Licence de Physique-Chimie
Licence d'Informatique et Mathématiques
Unité d'Enseignement **PHY7**

Année universitaire 2008–2009
Faculté des Sciences de Luminy
Université de la Méditerranée

Mécanique du solide & Mécanique analytique

Examen du 9 janvier 2009

Durée : 2h. Sans document et sans calculatrice

---

1 Champ de vitesses dans un solide

On considère un solide mobile par rapport à un repère euclidien fixe, d'origine O. Soit A la matrice de rotation définissant, à un instant donné, un repère euclidien lié au solide avec pour origine un point N.

1) Si M est un autre point du solide, justifier que $\mathbf{OM} = \mathbf{ON} + A\mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ est un vecteur *constant*.

2) En déduire que les vitesses $\mathbf{v}_M$ et $\mathbf{v}_N$ des points M et N du solide sont reliées par

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_N + \mathbf{MN} \times \boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur instantané de rotation du solide à l'instant considéré.

2 Opérateur d'inertie d'un solide à symétrie sphérique

Une boule de rayon R possède une densité volumique de masse, $\varrho(r)$, ne dépendant que de la distance, r, au centre, O, de la boule. On *sait* que son opérateur d'inertie, I_O, par rapport à O est proportionnel à l'opérateur identité : $I_O = \mathcal{I}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}$, où $\mathcal{I}$ est une constante positive que l'on se propose de déterminer.

1) Prouver que $\mathcal{I}$ est simplement relié à la trace $\mathrm{Tr}(I_O)$. Déduire ensuite de l'expression générale d'un opérateur d'inertie, et en choisissant un système de coordonnées sphériques, que

$$\mathcal{I} = \frac{8\pi}{3}\int_0^R \varrho(r) r^4 dr.$$

2) Application : trouver l'opérateur d'inertie I_O d'une boule *homogène* de masse M, de centre O et de rayon R (on exprimera ϱ en fonction de M et de R).

3 Mouvement d'une boule chargée électriquement

Une boule homogène de masse M, de rayon R, et portant une charge électrique q uniformément répartie dans son volume, se déplace sans frottement sur un plan horizontal. La position de son centre d'inertie G est donnée, à chaque instant, dans un repère euclidien fixe $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, par $\mathbf{OG} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + R\,\mathbf{e}_z$, où x et y désignent les coordonnées du point de contact, C, de la boule avec le plan $z = 0$ à l'instant t. (Faire un graphique !)

1) Sachant que cette boule *roule sans glisser*, déduire de l'Equation (1) ci-dessus l'expression des coordonnées $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ de la vitesse, $\mathbf{v}_G$, du point G en fonction de R et des coordonnées, $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, du vecteur instantané de rotation $\boldsymbol{\omega}$ de la boule.

La boule est soumise à son poids (constant) $\mathbf{P} = -M\mathrm{g}\,\mathbf{e}_z$ et à la force de Coulomb $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ où $\mathbf{E} = E\,\mathbf{e}_x$ est un champ électrique constant. (Ces forces sont appliquées au point G.) On désignera par $\mathbf{N} = N_x\,\mathbf{e}_x + N_y\,\mathbf{e}_y + N_z\,\mathbf{e}_z$ la force de réaction du plan au point de contact, C.

2) Déduire des Théorèmes généraux I et II l'expression de (i) l'accélération, $\dot{\mathbf{v}}_G$, du point G et de (ii) la dérivée temporelle, $\dot{\boldsymbol{\ell}}_G$, du moment angulaire de la boule par rapport à G en fonction de $\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{N}$, de M et $\mathbf{CG}$.

3) Utiliser le résultat de l'Exercice 2 ci-dessus pour donner $\boldsymbol{\ell}_G$ en fonction de $\boldsymbol{\omega}$, de M et de R.

4) Déduire des questions précédentes (i) les composantes $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ de l'accélération $\dot{\mathbf{v}}_G$, ainsi que (ii) les composantes $(\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_y)$ de la dérivée temporelle $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ du vecteur instantané de rotation de la boule en fonction de N_x, N_y, N_z et des constantes du problème.

5) Montrer, par élimination de $\mathbf{N}$ de ce système, que le mouvement du centre d'inertie G est gouverné par l'équation différentielle : $m\dot{\mathbf{v}}_G = q\mathbf{E}$ où m est une masse que l'on exprimera en fonction de M. Donner la trajectoire $G(t)$ du centre d'inertie de la boule en fonction des conditions initiales $G(0)$ et $\mathbf{v}_G(0)$.

6) Déterminer $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ en fonction des constantes M, R, qE. Donner l'expression de $\boldsymbol{\omega}(t)$ pour une condition initiale $\boldsymbol{\omega}(0)$ donnée.

7) En déduire l'expression explicite de la force de réaction $\mathbf{N}$ en fonction des constantes du problème.