

Éléments d'analyse temps-fréquence

Patrick Flandrin

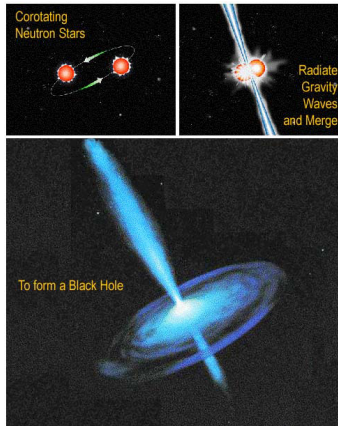
CNRS & École Normale Supérieure de Lyon

VIIIème École de Cosmologie
IESC Cargèse, 28 août–2 septembre 2006



observer

ondes gravitationnelles



[binaire.m]

observer
décrire
représenter
décomposer

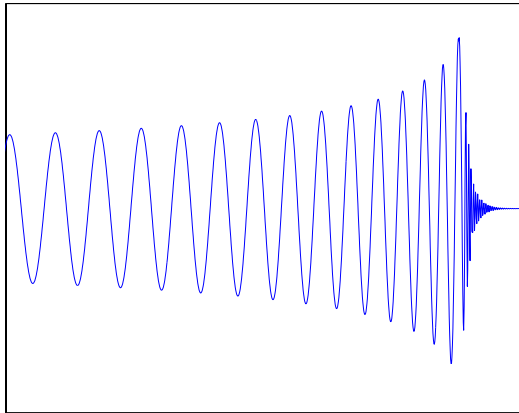
des exemples

VIRGO



ondes gravitationnelles

gravitational wave



time

encore

- **Ondes et vibrations** — Chants d'oiseaux, ▶ chauve-souris, musique (“glissando”), parole, “sifflements atmosphériques”, vagues déferlantes, impulsions large-bande se propageant dans un milieu dispersif, ▶ pendule, diapason (corde, tuyau) de longueur variant dans le temps, vibro-sismique, radar, sonar large-bande, ▶ effet Doppler . . .
- **Biologie et médecine** — EEG (crise d'épilepsie), EMG utérin (contractions), . . .
- **Désordre et phénomènes critiques** — Structures cohérentes en turbulence, accumulation de précurseurs de tremblements de terre, “bulles spéculatives” précédant un crash financier, . . .
- **Fonctions mathématiques** — Weierstrass, ▶ Riemann . . .

observer
décrire
représenter
décomposer

chirps
descripteurs instantanés
bruits
vers le "temps-fréquence"

décrire

définition

Définition

On appellera "chirp" tout signal complexe de la forme $x(t) = a(t) \exp\{i\varphi(t)\}$, où $a(t) \geq 0$ est une amplitude passe-bas dont l'évolution est lente par rapport aux oscillations de la phase $\varphi(t)$.

Évolution lente ? — Les conditions heuristiques habituelles supposent que :

- ① $|\dot{a}(t)/a(t)| \ll |\dot{\varphi}(t)|$: l'amplitude est **quasi-constante** à l'échelle d'une pseudo-période $T(t) = 2\pi/|\dot{\varphi}(t)|$.
- ② $|\ddot{\varphi}(t)|/\dot{\varphi}^2(t) \ll 1$: la pseudo-période $T(t)$ est elle-même **lentement variable** d'oscillation à oscillation.

chirps en loi de puissance

- **Un modèle général** — $C_{\alpha,\beta}(t) = a t^\alpha \exp\{i(bt^\beta + c)\}$.
- **Cas particuliers** — Approximation newtonienne de la partie **spiralante** des ondes gravitationnelles →
 $(\alpha, \beta) = (-1/4, 5/8)$; fonction de Riemann →
 $(\alpha, \beta) = (3/2, -1)$.
- **Typologie** — En $t = 0$: divergence de l'**amplitude** si $\alpha < 0$, de la "**fréquence instantanée**" si $\beta < 1$ et de la **phase** si $\beta < 0$.
- **Singularités oscillantes** — Le cas $(\alpha > 0, \beta < 0)$ est au-delà d'une caractérisation hölderienne \Rightarrow développement d'outils spécifiques (**analyse 2-microlocale, ondelettes**).

modulations

- **Onde monochromatique** — Dans le cas d'un modèle harmonique $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, l'observation de $x(t)$ permet d'accéder de manière **univoque** à l'amplitude a et à la fréquence f_0 .
- **Modulations d'amplitude et de fréquence** — Passer à un modèle **évolutif** revient intuitivement à effectuer la transformation $a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \rightarrow a(t) \cos \varphi(t)$ avec $a(t)$ variable et $\varphi(t)$ non linéaire. Dans un contexte d'**observation**, on perd cependant l'unicité de la représentation car

$$a(t) \cos \varphi(t) = \left[\frac{a(t)}{b(t)} \right] [b(t) \cos \varphi(t)] =: \tilde{a}(t) \cos \tilde{\varphi}(t)$$

pour n'importe quelle fonction $0 < b(t) < 1$.

Fresnel

Onde monochromatique — Le modèle harmonique **réel** peut en fait s'écrire

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re} \{ a \exp i(2\pi f_0 t + \varphi_0) \},$$

avec

$$a \exp i(2\pi f_0 t + \varphi_0) = x(t) + i(\mathbf{H}x)(t)$$

et où **H** est la **transformation de Hilbert** (quadrature).

Interprétation

*Une onde monochromatique (prototype de signal déterministe "stationnaire") est décrite, dans le plan complexe, par un **vecteur tournant** dont le module et la vitesse de rotation sont des grandeurs **constantes** au cours du temps.*

amplitude et fréquence instantanées

Généralisation — Une onde **modulée** en amplitude et en fréquence (prototype de signal déterministe “non stationnaire”) est décrite, dans le plan complexe, par un **vecteur tournant** dont le module et la vitesse de rotation sont des grandeurs **variables** au cours du temps, la complexification étant calquée sur le cas “stationnaire” :

$$x(t) \rightarrow z_x(t) := x(t) + i(\mathbf{H}x)(t).$$

Définition (Ville, '48)

*L'**amplitude** et la **fréquence instantanées** se déduisent de cette représentation complexe, appelée **signal analytique**, selon :*

$$a_x(t) := |z_x(t)| \quad ; \quad f_x(t) := (d/dt) \arg z_x(t) / 2\pi.$$

limitations

- **Composantes multiples** — Par construction, la fréquence instantanée ne peut associer qu'**une** valeur fréquentielle à un instant \Rightarrow moyenne pondérée dans le cas de signaux multicomposantes.

[freqinst2.m]

- **Tendances** — Même problème dans le cas d'un signal monocomposante **avec composante continue non nulle** ou superposé à une **tendance** à très basses fréquences.

[freqinsttrend.m]

Amélioration par représentation de Fresnel “osculatrice”
(Aboutajdine *et al.*, '80).

[freqinstosc.m]

- **Bruit** — Définition **différentielle** très sensible à un bruit additif, même faible.

[freqinst1b.m]

stationnarité

Définition

*Un processus $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit **stationnaire** (au second ordre) si ses propriétés statistiques (d'ordres 1 et 2) ne dépendent pas d'un temps absolu.*

- **Moyenne** — La moyenne $\mathbb{E}\{x(t)\}$ est constante ($\rightarrow 0$)
- **Covariance** — La fonction de covariance $r_x(t, t') := \mathbb{E}\{x(t) \overline{x(t')}\}$ est telle que

$$r_x(t, t') =: \gamma_x(t - t').$$

représentation spectrale

Résultat (Cramér)

$$x(t) = \int e^{i2\pi ft} dX(f)$$

$$\text{avec } \mathbb{E}\{dX(f) \overline{dX(f')}\} = \delta(f - f') d\Gamma_x(f) df'$$

- **Simplification** — $d\Gamma_x(f)$ abs. cont. % Lebesgue
 $\Rightarrow d\Gamma_x(f) =: S_x(f) df$ avec $S_x(f)$ **densité spectrale de puissance**.
- **Dualité (Bochner, Wiener, Khintchine)** — On a alors

$$r_x(\tau) = \int e^{i2\pi f\tau} d\Gamma_x(f) \left(= \int e^{i2\pi f\tau} S_x(f) df \right).$$

non-stationnarité(s)

- **Représentation spectrale** — Toujours valide, mais **sans** l'orthogonalité des accroissements spectraux \Rightarrow la distribution spectrale n'est plus diagonale mais est fonction des **deux** fréquences.
- **Covariance** – Dépend explicitement de **deux** dates (e.g., un temps **absolu** et un temps **relatif**).

Interprétation

La "*densité spectrale de puissance*" devient **dépendante du temps** \Rightarrow *temps-fréquence*.

spectre d'un chirp

Phase stationnaire — Dans le cas où la dérivée $\dot{\varphi}(t)$ est une fonction monotone, on peut approcher le spectre d'un chirp

$$X(f) = \int a(t) e^{i(\varphi(t) - 2\pi ft)} dt$$

par son **approximation de phase stationnaire** $\tilde{X}(f)$, conduisant à

$$|\tilde{X}(f)| \propto a(t_s) |\ddot{\varphi}(t_s)|^{-1/2},$$

avec t_s tel que $\dot{\varphi}(t_s) = 2\pi f$.

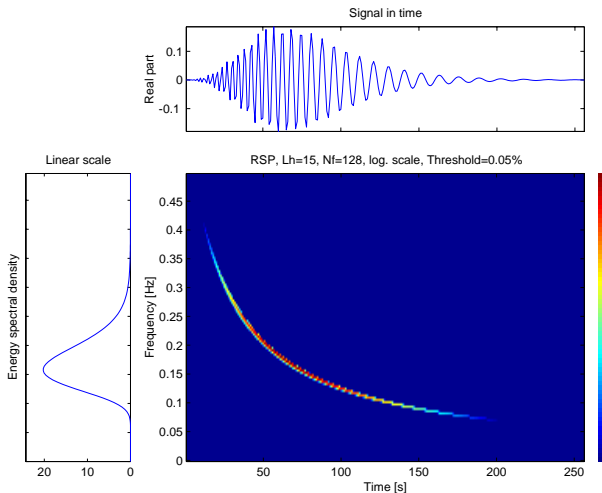
Interprétation

*La courbe de "fréquence instantanée" $\dot{\varphi}(t)$ met en correspondance bijective un temps et une fréquence. Le spectre s'en déduit en pondérant les **fréquences visitées** par les **durées de résidence**.*

observer
décrire
représenter
décomposer

chirps
descripteurs instantanés
bruits
vers le "temps-fréquence"

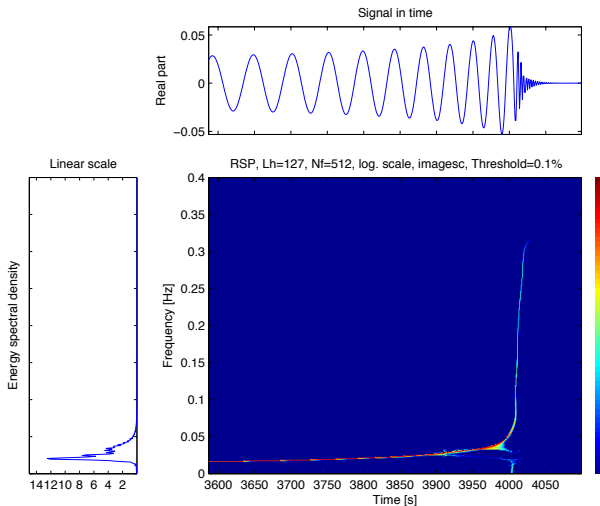
interprétation temps-fréquence



observer
décrire
représenter
décomposer

chirps
descripteurs instantanés
bruits
vers le "temps-fréquence"

interprétation temps-fréquence



observer
décrire
représenter
décomposer

temps-fréquence, de Fourier à Wigner
au-delà de Wigner
le cas stochastique
localisation
décisions temps-fréquence

représenter

intuition

Idée



Donner un sens mathématique à la notation musicale

But

*Écrire la “partition” d’un signal à composantes multiples et évolutives garantissant, dans le cas d’un chirp isolé $x(t) = a(t) \exp\{i\varphi(t)\}$, la représentation **localisée***

$$\rho(t, f) \sim a^2(t) \delta(f - \dot{\varphi}(t)/2\pi).$$

méthodes locales et localisation

- **L'exemple de la TF à court-terme** — On définit la quantité locale

$$F_x^{(h)}(t, f) = \int x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i2\pi fs} ds,$$

où $h(t)$ est une fenêtre d'observation à court-terme.

- **Mesure** — La représentation résulte d'une interaction entre le signal et un **appareil de mesure** (la fenêtre $h(t)$).
- **Compromis** — Une fenêtre courte favorise la “résolution” temporelle au détriment de la “résolution” fréquentielle, et vice-versa.

[spectrodemo.m]

adaptation

- **Chirps** — Adaptation aux **impulsions** si $h(t) \rightarrow \delta(t)$ et aux **raies spectrales** si $h(t) \rightarrow 1 \Rightarrow$ adapter l'analyse à des **chirps** quelconques suggère que $h(t)$ **dépende (localement) du signal**.
- **Chirp linéaire** — Dans le cas linéaire $f_x(t) = f_0 + \alpha t$, la largeur fréquentielle équivalente δf_S du **spectrogramme** $S_x^{(h)}(t, f) := |F_x^{(h)}(t, f)|^2$ se comporte comme :

$$\delta f_S \approx \sqrt{\frac{1}{\delta t_h^2} + \alpha^2 \delta t_h^2}$$

pour une fenêtre $h(t)$ de largeur temporelle équivalente $\delta t_h \Rightarrow$ minimum pour $\delta t_h \approx 1/\sqrt{\alpha}$ (mais α **inconnu**...).

auto-adaptation et distribution de Wigner-Ville

- **Filtrage adapté** — Si l'on prend pour fenêtre $h(t)$ le signal **retourné dans le temps** $x_{-}(t) := x(-t)$, on obtient directement que $F_x^{(x_{-})}(t, f) = W_x(t/2, f/2)/2$, où

$$W_x(t, f) := \int x(t + \tau/2) \overline{x(t - \tau/2)} e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

est la **Distribution de Wigner-Ville** (Wigner, '32; Ville, '48).

- **Chirps linéaires** — La DWV se localise **parfaitement** sur les **droites** du plan:

$$x(t) = \exp\{i2\pi(f_0 t + \alpha t^2/2)\} \Rightarrow W_x(t, f) = \delta(f - (f_0 + \alpha t)).$$

- **Remarque** — La localisation par auto-adaptation conduit à une transformation **quadratique** (distribution d'énergie).

interprétation

- **Symétrie miroir** — En rapportant le signal analysé à un repère local glissant selon $x_t(s) := x(s + t)$, on a :

$$W_x(t, f) := \int \left[x_t(+\tau/2) \overline{x_t(-\tau/2)} \right] e^{-i2\pi f\tau} d\tau,$$

[WVdemo.m]

- **Signal de phase** — Si $x_t(s) = \exp\{i\varphi_t(s)\}$, $W_x(t, f)$ est, en t , la TF d'un signal de phase $\Phi_t(\tau) := \varphi_t(+\tau/2) - \varphi_t(-\tau/2)$, de "fréquence instantanée"

$$\tilde{f}_{x_t}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_t(\tau) = \frac{1}{2} [f_{x_t}(+\tau/2) + f_{x_t}(-\tau/2)]$$

- **Localisation** — On a par suite $\tilde{f}_{x_t}(\tau) = f_0$ si $f_{x_t}(\tau) = f_0 + \alpha \tau$, et ceci pour **toute** pente de modulation α .

[SvsWVchirprate.m]

autres propriétés

- **Énergie**

$$\iint W_x(t, f) dt df = \|x\|^2$$

- **Marginales**

$$\int W_x(t, f) dt = |X(f)|^2; \int W_x(t, f) df = |x(t)|^2$$

- **Unitarité**

$$\iint W_x(t, f) W_y(t, f) dt df = |\langle x, y \rangle|^2$$

- **Conservation des supports, covariance par changement d'échelle, filtrage linéaire et modulation, etc.**

autres propriétés

- **Moments locaux**

$$\int f W_x(t, f) df / |x(t)|^2 = f_x(t); \int t W_x(t, f) dt / |X(f)|^2 = t_x(f)$$

Interprétation

$W_x(t, f)$ **quasi-densité de probabilité énergétique conjointe en temps et en fréquence** :

$$W_x(t, f) = W_x(t|f) \int W_x(t, f) dt = W_x(f|t) \int W_x(t, f) df$$

$$f_x(t) = \mathbb{E}\{f|t\}; t_x(f) = \mathbb{E}\{t|f\}$$

- **Limitation** — $W_x(t, f) \in \mathbb{R}$ mais $\notin \mathbb{R}_+$.

interférences

- **Superposition quadratique** — Pour tout couple de signaux $\{x(t), y(t)\}$ et de coefficients (a, b) , on a

$$W_{ax+by}(t, f) = |a|^2 W_x(t, f) + |b|^2 W_y(t, f) + 2 \operatorname{Re} \{ a \bar{b} W_{x,y}(t, f) \},$$

avec

$$W_{x,y}(t, f) := \int x(t + \tau/2) \overline{y(t - \tau/2)} e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

- **Inconvénient** — Les interférences entre composantes **disjointes** réduisent la lisibilité.
- **Avantage** — Les interférences internes à des composantes **cohérentes** permettent la localisation.

interférences

- **Formule de Janssen (Janssen, '81)** — Une conséquence de l'**unitarité** de $W_x(t, f)$ est que :

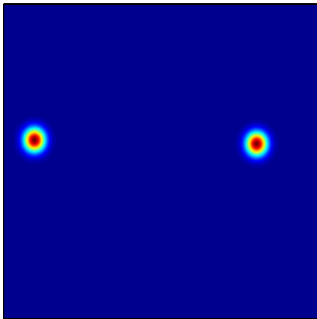
$$|W_x(t, f)|^2 = \iint W_x\left(t + \frac{\tau}{2}, f + \frac{\xi}{2}\right) W_x\left(t - \frac{\tau}{2}, f - \frac{\xi}{2}\right) d\tau d\xi$$

- **Géométrie (Hlawatsch & F., '85)** — Les contributions en deux points quelconques du plan interfèrent pour créer une troisième contribution
 - ① au milieu géométrique du segment qui les joint
 - ② oscillant (valeurs positives et négatives) dans la direction perpendiculaire à ce segment
 - ③ à une “fréquence” proportionnelle à la “distance temps-fréquence” qui les sépare.

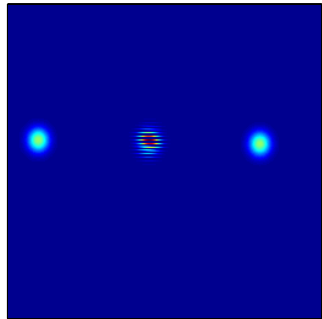
[WV2trans.m, WVinterf.m]

interférences et lisibilité

somme des WV (N = 2)

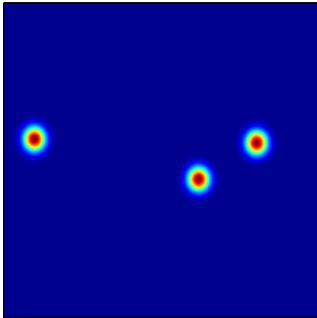


WV de la somme (N = 2)

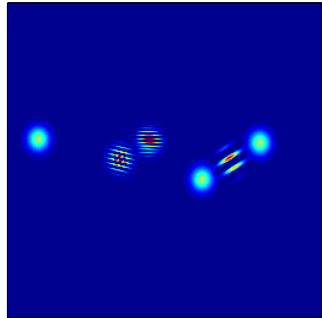


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 3)

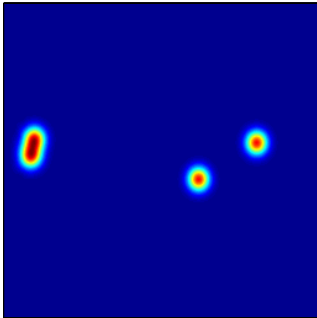


WV de la somme (N = 3)

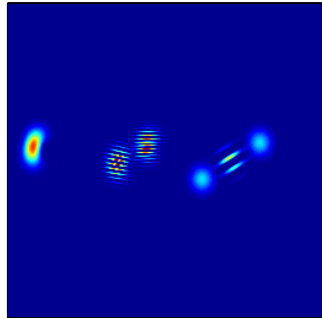


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 4)

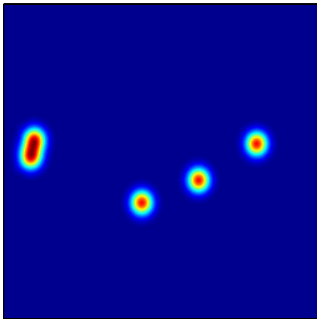


WV de la somme (N = 4)

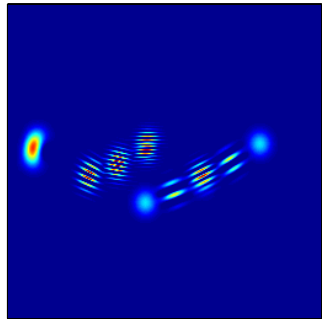


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 5)

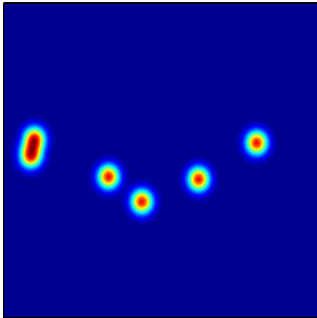


WV de la somme (N = 5)

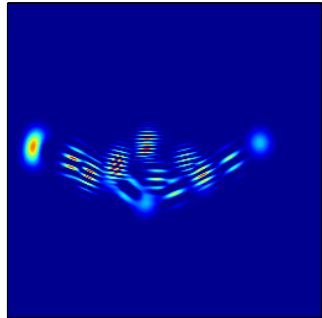


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 6)

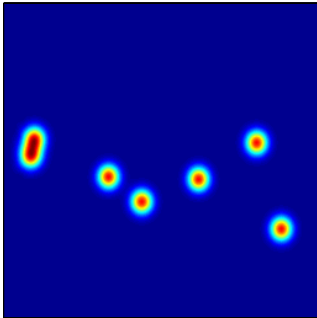


WV de la somme (N = 6)

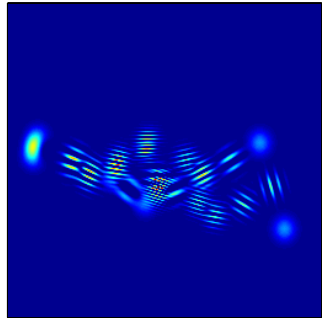


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 7)

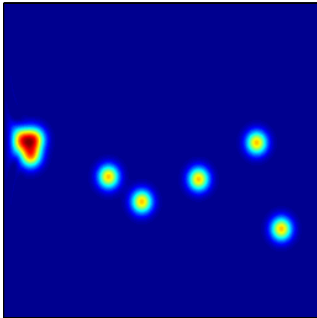


WV de la somme (N = 7)

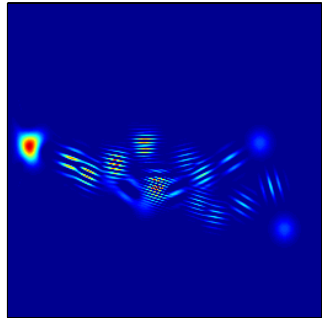


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 8)

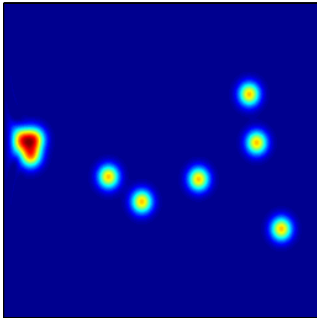


WV de la somme (N = 8)

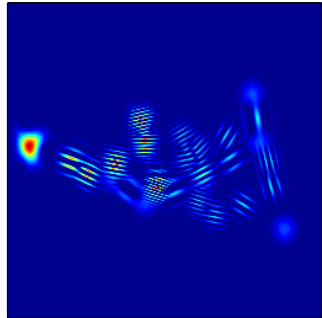


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 9)

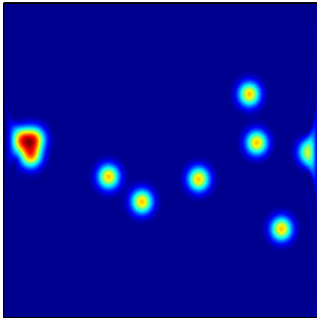


WV de la somme (N = 9)

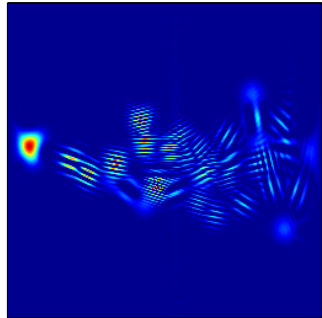


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 10)

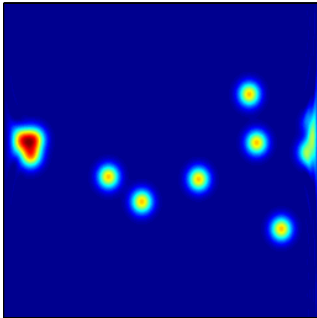


WV de la somme (N = 10)

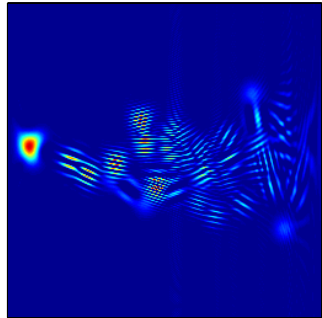


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 11)

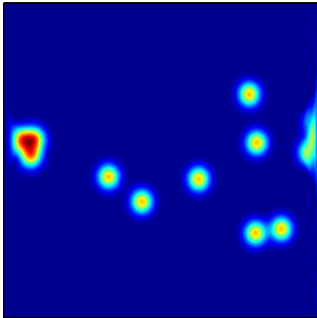


WV de la somme (N = 11)

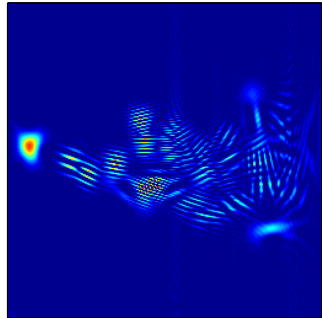


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 12)

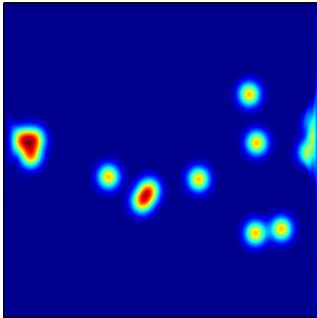


WV de la somme (N = 12)

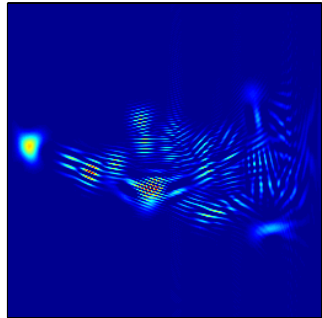


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 13)

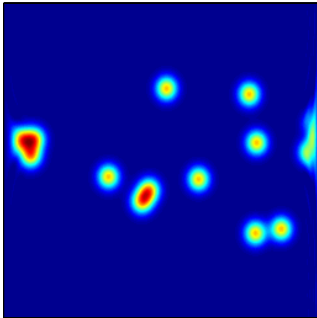


WV de la somme (N = 13)

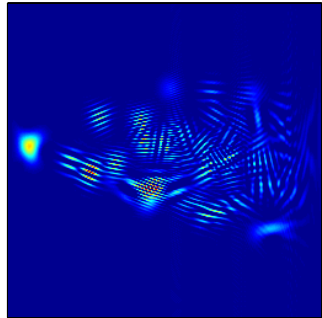


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 14)

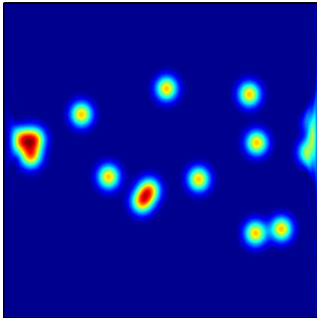


WV de la somme (N = 14)

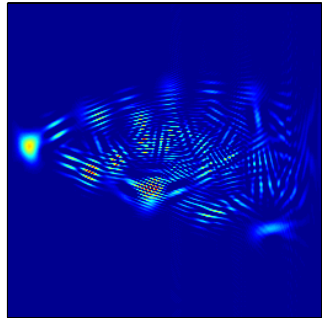


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 15)

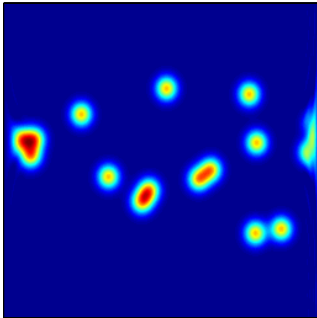


WV de la somme (N = 15)

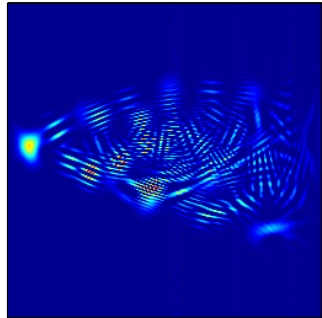


interférences et lisibilité

somme des WV (N = 16)

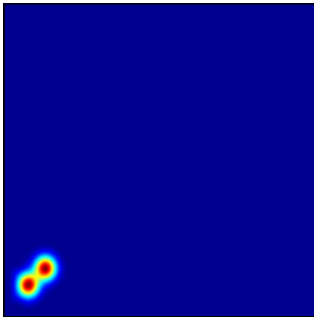


WV de la somme (N = 16)

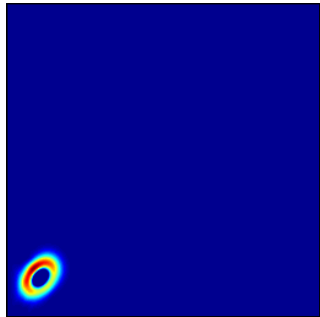


interférences et localisation

sum(WV) (N = 2)

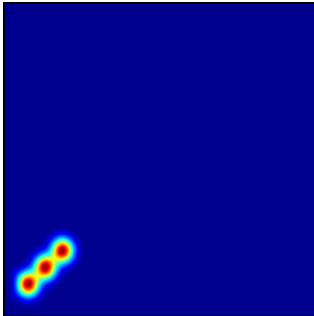


WV(sum) (N = 2)

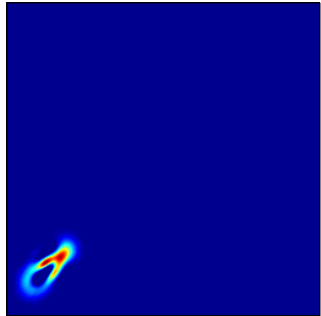


interférences et localisation

sum(WV) (N = 3)

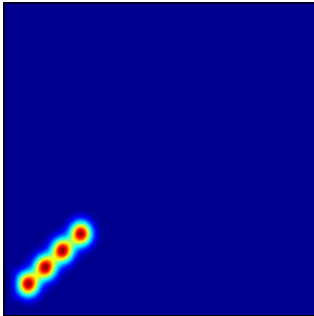


WV(sum) (N = 3)

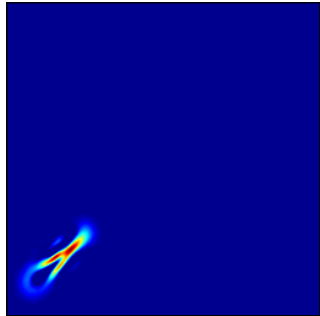


interférences et localisation

sum(WV) (N = 4)

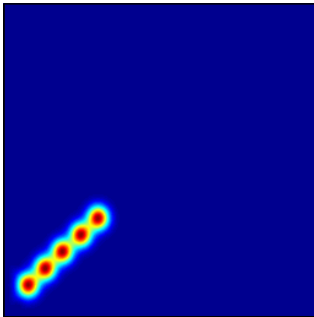


WV(sum) (N = 4)

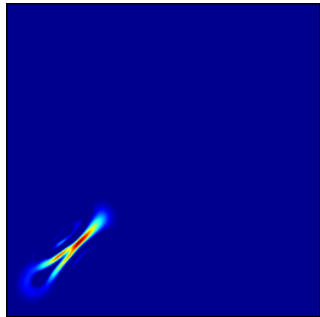


interférences et localisation

sum(WV) (N = 5)

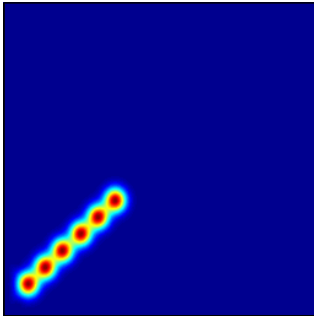


WV(sum) (N = 5)

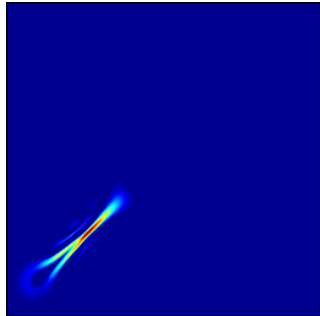


interférences et localisation

sum(WV) (N = 6)

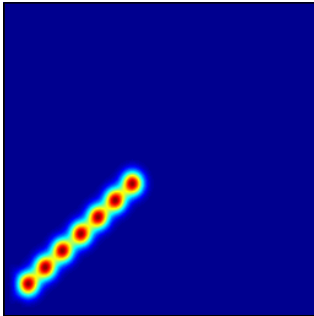


WV(sum) (N = 6)

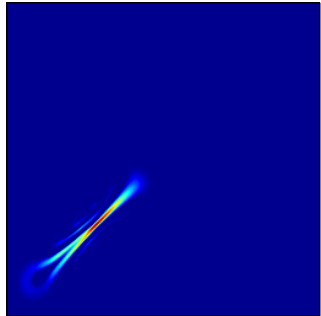


interférences et localisation

sum(WV) (N = 7)

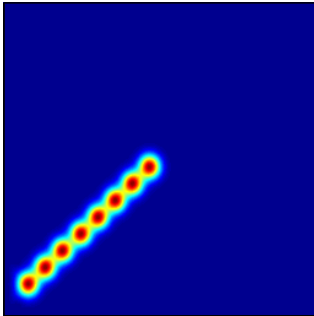


WV(sum) (N = 7)

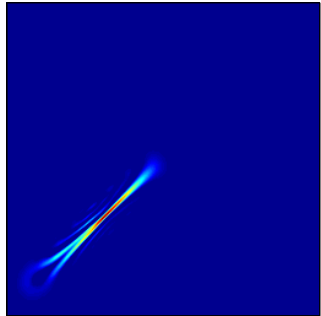


interférences et localisation

sum(WV) (N = 8)

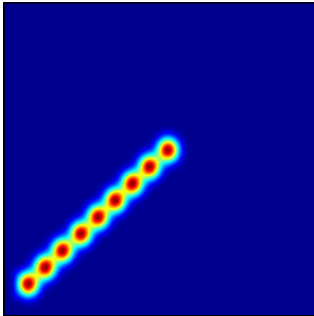


WV(sum) (N = 8)

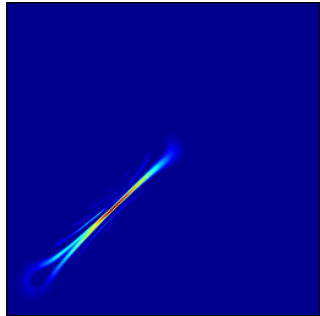


interférences et localisation

sum(WV) (N = 9)

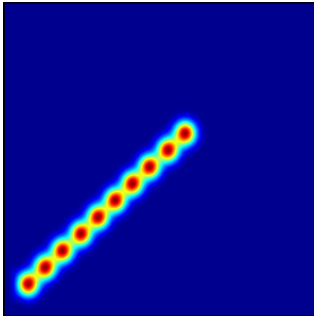


WV(sum) (N = 9)

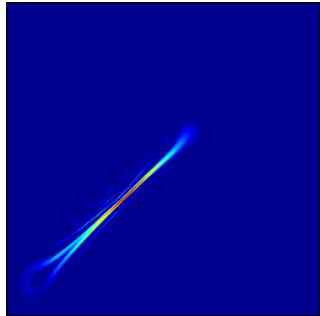


interférences et localisation

sum(WV) (N = 10)

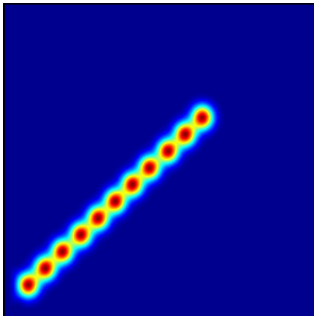


WV(sum) (N = 10)

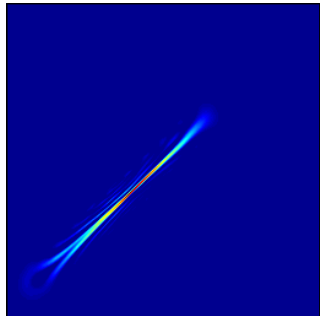


interférences et localisation

sum(WV) (N = 11)

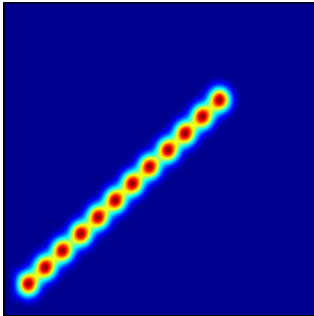


WV(sum) (N = 11)

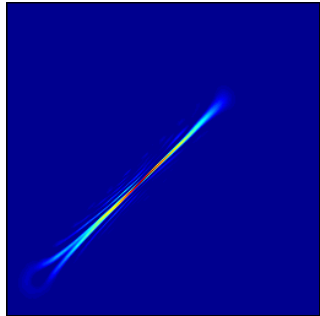


interférences et localisation

sum(WV) (N = 12)

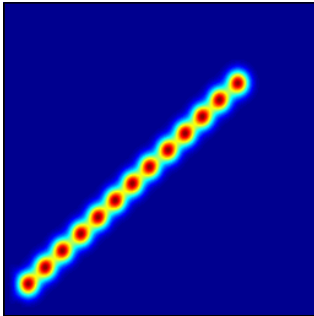


WV(sum) (N = 12)

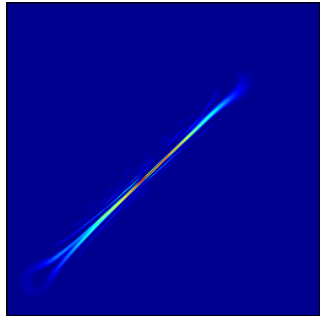


interférences et localisation

sum(WV) (N = 13)

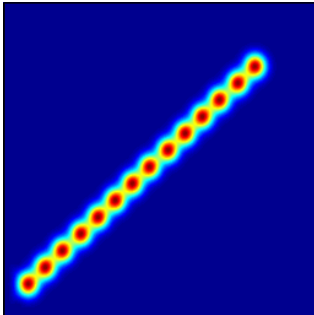


WV(sum) (N = 13)

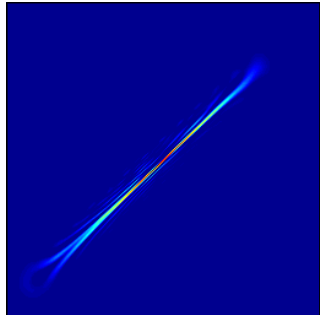


interférences et localisation

sum(WV) (N = 14)

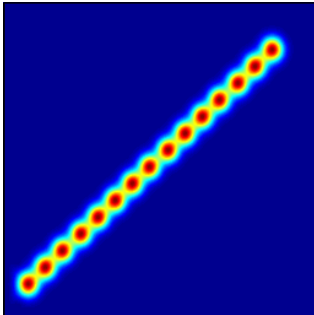


WV(sum) (N = 14)

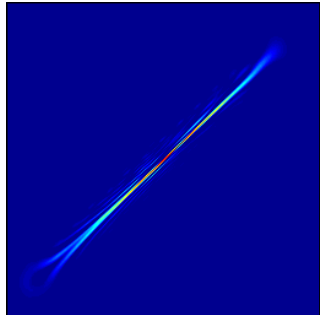


interférences et localisation

sum(WV) (N = 15)

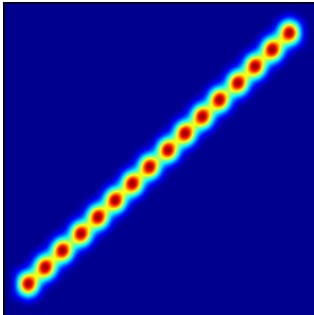


WV(sum) (N = 15)

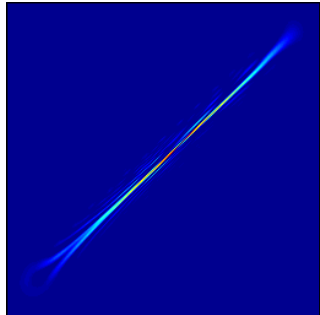


interférences et localisation

sum(WV) (N = 16)



WV(sum) (N = 16)



des classes de distributions quadratiques

Observation

Beaucoup de distributions quadratiques proposés dans la littérature depuis plus d'un siècle (e.g., spectrogramme et DWV) : aucune n'étend complètement la notion de densité spectrale au cas non stationnaire.

Principe d'unicité conditionnelle — Des **classes** de distributions quadratiques de la forme $\rho_x(t, f) = \langle x, \mathbf{K}_{t,f} x \rangle$ peuvent être construites sur la base de **contraintes de covariance** :

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \rightarrow & \rho_x(t, f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{T}x)(t) & \rightarrow & \rho_{\mathbf{T}x}(t, f) = (\tilde{\mathbf{T}}\rho_x)(t, f) \end{array}$$

des classes de distributions quadratiques

- **Classe de Cohen** — Le choix des **translations**

$(\mathbf{T}_{t_0, f_0} x)(t) = x(t - t_0) \exp\{i2\pi f_0 t\}$ conduit à la **classe de Cohen** (Cohen, '66) :

$$C_x(t, f) := \iint W_x(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - f) ds d\xi,$$

avec $\Pi(t, f)$ “arbitraire” (et spécifiable via des contraintes additionnelles).

- **Variantes** — D'autres choix sont possibles, e.g.,

$(\mathbf{T}_{t_0, f_0} x)(t) = (f/f_0)^{1/2} x(f(t - t_0)/f_0) \rightarrow$ **classe affine** (Rioul & F, '92), etc.

une interprétation alternative de la classe de Cohen

- **Dualité distribution-corrélation** — Dans le cas “stationnaire”, la distribution d’énergie **fréquentielle** peut s’estimer comme image de Fourier de la corrélation **temporelle** $\langle x, \mathbf{T}_\tau x \rangle$, éventuellement pondérée.
- **Extension** — Dans le cas “non stationnaire”, il faut recourir à une **corrélation temps-fréquence** $A_x(\xi, \tau) \propto \langle x, \mathbf{T}_{\tau, \xi} x \rangle$ (**fonction d’ambiguïté**) qui, après pondération et transformation de Fourier, conduit à la classe de Cohen :

$$C_x(t, f) = \iint \varphi(\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) e^{-i2\pi(\xi t + \tau f)} d\xi d\tau.$$

[WVvsAF.m]

intérêts des classes “à la Cohen”

- **Unification** — Fixer un noyau (e.g., $\Pi(t, f)$) **définit** une distribution : cadre unificateur pour la plupart des propositions de la littérature (Wigner-Ville, spectrogramme, Page, Levin, Rihaczek, etc.).
- **Paramétrisation** — Les propriétés d'une distribution se relient à des conditions d'**admissibilité** du noyau associé \Rightarrow possibilité simplifiée d'**évaluation** et de **conception**.

un exemple de définition

Spectrogramme — Si l'on prend le cas du **spectrogramme** de fenêtre $h(t)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_x^{(h)}(t, f) &= \left| \int x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i2\pi fs} ds \right|^2 \\ &= |\langle x, \mathbf{T}_{t,f} h \rangle|^2 \\ &= \iint W_x(s, \xi) W_{\mathbf{T}_{t,f} h}(s, \xi) ds d\xi \\ &= \iint W_x(s, \xi) W_h(s-t, \xi-f) ds d\xi \end{aligned}$$

⇒ le spectrogramme est membre de la classe de Cohen, avec pour noyau

$$\Pi(t, f) = W_h(t, f)$$

un exemple de contrainte d'admissibilité

Marginale en temps — Si l'on veut avoir $\int C_x(t, f) df = |x(t)|^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int C_x(t, f) df &= \int \left(\iint \varphi(\xi, \tau) A_x(\xi, \tau) e^{-i2\pi(\xi t + \tau f)} d\xi d\tau \right) df \\ &= \int \varphi(\xi, 0) A_x(\xi, 0) e^{-i2\pi\xi t} d\xi \\ &= \int \varphi(\xi, 0) \left(\int |x(\theta)|^2 e^{i2\pi\xi\theta} d\theta \right) e^{-i2\pi\xi t} d\xi \\ &= \int |x(\theta)|^2 \left(\int \varphi(\xi, 0) e^{i2\pi\xi(\theta-t)} d\xi \right) d\theta\end{aligned}$$

⇒ le noyau associé doit nécessairement vérifier

$$\varphi(\xi, 0) = 1, \forall \xi$$

(vrai pour Wigner-Ville mais pas pour le spectrogramme)

classe de Cohen et lissages

- **Spectrogramme** — Pour une fenêtre passe-bas $h(t)$, on a la relation de **lissage** :

$$S_x^{(h)}(t, f) := |F_x^{(h)}(t, f)|^2 = \iint W_x(s, \xi) W_h(s-t, \xi-f) ds d\xi$$

- **De Wigner-Ville au spectrogramme** — Une généralisation consiste à utiliser une fonction de lissage $\Pi(t, f)$ permettant une transition **continue** et **séparable** entre Wigner-Ville et spectrogramme (distributions **pseudo-Wigner-Ville lissées**) :

Wigner – Ville ... \rightarrow *PWVL* ... \rightarrow *spectrogramme*

$$\delta(t) \delta(f)$$

$$g(t) H(f)$$

$$W_h(t, f)$$

[WV2Smovie.m]

spectre temps-fréquence

Définition (Martin, '82)

*Une des extensions les plus “naturelles” de la densité spectrale de puissance est donnée par le **Spectre de Wigner-Ville** :*

$$\mathbf{W}_x(t, f) := \int r_x\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

- **Interprétation** — TF de la corrélation **locale**.
- **Propriétés** — DSP si $x(t)$ stationnaire, marginales, etc.
- **Lien avec DWV** — Sous des conditions peu restrictives, on a $\mathbf{W}_x(t, f) = \mathbb{E}\{W_x(t, f)\}$.

estimation du spectre de Wigner-Ville

But

Approcher $\mathbb{E}\{W_x(t, f)\}$ sur la base d'une seule réalisation.

- **Hypothèse** — Stationnarité **locale** (en temps et fréquence).
- **Estimateurs** — Lissage de la DWV :

$$\hat{W}_x(t, f) = (\Pi * * W_x)(t, f)$$

i.e., classe de Cohen.

- **Propriétés** — Compromis **statistique** (biais-variance) et **géométrique** (localisation) contrôlés par $\Pi(t, f)$.

global vs. local

- **Approche globale** — La distribution de Wigner-Ville se localise parfaitement sur les **droites** du plan (chirps linéaires). On peut construire d'autres distributions se localisant sur des **courbes** plus générales (ex. : distributions de **Bertrand** adaptées aux chirps hyperboliques).
- **Approche locale** — Une autre voie consiste à repartir de la relation de lissage définissant le spectrogramme et à envisager la localisation relativement à la fréquence instantanée telle qu'elle peut être mesurée **localement**, à l'échelle de la fenêtre à court-terme \Rightarrow **réallocation**.

réallocation

- **Principe** — L'idée est (1) de remplacer le centre **géométrique** du domaine temps-fréquence de lissage par le **centre de gravité** de la distribution de Wigner-Ville sur ce domaine, et (2) de **réallouer** les valeurs calculées de la distribution lissée à ce centre de gravité local :

$$S_x^{(h)}(t, f) \mapsto \iint S_x^{(h)}(s, \xi) \delta \left(t - \hat{t}_x(s, \xi), f - \hat{f}_x(s, \xi) \right) ds d\xi.$$

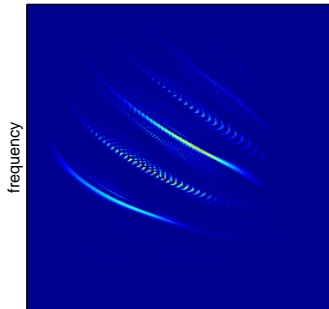
- **Remarque** — La réallocation a été introduite dans un premier temps pour les seuls spectrogrammes (Kodera *et al.*, '76), mais son principe a été généralisé à **toute** distribution résultant du lissage d'une distribution-mère localisable (Auger & F., '95).

observer
décrire
représenter
décomposer

temps-fréquence, de Fourier à Wigner
au-delà de Wigner
le cas stochastique
localisation
décisions temps-fréquence

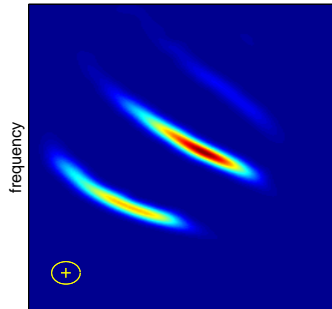
réallocation

Wigner-Ville



time

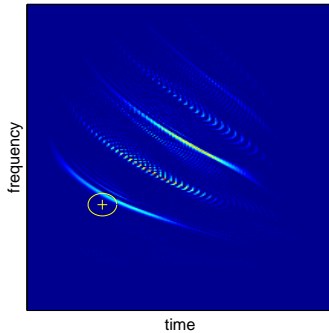
spectrogram



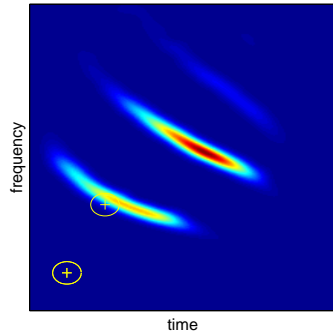
time

réallocation

Wigner-Ville

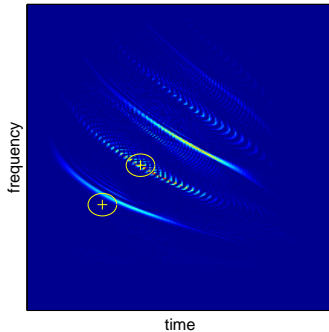


spectrogram

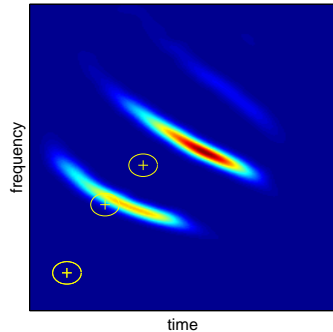


réallocation

Wigner-Ville

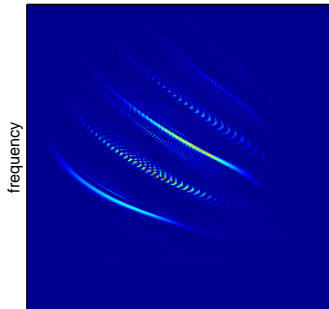


spectrogram



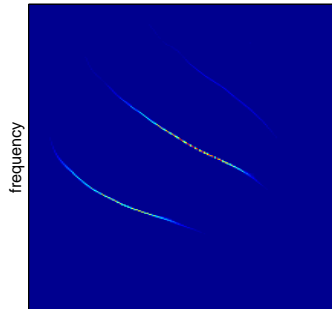
réallocation

Wigner-Ville



time

reassigned spectrogram



time

la réallocation en action

- **Spectrogramme** — Calcul **implicite** des centres de gravité locaux (Auger & F., '95) :

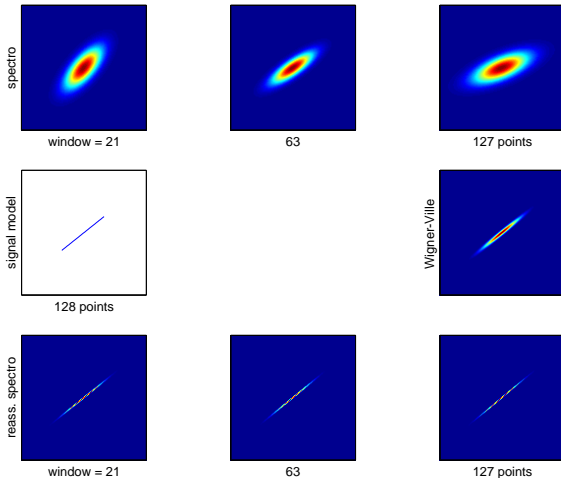
$$\hat{t}_x(t, f) = t + \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_x^{(Th)}}{F_x^{(h)}} \right\} (t, f)$$

$$\hat{f}_x(t, f) = f - \operatorname{Im} \left\{ \frac{F_x^{(Dh)}}{F_x^{(h)}} \right\} (t, f),$$

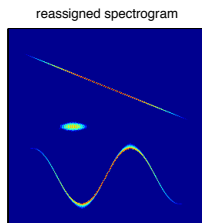
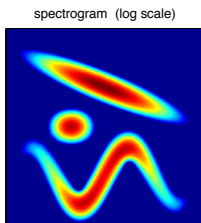
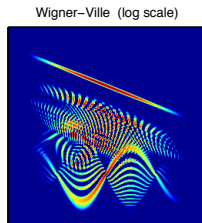
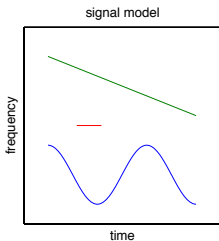
avec $(Th)(t) = t h(t)$ et $(Dh)(t) = (dh/dt)(t)/2\pi$.

- **Au-delà du spectrogramme** — Généralisations possibles à d'autres lissages (pseudo-Wigner-Ville lissée, scalogramme, etc.).

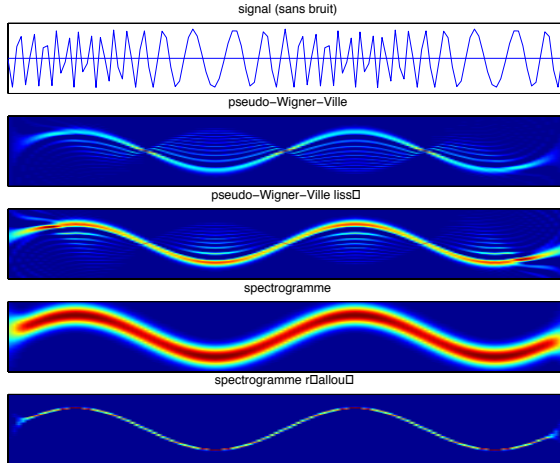
indépendance % taille des fenêtres



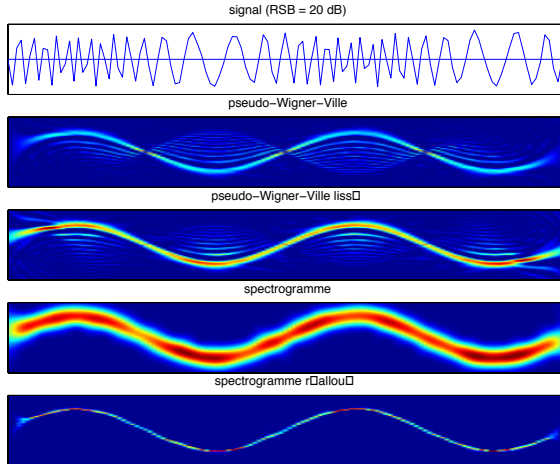
un exemple de comparaison



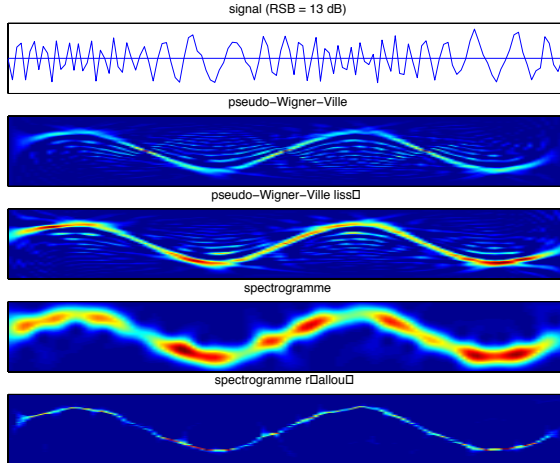
comparaison avec bruit



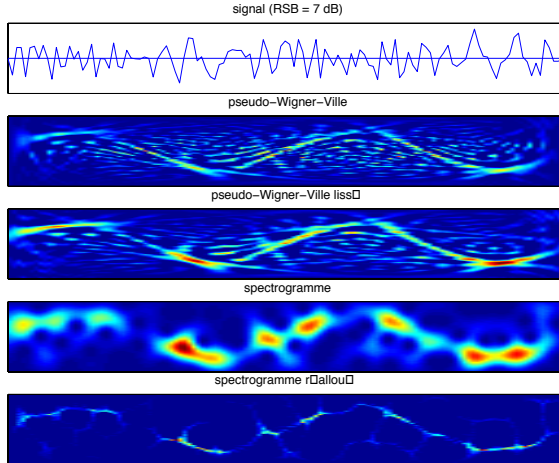
comparaison avec bruit



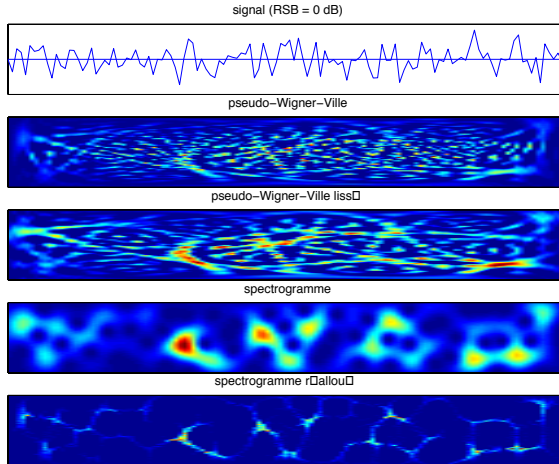
comparaison avec bruit



comparaison avec bruit



comparaison avec bruit



réallocation et estimation

- **Avantage** — Très bonnes propriétés de **localisation** sur les chirps ($>$ spectrogramme).
- **Limitation** — Grande **sensibilité au bruit** ($<$ spectrogramme).

But

Réduire les fluctuations en préservant la localisation.

Idée (Xiao & F., '06)

*Adopter une approche **multi-fenêtres**.*

retour sur l'estimation spectrale

- **Processus stationnaires** — La **densité spectrale de puissance** peut être vue comme :

$$\mathbf{S}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \right\}$$

- **En pratique** — Une seule réalisation de durée finie \Rightarrow périodogramme simple (carré de la TF) = **estimateur non consistant et à grande variance**

solution classique (Welch, '67)

- **Principe** — Méthode des **périodogrammes moyennés**

$$\hat{\mathbf{S}}_{x,K}^{(W)}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_x^{(h)}(t_k, f)$$

avec $t_{k+1} - t_k$ de l'ordre de la largeur de la fenêtre $h(t)$.

- **Compromis biais-variance** — À T (fini) fixé, augmenter K
⇒ **réduire la variance**, mais **augmenter le biais**

solution multi-fenêtres (Thomson, '82)

- **Principe** — Calculer

$$\hat{S}_{x,K}^{(T)}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_x^{(h_k)}(0, f)$$

avec $\{h_k(t), k \in \mathbb{N}\}$ une famille de fenêtres orthonormées s'étendant sur tout le support de l'observation \Rightarrow **variance réduite, sans sacrifier le biais**

- **Extension non stationnaire** — **Spectro. multi-fenêtres**

$$\hat{S}_{x,K}^{(T)}(f) \rightarrow S_{x,K}(t, f) := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_x^{(h_k)}(t, f)$$

- **Limitation** — Localisation contrôlée par le spectrogramme le plus étendu.

réallocation multi-fenêtres

Idée

Combiner les avantages de la réallocation (% localisation) et du multifenêtrage (% fluctuations) :

$$S_{x,K}(t, f) \rightarrow RS_{x,K}(t, f) := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K RS_x^{(h_k)}(t, f)$$

- ① **moyenne cohérente des chirps** (localisation indépendante de la fenêtre)
- ② **moyenne incohérente du bruit** (différentes distributions temps-fréquence pour différentes fenêtres)

en pratique

- **Choix des fenêtres — Fonctions d’Hermite**

$$h_k(t) = (-1)^k \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^k k!}} (\mathcal{D}^k \gamma)(t); \gamma(t) = e^{t^2}$$

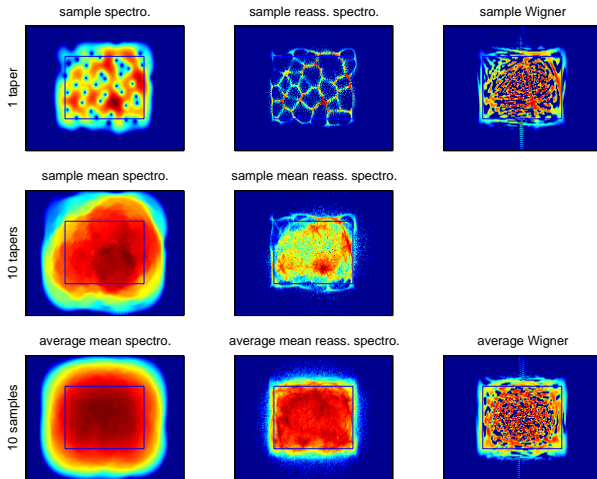
plutôt que les **Fonctions Sphéroïdales Aplaties**

- **Deux raisons principales**

- ① DWV de **symétrie elliptique** et de **concentration maximale** dans le plan.
- ② calcul **récurif** de $h_k(t)$, $(\mathcal{T}h_k)(t)$ et $(\mathcal{D}h_k)(t) \Rightarrow$ meilleure implantation **discrète**. En particulier :

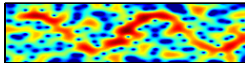
$$(\mathcal{D}h_k)(t) = (\mathcal{T}h_k)(t) - \sqrt{2(k+1)} h_{k+1}(t)$$

example 1

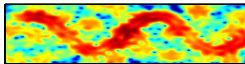


exemple 2

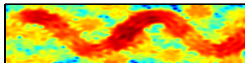
spectro. (M = 1)



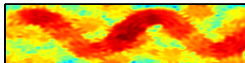
spectro. (M = 2)



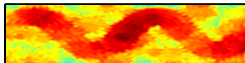
spectro. (M = 3)



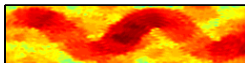
spectro. (M = 4)



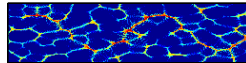
spectro. (M = 5)



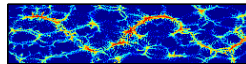
spectro. (M = 6)



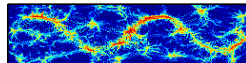
reass. spectro. (M = 1)



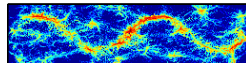
reass. spectro. (M = 2)



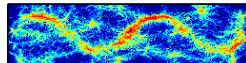
reass. spectro. (M = 3)



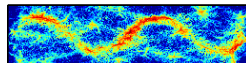
reass. spectro. (M = 4)



reass. spectro. (M = 5)

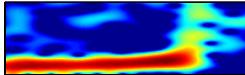


reass. spectro. (M = 6)

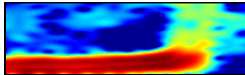


exemple 3

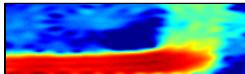
spectro. (M = 1)



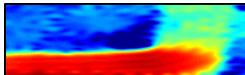
spectro. (M = 2)



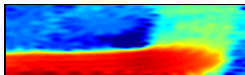
spectro. (M = 3)



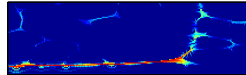
spectro. (M = 4)



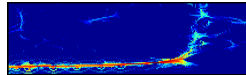
spectro. (M = 5)



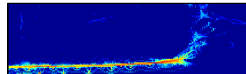
reass. spectro. (M = 1)



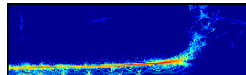
reass. spectro. (M = 2)



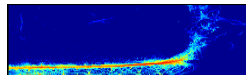
reass. spectro. (M = 3)



reass. spectro. (M = 4)



reass. spectro. (M = 5)



détection/estimation de chirps

- **Optimalité** — Filtrage adapté, maximum de vraisemblance, contraste, . . . : ingrédient de base = **corrélation** “signal reçu — copie du signal émis”.
- **Interprétation temps-fréquence** — L’**unitarité** d’une distribution temps-fréquence $\rho_x(t, f)$ garantit l’équivalence :

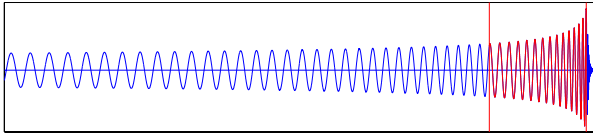
$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle \langle \rho_x, \rho_y \rangle \rangle.$$

- **Chirps** — Unitarité + localisation \Rightarrow détection/estimation par **intégration de chemin** dans le plan (ex. : Wigner-Ville et chirps linéaires).

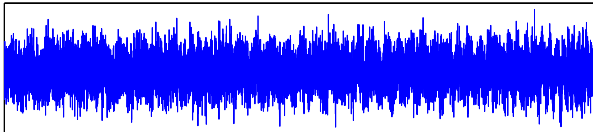
[detectTF.m]

exemple VIRGO

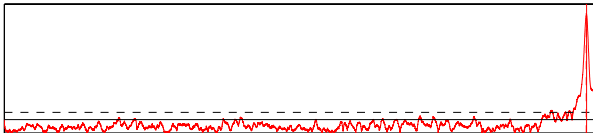
chirp de binaire coalescente + référence pour le filtre adapté



observation bruitée, SNR = -10 dB



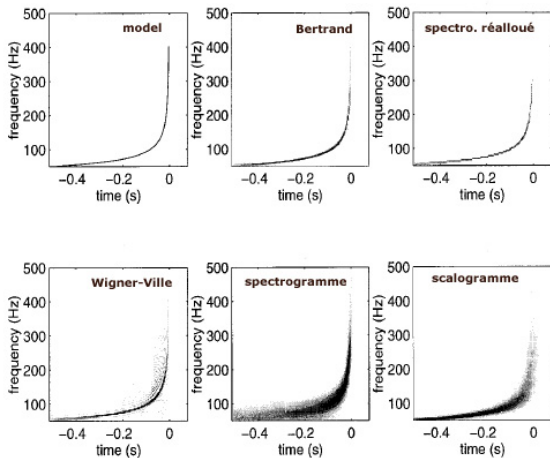
enveloppe de la sortie du filtre adapté



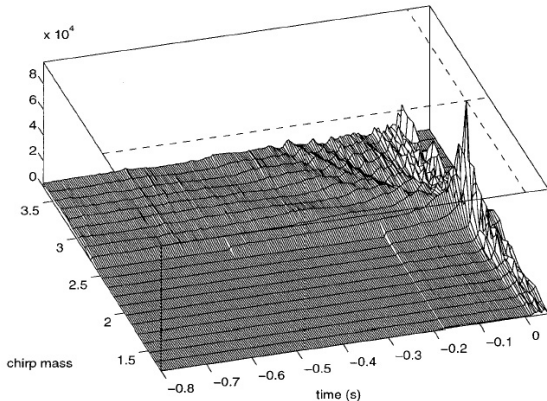
observer
décrire
représenter
décomposer

temps-fréquence, de Fourier à Wigner
au-delà de Wigner
le cas stochastique
localisation
décisions temps-fréquence

exemple VIRGO (Chassande-Mottin & F., '98)

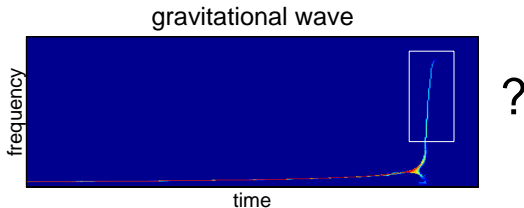


exemple VIRGO (Chassande-Mottin & F., '98)



détection temps-fréquence ?

- **Langage** — Le point de vue temps-fréquence offre un **langage** naturel pour approcher des problèmes de détection/estimation **au-delà** des situations nominales.
- **Robustesse** — Incorporation d'**incertitudes** sur le modèle d'un chirp en remplaçant la **courbe** d'intégration par un **domaine** (exemple des approximations post-newtonniennes dans le cas des ondes gravitationnelles).



exemple d'interprétation : la tolérance à l'effet Doppler

- **Localisation d'une cible mobile** — Lorsqu'il s'agit d'estimer un retard par filtrage adapté en présence d'un effet Doppler inconnu, les estimations du retard et du Doppler sont couplées ⇒ **biais** et **perte de contraste** en sortie du détecteur.
- **Problème posé** — Annuler le biais sur le retard et minimiser la perte de contraste.
- **Conception de signal** — Spécification de performances par interprétation **géométrique** de la structure temps-fréquence d'un chirp.

[doptol.m, faTFdopp.m]

décomposer

chirps et décompositions atomiques

- **Fourier** — La transformée de Fourier (TF) usuelle peut s'écrire formellement comme $(\mathcal{F}x)(f) := \langle x, e_f \rangle$, avec $e_f(t) := \exp\{i2\pi ft\}$, de telle sorte que :

$$x(t) = \int \langle x, e_f \rangle e_f(t) df.$$

- **Extensions** — Remplacer les exponentielles complexes par des chirps, considérés comme des versions **anamorphosées** d'ondes monochromatiques, ou par des “chirplets” (chirps de courte durée) \Rightarrow *TF (à court-terme, ou TO) modifiées.*

observer
décrire
représenter
décomposer

anamorphoses
chirplets
décomposition modale empirique



de Fourier à Mellin

Définition

Une **Transformée de Mellin (TM)** d'un signal $x(t) \in L^2(\mathbb{R}^+, t^{-2\alpha+1} dt)$ peut se définir par la projection :

$$(\mathcal{M}x)(s) := \int_0^{+\infty} x(t) t^{-i2\pi s - \alpha} dt =: \langle x, c \rangle.$$

- Analyse sur les chirps **hyperboliques**
 $c(t) := t^{-\alpha} \exp\{i2\pi s \log t\}$.
- $\dot{\varphi}_c(t)/2\pi = s/t \Rightarrow$, le paramètre de Mellin s peut s'interpréter comme un **taux de modulation hyperbolique**.
- La TM peut aussi se voir comme une TF **anamorphosée**, puisque $\tilde{x}(t) := e^{(1-\alpha)t} x(e^t) \Rightarrow (\mathcal{M}x)(s) = (\mathcal{F}\tilde{x})(s)$.

des “gaborettes” et des “ondelettes” aux “chirplets”

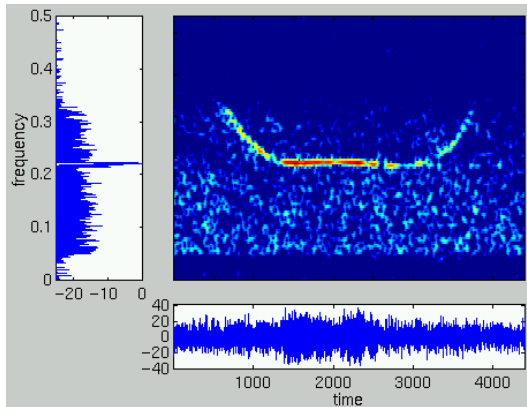
Définition

Localisation + modulation conduisent à des représentations à 4 paramètres, par exemple de la forme $\langle x, x_{t,f,\alpha,\gamma} \rangle$ avec

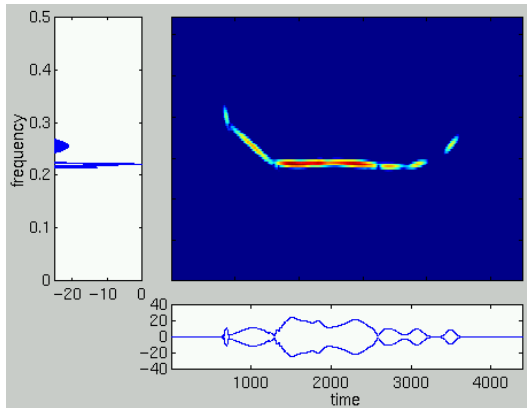
$$x_{t,f,\alpha,\gamma}(s) \propto \exp\{-\pi(\gamma + i\alpha)(s - t)^2 + i2\pi f(s - t)\}.$$

- **La décomposition comme un problème d'estimation** — Les chirplets constitutives d'un signal peuvent être **identifiées** séquentiellement par des techniques de type “matching (ou basis) pursuit” (Mallat & Zhang, '93; Chen & Donoho, '99). Elles peuvent aussi être **estimées** au sens du maximum de vraisemblance (O'Neill & F., '98–'00).
- **Limitations de nature “paramétrique”** — Compromis entre **richesse de dictionnaire** et **complexité algorithmique**.

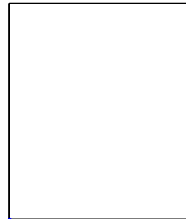
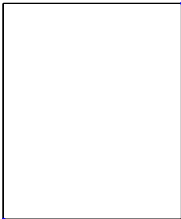
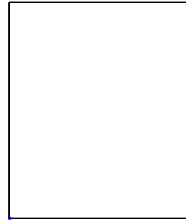
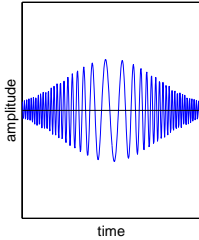
observation



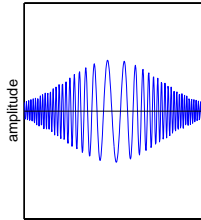
approximation à 8 chirplets



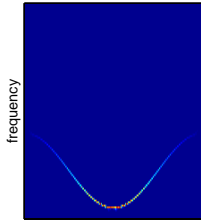
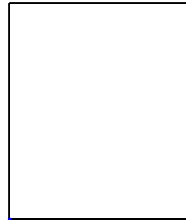
signal 1



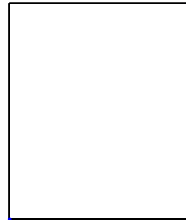
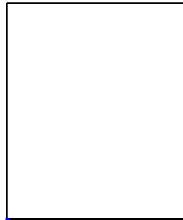
signal 1



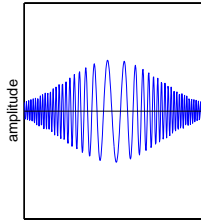
time



time

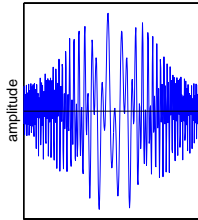


signal 1

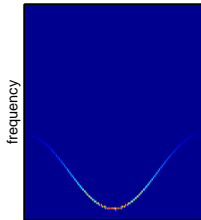
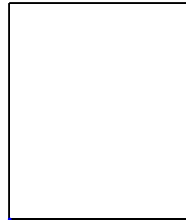


time

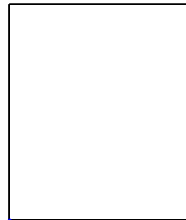
signal 2



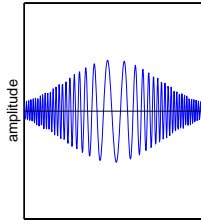
time



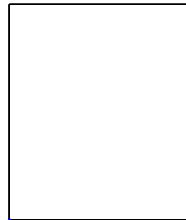
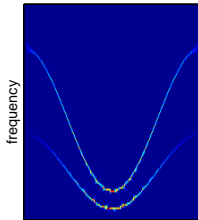
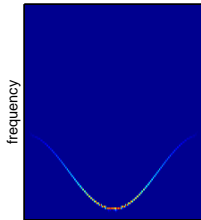
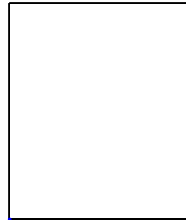
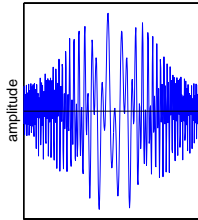
time



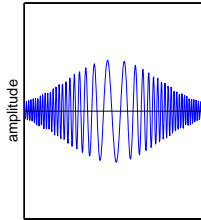
signal 1



signal 2

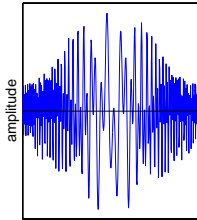


signal 1



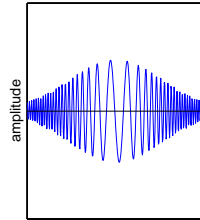
time

signal 2

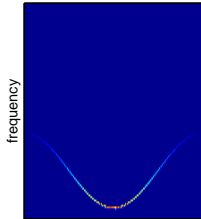


time

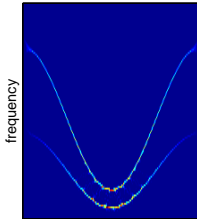
lower component



time



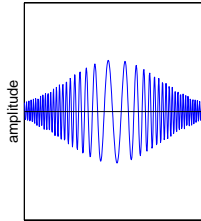
time



time

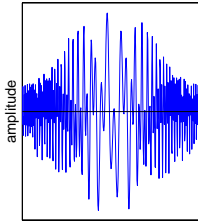


signal 1



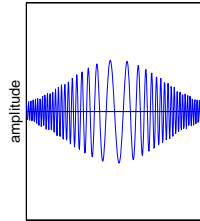
time

signal 2



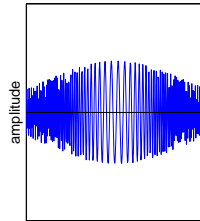
time

lower component

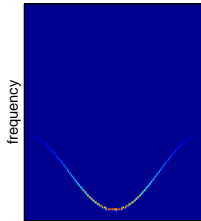


time

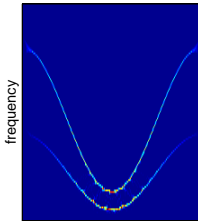
upper component



time

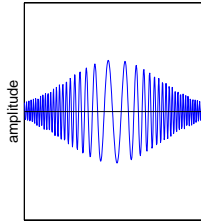


time



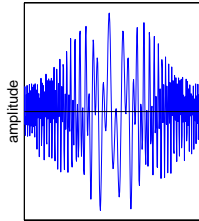
time

signal 1



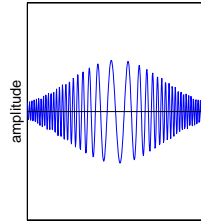
time

signal 2



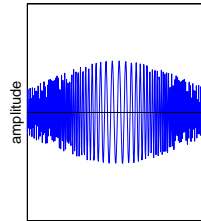
time

lower component

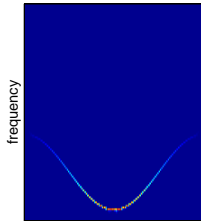


time

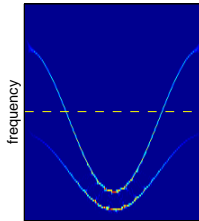
upper component



time

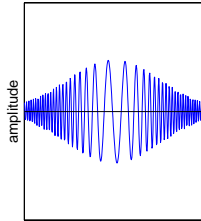


time



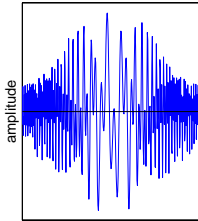
time

signal 1



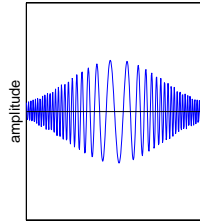
time

signal 2



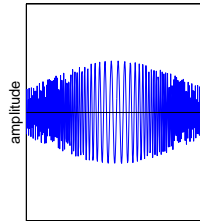
time

lower component

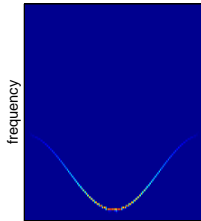


time

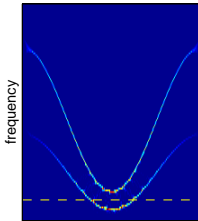
upper component



time

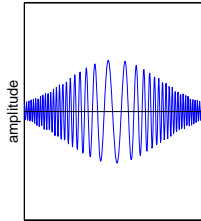


time



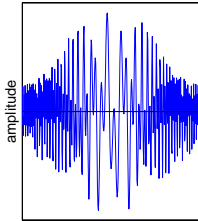
time

signal 1



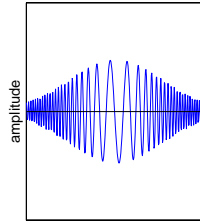
time

signal 2

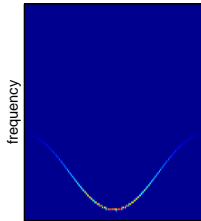


time

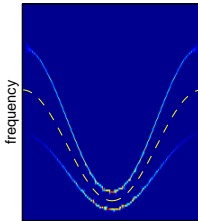
lower component



time

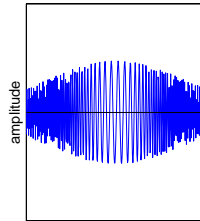


time



time

upper component



time

“EMD” (*Empirical Mode Decomposition*)

But

Sur la base d'une observation $x(t)$, obtenir une représentation de la forme :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(t),$$

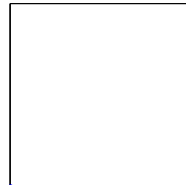
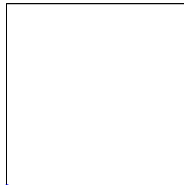
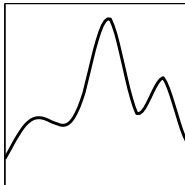
où les $a_k(t)$ mesurent des “modulations d'amplitude” et les $\psi_k(t)$ des “oscillations”.

principe

Idée

“signal = oscillations rapides sur oscillations lentes”.

signal

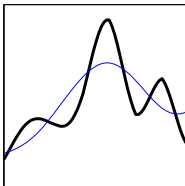


principe

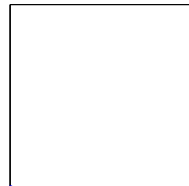
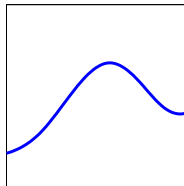
Idée

“signal = oscillations rapides sur oscillations lentes”.

signal =



slow oscillation ...

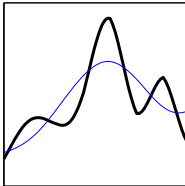


principe

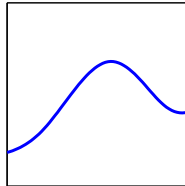
Idée

“signal = oscillations rapides sur oscillations lentes”.

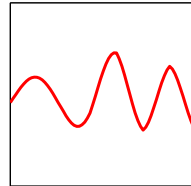
signal =



slow oscillation ...



+ fast oscillation

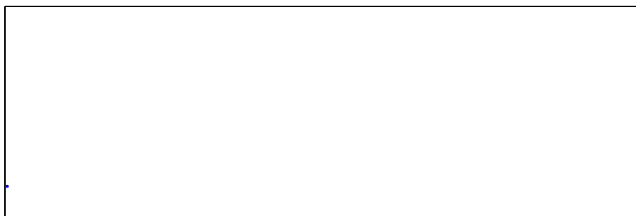
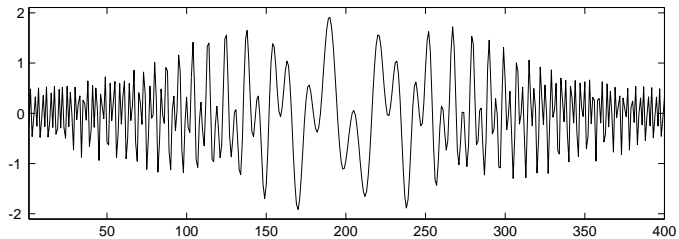


l'algorithme de Huang

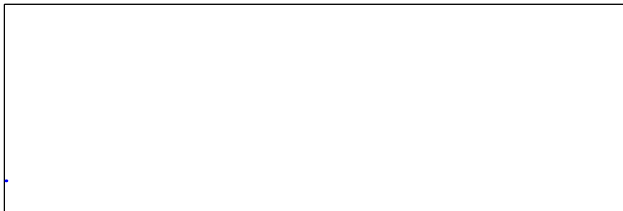
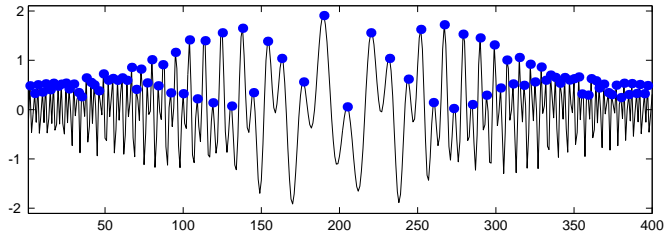
Mise en œuvre (Huang *et al.*, '98) — Identifier (localement) l'oscillation la plus rapide, soustraire celle-ci au signal de départ et itérer sur le résidu :

- ① identifier les maxima et minima locaux du signal
- ② en déduire une enveloppe supérieure et une enveloppe inférieure par interpolation (splines cubiques)
 - ① soustraire l'enveloppe moyenne du signal
 - ② itérer jusqu'à ce que $\#\{\text{extrema}\} = \#\{\text{zéros}\} \pm 1$
- ③ soustraire le mode ainsi obtenu du signal
- ④ itérer sur le résidu

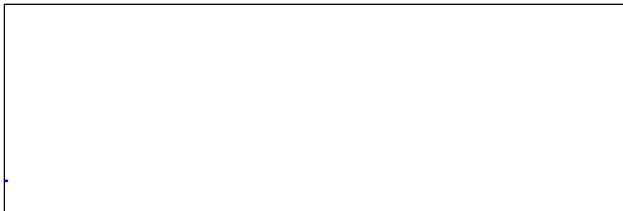
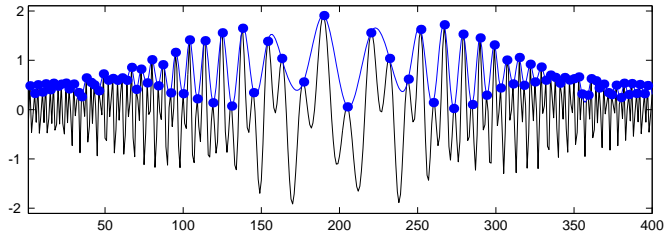
IMF 1; iteration 0



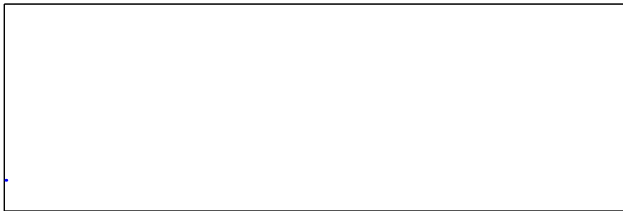
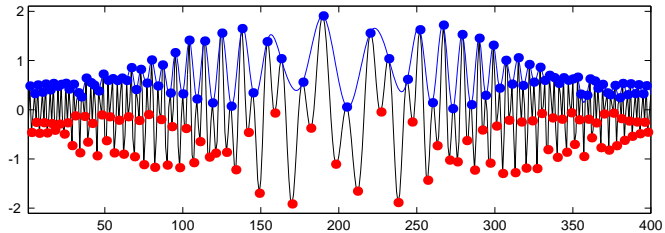
IMF 1; iteration 0



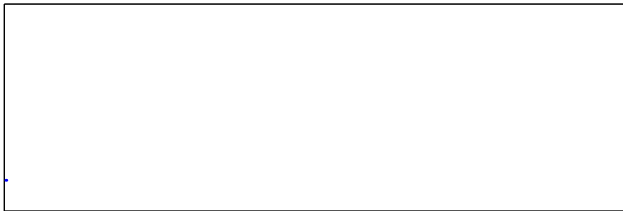
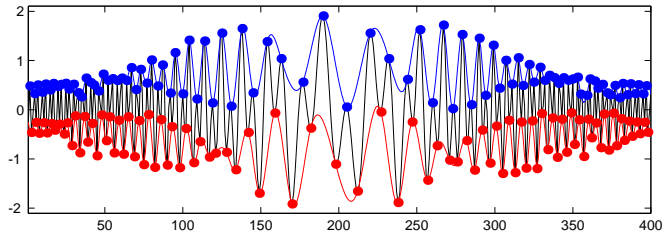
IMF 1; iteration 0



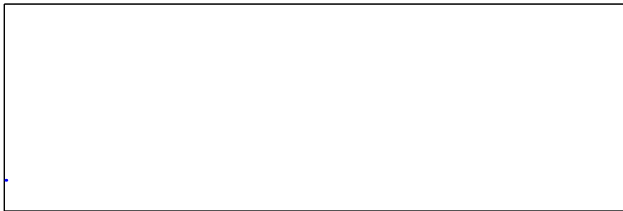
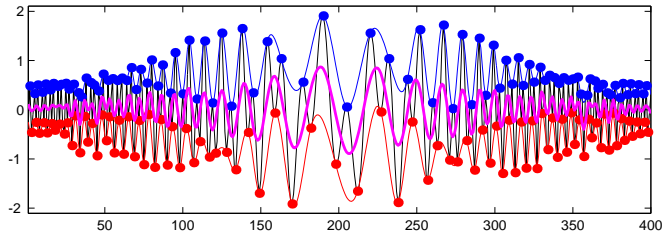
IMF 1; iteration 0



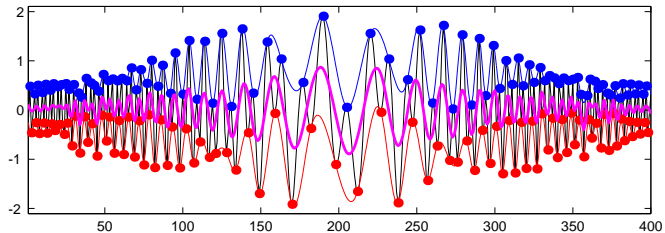
IMF 1; iteration 0



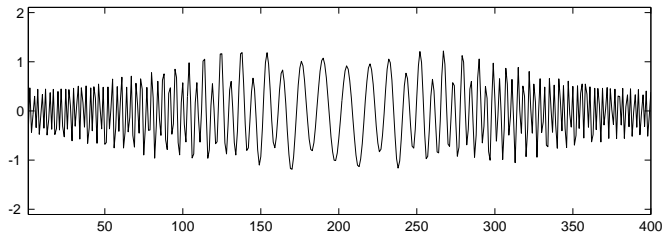
IMF 1; iteration 0



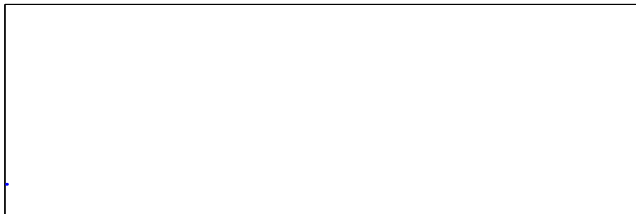
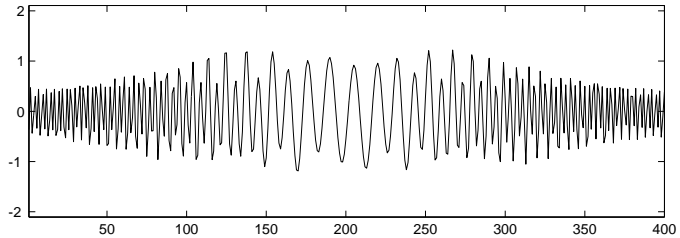
IMF 1; iteration 0



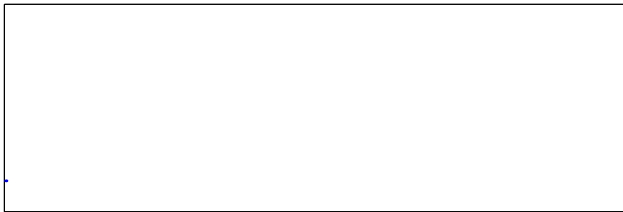
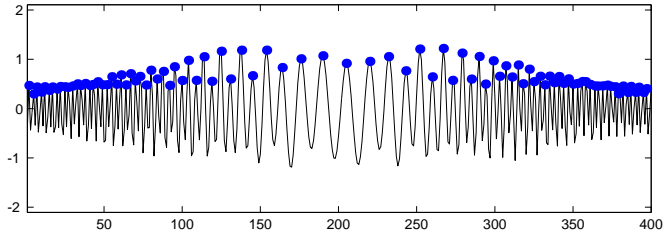
residue



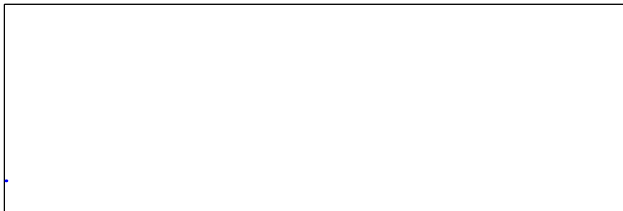
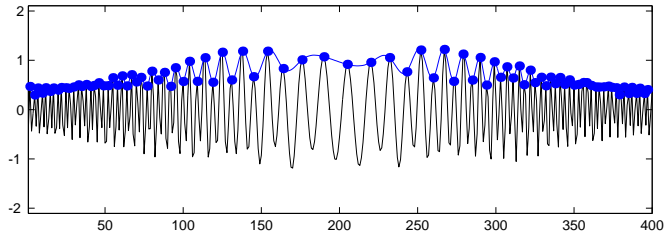
IMF 1; iteration 1



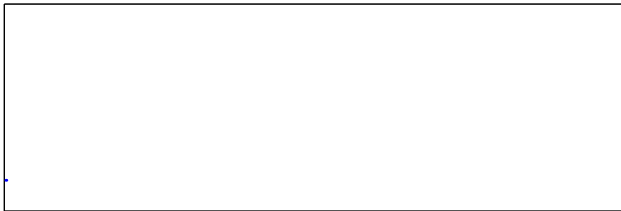
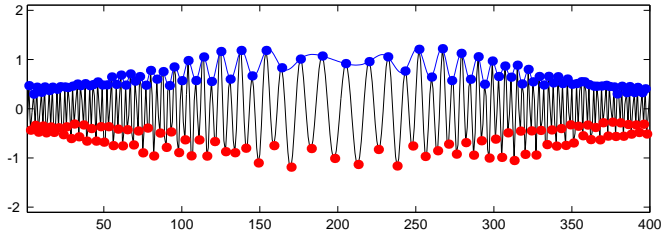
IMF 1; iteration 1



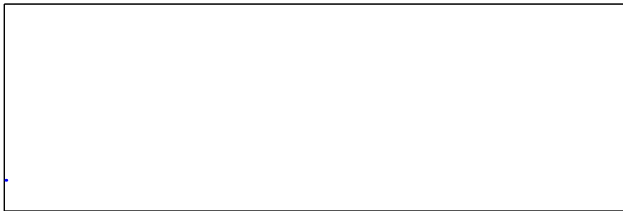
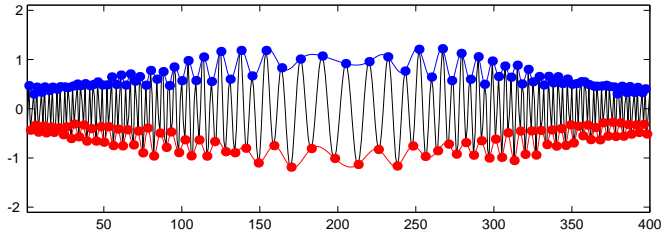
IMF 1; iteration 1



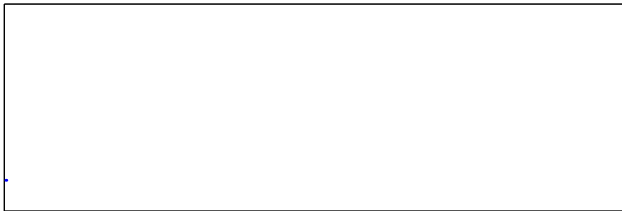
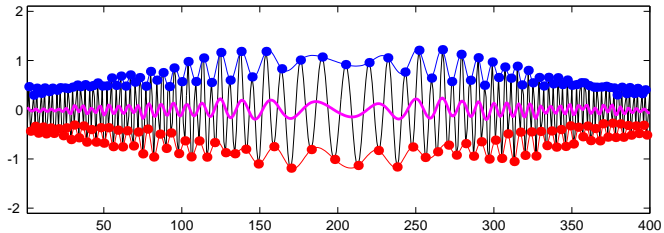
IMF 1; iteration 1



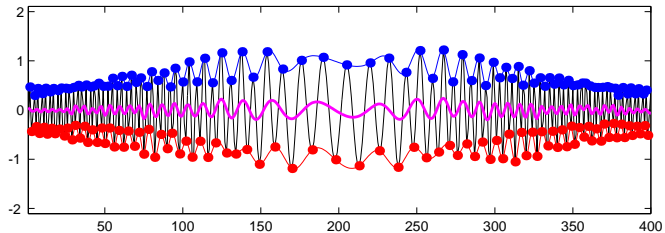
IMF 1; iteration 1



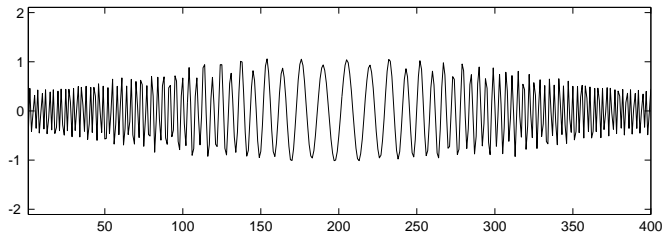
IMF 1; iteration 1



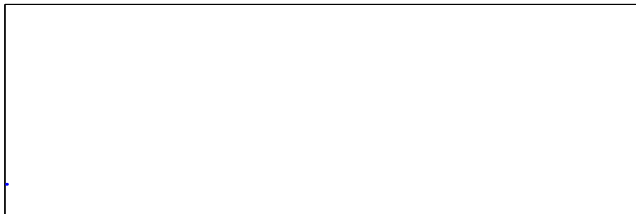
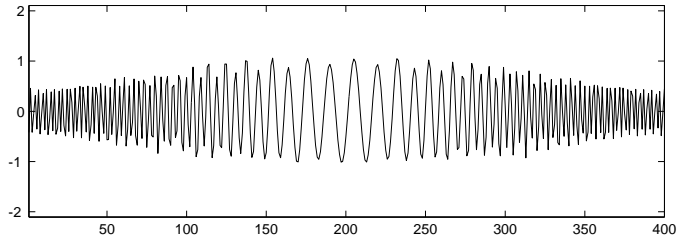
IMF 1; iteration 1



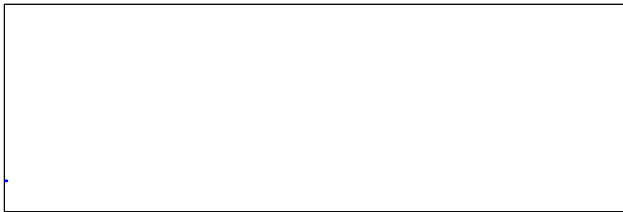
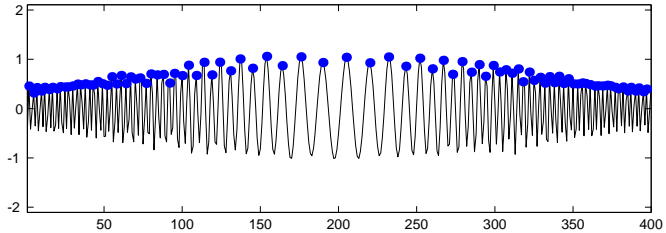
residue



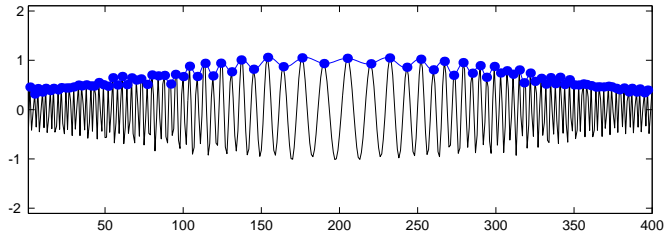
IMF 1; iteration 2



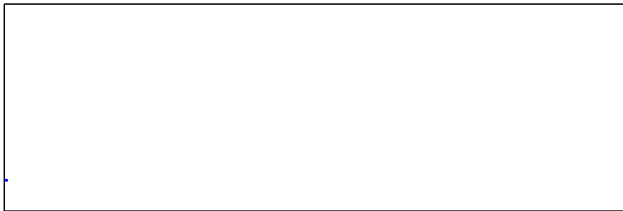
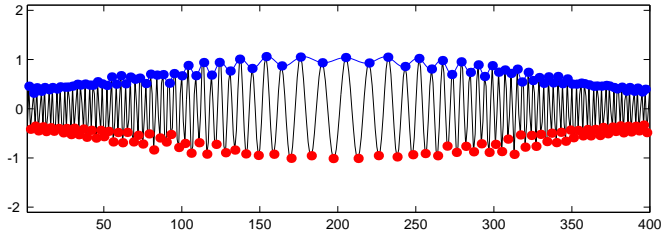
IMF 1; iteration 2



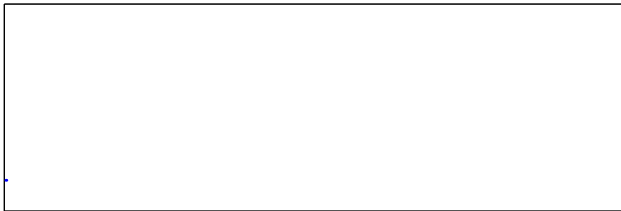
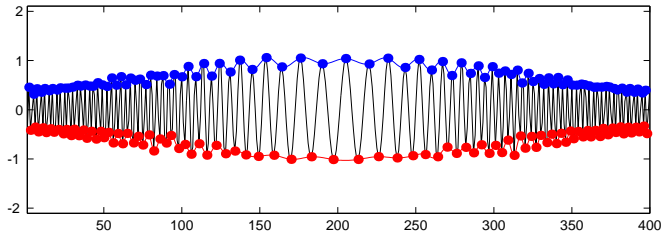
IMF 1; iteration 2



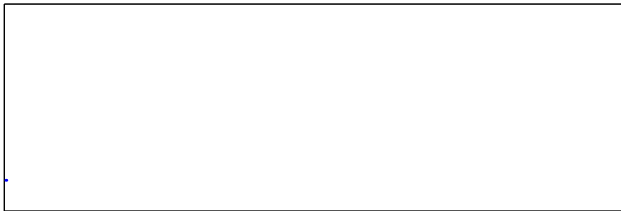
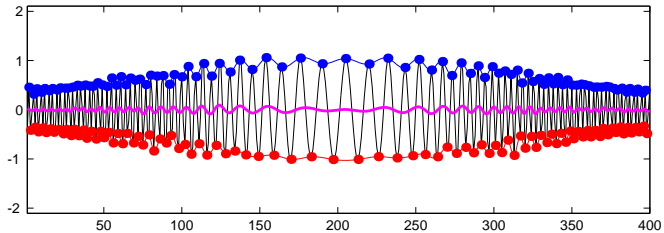
IMF 1; iteration 2



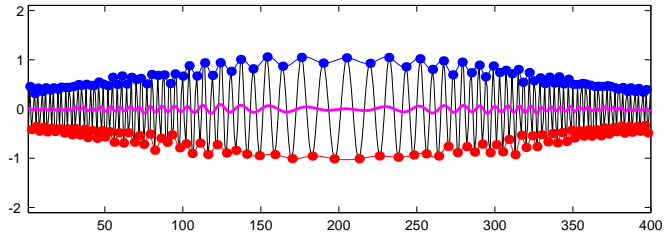
IMF 1; iteration 2



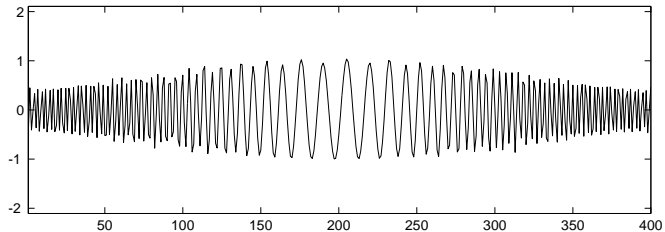
IMF 1; iteration 2



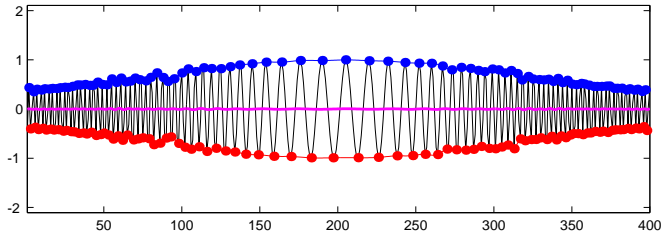
IMF 1; iteration 2



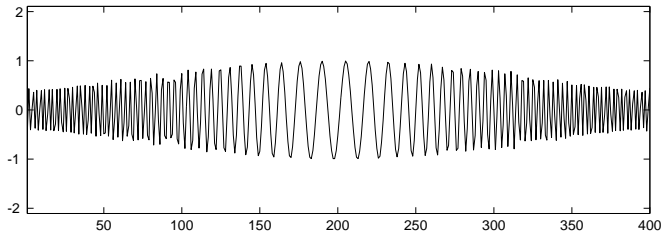
residue



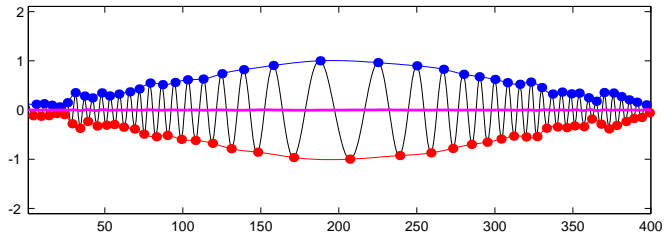
IMF 1; iteration 5



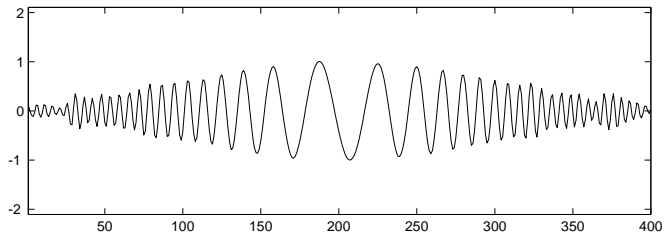
residue



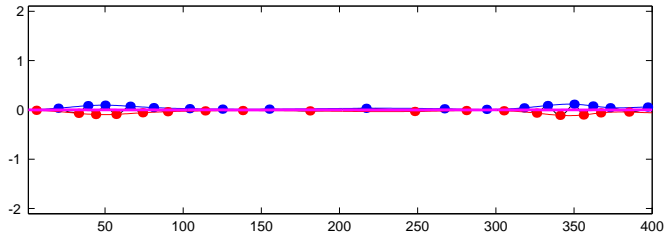
IMF 2; iteration 2



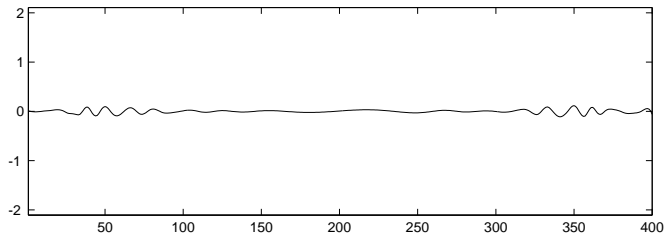
residue



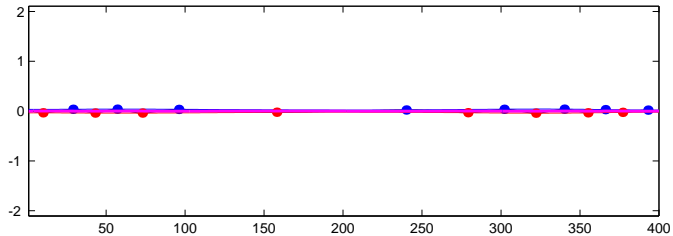
IMF 3; iteration 14



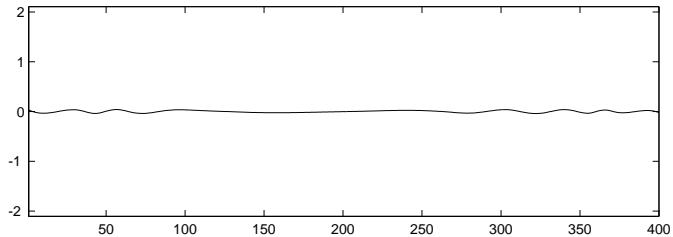
residue



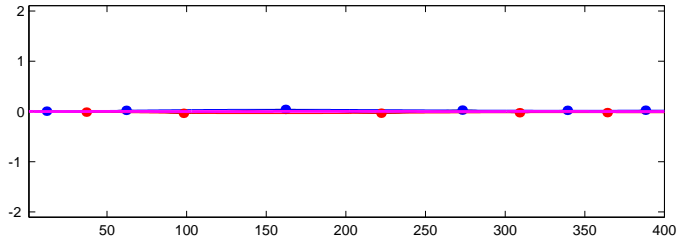
IMF 4; iteration 42



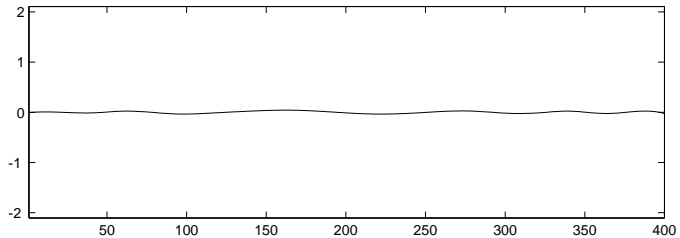
residue



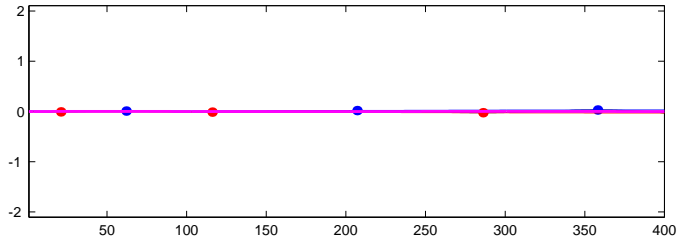
IMF 5; iteration 13



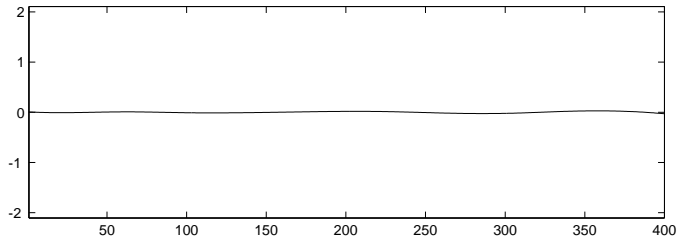
residue



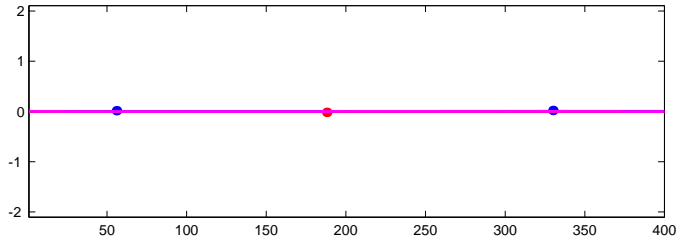
IMF 6; iteration 8



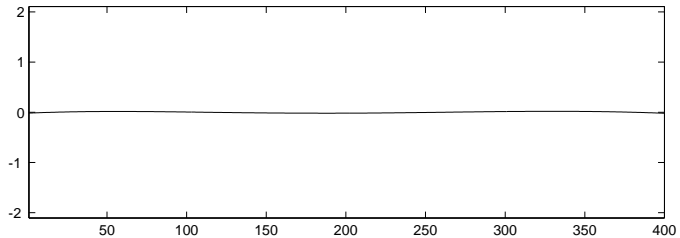
residue

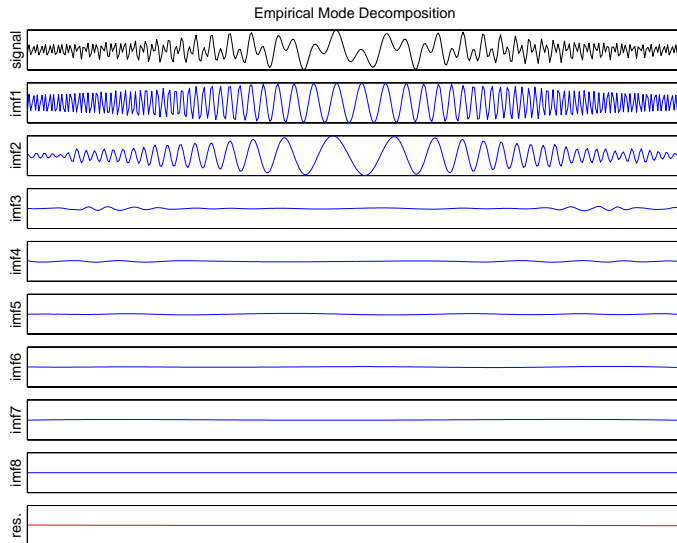


IMF 7; iteration 21

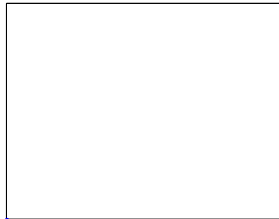
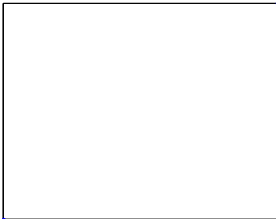
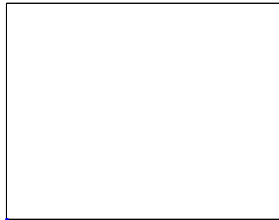
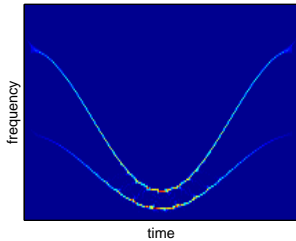


residue

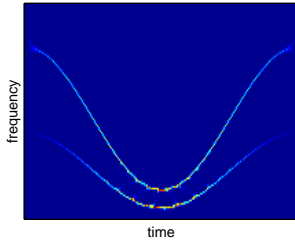




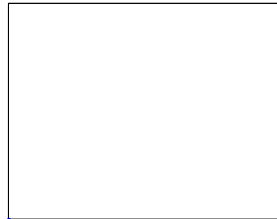
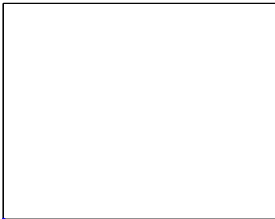
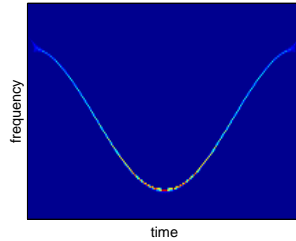
signal



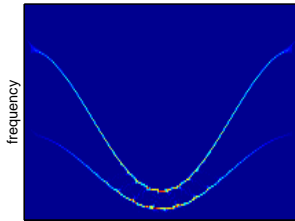
signal



mode #1

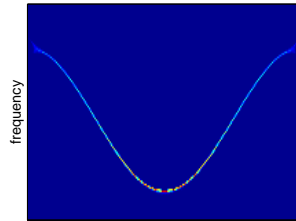


signal



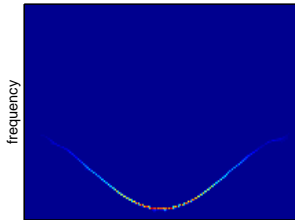
time

mode #1

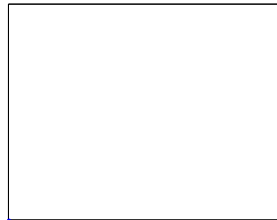


time

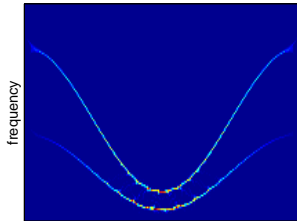
mode #2



time

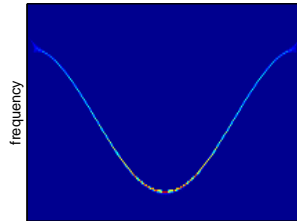


signal



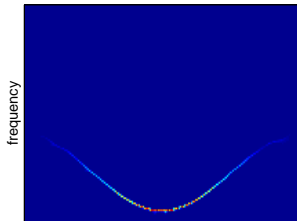
time

mode #1



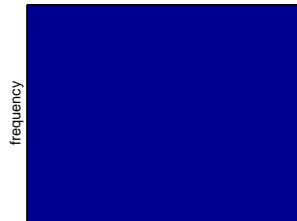
time

mode #2



time

mode #3

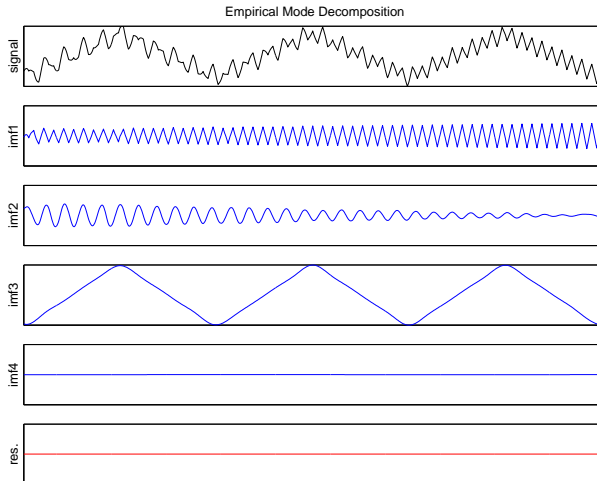


time

quelques caractéristiques

- **Localité** — La méthode opère à l'échelle d'**une** oscillation.
- **Adaptativité** — La décomposition est entièrement **pilotée par les données**.
- **Oscillation quelconque** — Pas de présumé sur le caractère harmonique ou non des oscillations \Rightarrow 1 oscillation **non linéaire** = 1 mode.
- **Multirésolution** — Le processus itératif explore **séquentiellement** les échelles constitutives “naturelles” d'un signal.
- **Evaluation des performances** — La décomposition est définie comme la sortie de l'algorithme (**pas de définition analytique**) \Rightarrow recours intensif à des **simulations numériques** dans des situations bien contrôlées.

oscillations non linéaires



multirésolution

- **Approche stochastique et fréquentielle** — Décomposition et analyse spectrale, mode par mode, d'un bruit large bande.
- **Modèle** — Bruit gaussien fractionnaire (fGn), de densité spectrale $\mathcal{S}(f) \sim |f|^{1-2H}$, avec $0 < H < 1$ (exposant de Hurst).

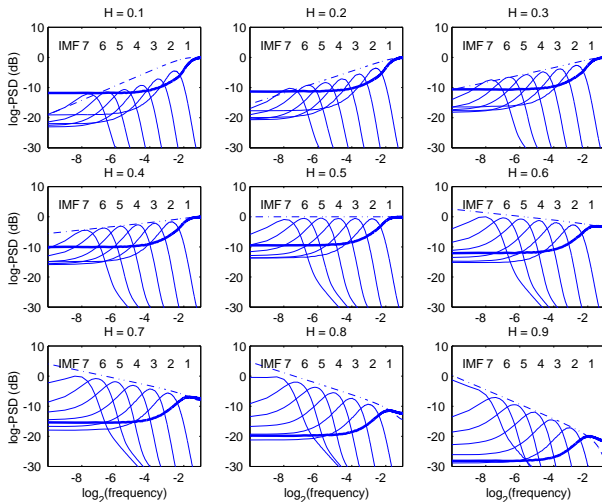
Résultat

Émergence "spontanée" d'une structure de banc de filtres quasi-dyadique, auto-similaire (F., Gonçalves et Rilling, '03) :

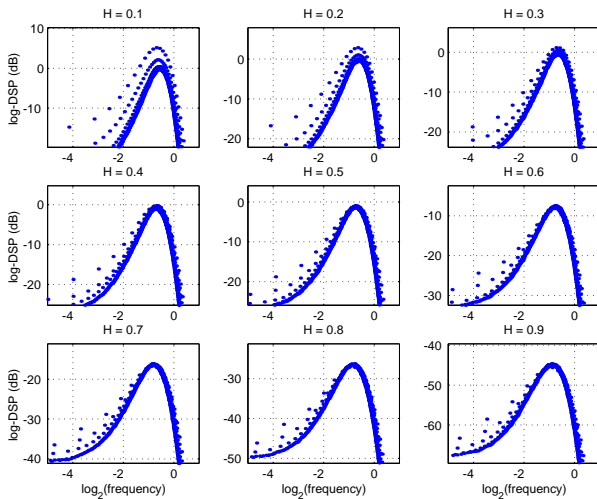
$$\mathcal{S}_{k',H}(f) = \rho_H^{\alpha(k'-k)} \mathcal{S}_{k,H}(\rho_H^{k'-k} f)$$

pour tout $k' > k \geq 2$, avec $\alpha = 2H - 1$ et $\rho_H \approx 2$.

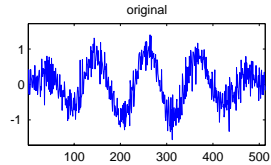
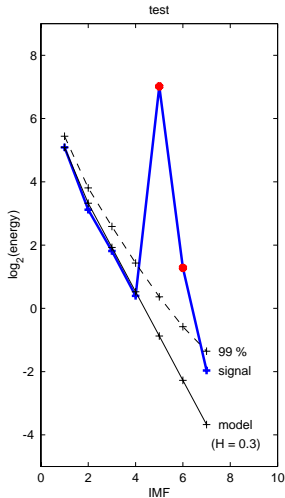
multirésolution



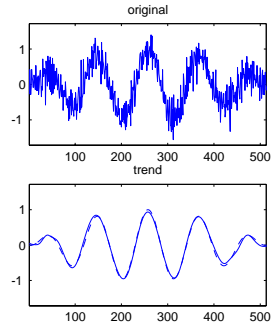
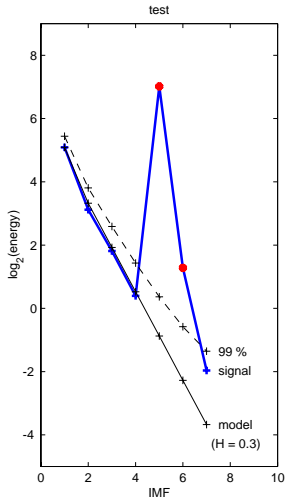
multirésolution



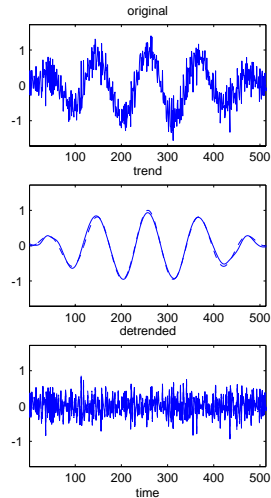
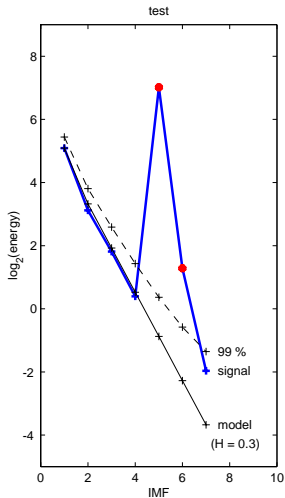
un exemple jouet



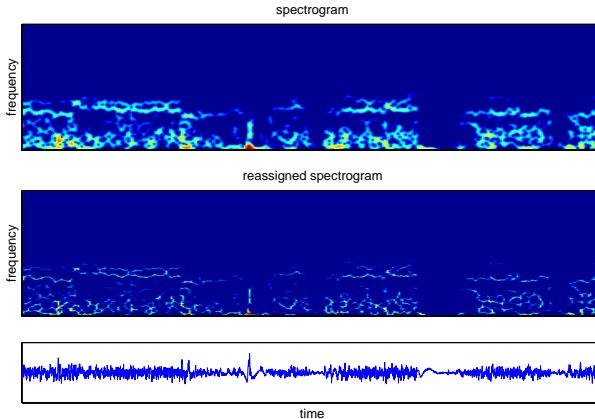
un exemple jouet



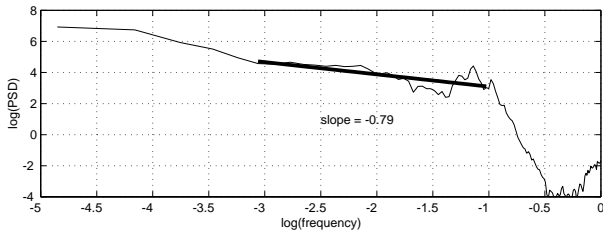
un exemple jouet



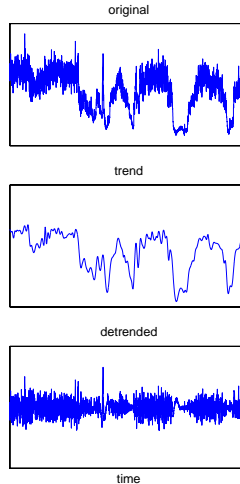
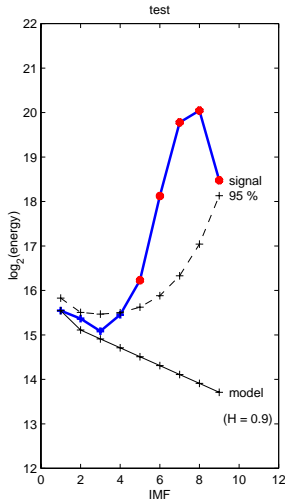
un exemple réel (variabilité cardiaque)



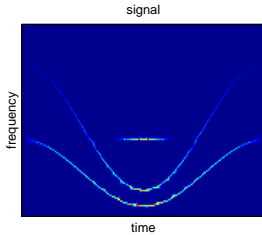
un exemple réel (variabilité cardiaque)



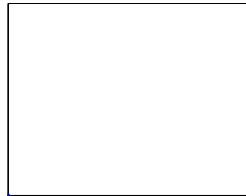
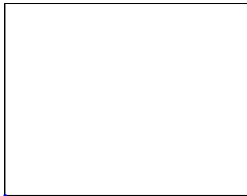
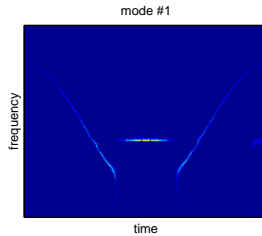
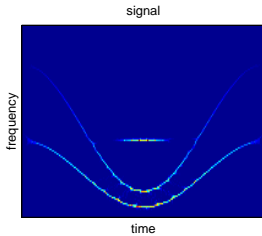
un exemple réel (variabilité cardiaque)



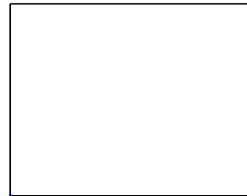
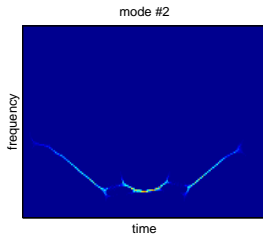
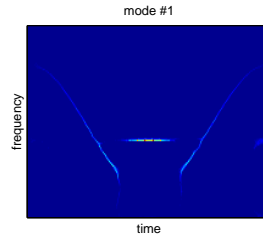
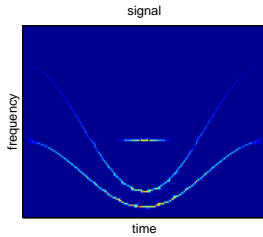
un exemple de limitation



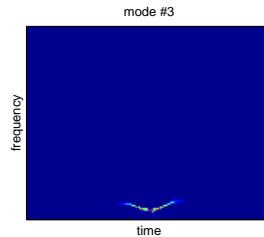
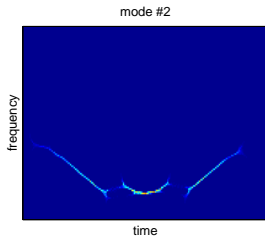
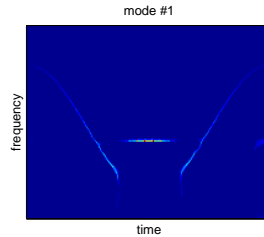
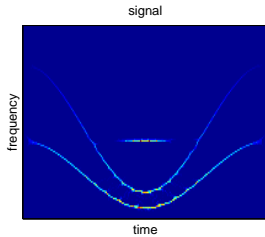
un exemple de limitation



un exemple de limitation



un exemple de limitation



monographies

- L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, 1995.
- S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1997.
- R. Carmona, H.L. Hwang & B. Torrèsani, *Practical Time-Frequency Analysis*, Academic Press, 1998.
- F. Hlawatsch, *Time-Frequency Analysis and Synthesis of Linear Signal Spaces*, Kluwer, 1998.
- P. Flandrin, *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*, Academic Press, 1999.

ouvrages collectifs

- A. Papandreou-Suppappola (ed.), *Applications in Time-Frequency Signal Processing*, CRC Press, 2003.
- B. Boashash (ed.), *Time-Frequency Signal Analysis and Processing*, Elsevier, 2003.
- Ch. Doncarli & N. Martin (eds.), *Décision dans le Plan Temps-Fréquence*, Traité IC2, Hermes, 2004.
- F. Auger & F. Hlawatsch (eds.), *Temps-Fréquence — Concepts et Outils*, Traité IC2, Hermes, 2005.
- N.E. Huang & S.S.P. Shen (eds.), *Hilbert-Huang Transform: Introduction and Applications*, World Scientific, 2005.

preprints & codes Matlab

- <http://tftb.nongnu.org/>
- <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/>

contact

`Patrick.Flandrin@ens-lyon.fr`

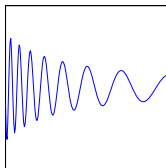
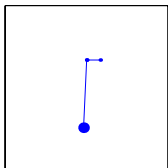
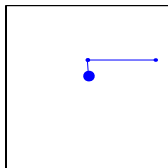
pendule simple



[expendule.m]

pendule simple

$$\ddot{\theta}(t) + (g/L)\theta(t) = 0$$



- **Longueur fixe** — $L = L_0 \Rightarrow$ petites oscillations sinusoidales, de période **fixe** $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0/g}$.
- **Longueur “lentement” variable** — $L = L(t) \Rightarrow$ petites oscillations quasi-sinusoidales, de pseudo-période **variable** $T(t) \sim 2\pi\sqrt{L(t)/g}$.

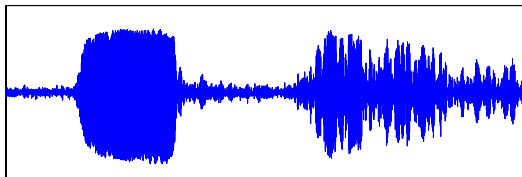
écholocation de la chauve-souris



[chauvesouris.m]

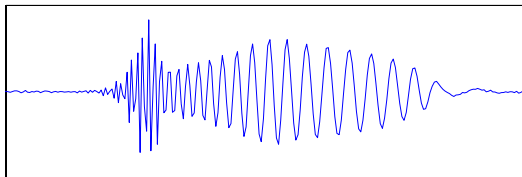
écholocation de la chauve-souris

bat echolocation call + echo



time

bat echolocation call (heterodyned)



time

écholocation de la chauve-souris

- **Système** — Système (**actif**) de navigation, sonar naturel
- **Signaux** — Ondes acoustiques ultrasonores, **brèves** (quelques ms) et “**large bande**” (quelques dizaines de kHz entre 40 et 100kHz)
- **Performances** — Proches de l’optimalité, avec **adaptation** des formes d’ondes à des tâches multiples (détection, estimation, reconnaissance, réjection d’interférences, . . .)

effet Doppler

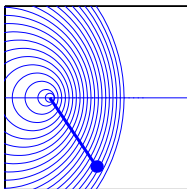


[exdoppler.m]

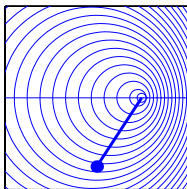
effet Doppler

- **Source monochromatique en mouvement** — Perception différentielle de la fréquence émise.

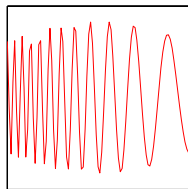
$f + \Delta f$



$f - \Delta f$



"chirp"



◀ retour

observer
décrire
représenter
décomposer

fonction de Riemann



fonction de Riemann

$$\sigma(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin \pi n^2 t$$

