}{x_{31}^3} - \frac{\vec{x}_{32}}{x_{32}^3}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{p}_{12}}\left[(\xi_{23}+\xi_{31})\,C_{12} + \langle C_{23}\,C_{31}\rangle\right] = 0$$

$\langle\cdot\rangle = \int \vec{p}$ à $\vec{p}_{12}$ fixé :

$$\langle C_{23}\,C_{31}\rangle = \int d\vec{p}_{23}\; C_{23}(\vec{p}_{23})\; C_{31}(-\vec{p}_{12}-\vec{p}_{23})$$

car : $\vec{p}_{31} = \vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \vec{p}_3 - \vec{p}_2 + \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -\vec{p}_{23} - \vec{p}_{12}$.

On intègre sur le moment $\vec{p}_{12}$ ce qui donne l'éq. de conservation des paires :

$$\frac{\partial \xi_{12}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{12}} \cdot \int d\vec{p}_{12} \; \frac{\vec{p}_{12}}{a^2} C_{12} = 0 \; .$$

Si on prend l'éq. à 3 pts, $N=3$, et on intègre sur tous les moments sauf $\vec{p}_{12}$ :

$$\cancel{Q\left\{ (\xi_{23}+\xi_{31}) \left( \frac{\partial C_{12}}{\partial t} + \frac{\vec{p}_{12}}{a^2} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial \vec{x}_{12}} \right) + \frac{\partial \langle C_{23} C_{31} \rangle}{\partial t} + \right.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_3 Q_3 \left[ C_{12} C_{23} + C_{23} C_{31} + C_{31} C_{12} \right] + \left( \frac{\vec{p}_1}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{p}_2}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} + \frac{\vec{p}_3}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_3} \right) \xi_3 Q_3 \left[ C_{12} C_{23} + C_{23} C_{31} + C_{31} C_{12} \right]$$

$$+ \frac{\delta \bar{\rho}}{a} \int d\vec{x}_4 \, d\vec{p}_4 \left( \frac{\vec{x}_4 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_4 - \vec{x}_1|^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \dots + \frac{\vec{x}_4 - \vec{x}_3}{|\vec{x}_4 - \vec{x}_3|^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_3} \right) \xi_4 \left\{ Q_4^\Delta \left( C_{12} \xi_{23} C_{34} + \dots \right) + Q_4^* \left( C_{12} C_{13} C_{14} + \dots \right) \right\} = 0$$

$$Q_3 \left[ \frac{\partial C_{12}}{\partial t} (\xi_{23} + \xi_{31}) + C_{12} \frac{\partial}{\partial t} (\xi_{23} + \xi_{31}) + \frac{\partial}{\partial t} \langle C_{23} C_{31} \rangle + \frac{\vec{p}_{12}}{a^2} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial \vec{x}_{12}} (\xi_{23} + \xi_{31}) + C_{12} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{23}} \cdot \int d\vec{p}_{23} \frac{\vec{p}_{23}}{a^2} C_{23} \right.$$

$$\left. + C_{12} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{31}} \cdot \int d\vec{p}_{31} \frac{\vec{p}_{31}}{a^2} C_{31} \Big\} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{23}} \cdot \frac{\langle \vec{p}_{23} C_{23} C_{31} \rangle}{a^2} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}_{31}} \cdot \frac{\langle \vec{p}_{31} C_{23} C_{31} \rangle}{a^2} \right]$$

$$+ \frac{\xi \bar{\rho}}{a} \int d\vec{x}_4 \left( \frac{\vec{x}_{41}}{x_{41}^3} - \frac{\vec{x}_{42}}{x_{42}^3} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_{12}} \left\{ Q_4^\Delta \left[ \xi_{23} \xi_{34} C_{12} + (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4) + \xi_{32} \xi_{41} C_{12} + (1 \leftrightarrow 2) \right. \right.$$

$$\left. + \xi_{41} \langle C_{23} C_{31} \rangle + (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4) + \langle C_{23} C_{34} C_{41} \rangle + (1 \leftrightarrow 2) \right] + Q_4^* \left[ \xi_{13} \xi_{14} C_{12} + (1 \leftrightarrow 2) \right.$$

$$\left. \left. + \xi_{34} \langle C_{32} C_{31} \rangle + (3 \leftrightarrow 4) \right] \right\}$$

où on a utilisé l'équation de conservation des paires.

Dans la limite $\vec{x}_1 \to \vec{x}_2$, on a : $\xi_{23} \to \xi_{31}$, $C_{3i} \ll C_{ij}$ $ij = 1,2,4$, donc :

$$\underline{2 Q_3 \, \xi_{31} \left( \frac{\partial C_{12}}{\partial t} + \frac{\vec{p}_{12}}{a^2} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial \vec{x}_{12}} \right) + \left( 2 Q_4^\Delta + Q_4^* \right) \xi_{31} \frac{\xi \bar{\rho}}{a} \int d\vec{x}_4 \left( \frac{\vec{x}_{41}}{x_{41}^3} - \frac{\vec{x}_{42}}{x_{42}^3} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_{12}} \left[ (\xi_{24} + \xi_{14}) C_{12} + \langle C_{24} C_{41} \rangle \right] = (}$$

on a aussi utilisé : $C_{34} \simeq C_{31}$ et $C_{32}$ car seuls les $\vec{x}_4 \simeq \vec{x}_1, \vec{x}_2$ contribuent à l'attraction gravitationnelle différentielle entre 1 et 2.

En comparant avec l'équation pour les paires obtenue à partir de $N=2$ on obtient :

$$\underline{2 Q_3^2 = 2 Q_4^\Delta + Q_4^*}$$

En fait, ce résultat signifie que la fonction de corrélation à 2 pts d'une galaxie avec une binaire $\xi_{gb}$ est égale à la corrélation d'une particule avec un triplet $\xi_{gt}$.
En effet:

$$\underline{\xi_{gb} = 2Q_3\,\xi} \qquad \text{et} \qquad \underline{\xi_{gt} = (2Q_4^{\Delta} + Q_4^{*})\,\frac{\xi}{Q_3}}\;.$$

En effet, la probabilité conditionnelle de trouver une particule en $d\vec{x}_3$ sachant qu'il y a une binaire en $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est:

$$\bar{\rho}\, d\vec{x}_3\,(1+\xi_{gb}) = \lim_{\vec{x}_1 \to \vec{x}_2} \bar{\rho}\, d\vec{x}_3\, \frac{1+\xi_{12}+\xi_{23}+\xi_{31}+Q_3(\xi_{12}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{31}+\xi_{31}\xi_{12})}{1+\xi_{12}}$$

$$= \bar{\rho}\, d\vec{x}_3\,(1+2Q_3\,\xi_{31})$$

De même:

$$\bar{\rho}\, d\vec{x}_4\,(1+\xi_{gt}) = \lim_{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3 \to \vec{x}} \bar{\rho}\, d\vec{x}_4\, \frac{3\times 2\,Q_4^{\Delta}\,\xi_{12}^2\,\xi_{14} + 3\,Q_4^{*}\,\xi_{12}^2\,\xi_{14}}{3\,Q_3\,\xi_{12}^2} = \bar{\rho}\, d\vec{x}_4\, \frac{2Q_4^{\Delta}+Q_4^{*}}{Q_3}\,\xi_{14}\;.$$

Donc la contrainte obtenue à partir de BBGKY pour $N=3$ est: $\underline{\xi_{gb} = \xi_{gt}}$.
L'origine est claire: l'évolution d'une binaire en présence d'une galaxie lointaine est déterminée par la gravité des particules proches de la binaire. Ces galaxies proches de la binaire forment un triplet serré. Donc, si on compare l'évolution d'une binaire en présence d'une galaxie lointaine~~, le terme dérivé de BBGKY~~ par rapport à l'évolution d'une binaire normale (moyenne), le terme dérivé dans BBGKY est multiplié par $\xi_{gb}$ alors que le terme de gravité est multiplié par $\xi_{gt}$.
Il faut donc $\xi_{gb} = \xi_{gt}$.
Cela vient de la forme séparable dans l'espace des phases de $g_N$ qui donne la même forme pour les fonctions à 2 pts de l'espace des phases indépendamment de particules supplémentaires.
Cela ne tiendrait pas si la dépendance en vitesse dépendait des galaxies supplémentaires.

Au lieu de considérer l'évolution d'une binaire en présence d'une galaxie lointaine on peut considérer une binaire en présence d'un $M$-tuplet lointain.
On a alors :

$$\cancel{\xi_{bM} = \xi_{tM}} \quad \xi_{Mb} = \xi_{Mt}\,.$$

En particulier, si $M=2$ : $\quad 4Q_4^{\triangle} = \frac{\xi_{bb}}{\xi} = \frac{\xi_{bt}}{\xi} = \frac{4Q_5^{\triangle}+2Q_5^{F}}{Q_3}$

$Q_5^F$ : graphe en F :  .

De même, pour un $N$-tuplet en présence d'un $M$-tuplet lointain on a :

$$\cancel{\xi_{N,M} = \xi_{N+1,M}} \qquad \underline{N \geq 2,\ M \geq 1 :\quad \xi_{M,N} = \xi_{M,N+1}}$$

Donc on n'a que <u>3 corrélations possibles</u> :

$$\underline{\xi} = \xi_{1,1}\ ,\quad \underline{\xi_{gb}} = \xi_{1,2} = \xi_{1,3} = \xi_{1,N}\ ,\quad \underline{\xi_{bb}} = \xi_{2,2} = \xi_{2,3} = \xi_{2,4} = \dots = \xi_{3,2} = \xi_{3,3} = \dots = \xi_{M,N}$$

Donc toutes les corrélations $\xi_{MN}$ sont égales à $\xi$, $\xi_{gb} = 2Q_3\,\xi$ ou $\xi_{bb} = 4Q_4^{\triangle}\,\xi$ $\quad M \geq 2,\ N \geq 2$.

Par conséquent, $Q_3$ et $Q_4^{\triangle}$ sont arbitraires à ce stade mais tous les autres coefficients sont déterminés comme fonctions de $Q_3$ et $Q_4^{\triangle}$.

On peut aussi voir ce résultat directement sur BBGKY ou à partir du viriel.

$\cancel{\frac{\partial g_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i}{a^2} \cdot \frac{\partial g_N}{\partial \vec{x}_i}}$ A petite échelle à l'équilibre $v^2 \sim \frac{GM}{R} \sim G\rho R^2$,
donc dans les éq. du mvt on obtient :

$$\underline{\langle v_{MN}^2 \rangle\, \xi_{MN} \sim r^2\, \xi_{1MN}}$$

$v_{MN}$ : vitesse relative entre $M$-tuplet et $N$-tuplet.
Or du fait de la forme séparable de $g_N$ on a $\langle v_{MN}^2 \rangle = C^{te}\ /M,N$ donc $\xi_{gb} \sim \xi_{gMN}$ indépendant de $M$ et $N$.

Le problème est que c'est en contradiction avec les données numériques et les observations qui montrent que les objets rares massifs ~~sont~~ ont une fonction de corrélation beaucoup plus grande que la fonction de corrélation de la matière $\xi$.
Donc ce modèle séparable dans l'espace des phases ne marche pas.

Par ailleurs, si on suppose que : $\vec{x}_1 \to \vec{x}_2$, $C_{12} \to \xi_{12}\, \delta_D(\vec{r}_{12})$

on obtient à partir de la éq. BBGKY pour $N=3$ le résultat : $Q_4^* = 0$.

Donc $Q_4^{\Delta} = Q_3^2$.

On peut montrer alors que seuls les graphes "snake" ont $Q_N^{\alpha} \neq 0$ et :

$\underline{Q_N^{\Delta} = Q_3^{N-2}}$.

Comme il y a $\frac{N!}{2}$ diagrammes "snake" on obtient : $\underline{S_N \sim \frac{N!}{2}\, Q_3^{N-2}}$.

<u>Note :</u> cela implique pour $\varphi(y)$ une singularité en $\underline{y_s \sim \frac{-1}{Q_3}}$.

De manière générale, les ~~paras~~ coefficients $S_N$ augmentent vite avec $N$ dans ce genre de modèle car il y a $N^{N-2}$ arbres étiquettés. Donc dans le cas du modèle hiérarchique dégénéré où : $Q_N^{\alpha} = Q_N$ on a : $\underline{S_N \propto N^{N-2}\, Q_N}$.

Notez que dans le modèle d'arbres dégénéré, les $Q_N$ doivent satisfaire à plusieurs contraintes. Ainsi, Cauchy-Schwarz donne :

$$\langle \rho_R^M \rho_R^N \rangle \leq \langle \rho_R^{2M} \rangle^{1/2} \langle \rho_R^{2N} \rangle^{1/2} \quad \text{soit :} \quad \left(S_{M+N}\, \bar{\xi}^{\,M+N-1}\right)^2 \leq S_{2M}\, \bar{\xi}^{\,2M-1}\, S_{2N}\, \bar{\xi}^{\,2N-1}$$

donc : $S_{M+N}^2 \leq S_{2M}\, S_{2N}$, soit :

$$\underline{\left((M+N)^{M+N-2}\, Q_{M+N}\right)^2 \leq (2M)^{2M-2}\, Q_{2M}\, (2N)^{2N-2}\, Q_{2N}} \qquad Q_2 = 1 .$$

Avec $M = \frac{3}{2}$, $N = \frac{1}{2}$, on a : $1 \leq 3\, Q_3$ soit $\underline{Q_3 \geq \frac{1}{3}}$.

$\ell$

# VI Liste de références :


Halo models of large scale structure, Cooray & Sheth, astro-ph 0206508

Non-linear gravitational clustering,.. scaling exponents, Valageas, AA 347, 757 (1999)

Evolution of the cosmological density distribution function, Valageas & Munshi (2004)

A new approach to gravitational clustering .., Valageas, AA 421, 23 (2004)

Dynamics of gravitational clustering II, Valageas, AA 382, 412 (2002)

IV, Valageas, AA 382, 450 (2002)

Analytic model for galaxy and dark matter clustering, Seljak, astro-ph 0001493

An analytic model for the spatial clustering of dark matter halos, Mo & White, MNRAS 282, 347 (1996)

Reconstructing the primordial spectrum,.., Hamilton et al., ApJ 374, L1, 1991

Non-linear evolution of cosmological power-spectra, Peacock & Dodds, MNRAS 280, L19 (1996)

Extended perturbation theory.., Colombi et al., MNRAS 287, 241 (1997)

Hyperextended cosmological perturbation theory.., Scoccimarro & Frieman, ApJ 520, 35 (1999)

Galaxy N-point correlation functions,.., Fry, ApJ 277, L5, (1984)

On hierarchical solutions to BBGKY, Hamilton, ApJ, 332, 67, (1988)

Scale-invariant matter distribution, I, Balian & Schaeffer, AA 220, 1, (1989)

II, , AA 226, 373 (1989)

Weak lensing shear and aperture mass, Munshi et al., MNRAS 350, 77 (2004)

Construction of the 1-point pdf of Map, Bernardeau & Valageas, AA 364, 1 (2000)

Halo correlations, Bernardeau & Schaeffer, AA 349, 697 (1999)

The non-linear evolution of rare events, Bernardeau, ApJ 427, 51 (1994)

Large-scale structure of the universe .., Bernardeau et al., Physics Reports (2001)

Galaxy correlations .., Bernardeau & Schaeffer, AA 255, 1, (1992)

Statistical mechanics of gravitating systems.., Padmanabhan, astroph 0206131

Excursion set mass functions.., Bond et al., ApJ 379, 440 (1991)

BBKS, ApJ 304, 15 (1986)

An excursion set model.., Sheth, MNRAS 300, 1057 (1998)

Ellipsoidal collapse.., Sheth et al., MNRAS 323, 1 (2001)

An excursion set model..ellipsoidal collapse.., Sheth & Tormen, MNRAS 329, 61 (2002)

Using the Schrödinger eq..., Widrow & Kaiser, ApJ 416, L71 (1993)

Test-bed simulations..., Davies & Widrow, ApJ 485, 484 (1997)

A wave-mechanical approach.., Coles & Spencer, astro-ph 0212433

The large-scale structure of the universe, Peebles, Princeton Univ. Press, (1980)