Mécanique du solide & Mécanique analytique

Examen du 11 janvier 2008

Durée : 3h. Sans document et sans calculatrice

I. Repère mobile et accélération de Coriolis

On considère un repère euclidien fixe, $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_x\, \vec{e}_y\, \vec{e}_z)\}$, au centre O de la terre, le vecteur $\vec{e}_z$ donnant la direction du pôle nord. Un repère $\mathcal{R}' = \{O, (\vec{e}_r\, \vec{e}_\theta\, \vec{e}_\varphi)\}$ associé à un choix de coordonnées sphériques r, θ, φ est défini par $(\vec{e}_r\, \vec{e}_\theta\, \vec{e}_\varphi) = (\vec{e}_x\, \vec{e}_y\, \vec{e}_z)A$ où la matrice de changement de base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Prouver que A est le produit de deux matrices de rotation. Conclusion ?

2) Le repère (euclidien) $\mathcal{R}'$ est attaché à la terre ; c'est un *repère mobile* (au cours du temps t) tel que $\varphi = \omega t$ avec $\omega = \text{const.} > 0$ et $\theta = \text{const.}$ Calculer la matrice $\dot{A}A^{-1}$.

3) En déduire le vecteur instantané de rotation, $\boldsymbol{\omega}$, de la terre. Que représentent ω et $\boldsymbol{\omega}/\omega$?

4) Donner les composantes $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_r, \Omega_\theta, \Omega_\varphi)$ de $\boldsymbol{\omega}$ dans le repère mobile $\mathcal{R}'$. Quel angle $\boldsymbol{\Omega}$ fait-il avec la direction verticale $(1, 0, 0)$? Faire un graphique.

5) Soient $\mathbf{V} = (0, V_\theta, V_\varphi)$ les composantes de la vitesse instantanée d'un fleuve ; déterminer les composantes horizontales $\mathbf{A}^\perp_{\text{Cor}} = (A_\theta, A_\varphi)$ de l'accélération de Coriolis $\mathbf{A}_{\text{Cor}} = -2\,\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$, en fonction de $V_\theta, V_\varphi, \omega$ et θ. En quels points du globe a-t-on $\mathbf{A}^\perp = 0$?

6) Montrer que l'accélération de Coriolis tend à dévier le flot du fleuve vers la rive droite dans l'hémisphère nord et vers la rive gauche dans l'hémisphère sud.

II. Moments linéaire, angulaire et énergie cinétique du solide

Soient M_1 et M_2 deux points d'un solide en mouvement par rapport à un repère euclidien fixe, d'origine O. Si A est la matrice de rotation définissant, à un instant donné, un repère mobile lié au solide, on pose $\mathbf{M_1M_2} = A\mathbf{R}$.

1) Justifier que $\mathbf{OM_2} = \mathbf{OM_1} + A\mathbf{R}$ *avec* $\mathbf{R} = \text{const.}$ En déduire que les vitesses absolues $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de M_1 et M_2, à un instant donné, sont reliées par $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{M_1M_2} \times \boldsymbol{\omega}$ où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur instantané de rotation du solide.

On envisage maintenant un solide discret formé de N points matériels $M_1, \ldots, M_N$ de masses $m_1, \ldots, m_N$. On désigne par G le centre d'inertie du solide et par $\mathbf{v}_G$ sa vitesse.

2) Prouver que la vitesse de M_i est $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GM}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$.

3) Prouver que l'impulsion (moment linéaire) du solide est $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G$ où $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ est la masse totale.

4) Prouver que son moment angulaire relativement à O est de la forme $\boldsymbol{\ell}_O = \mathbf{OG} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\ell}_G$ où $\boldsymbol{\ell}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega}$ avec $I_G = -\sum_{i=1}^{N} m_i\, j(\mathbf{GM}_i)^2$ l'opérateur d'inertie relativement à G. (Que devient I_G si $N = 1$?)

5) Prouver que l'énergie cinétique du solide est $T = \frac{1}{2}M\|\mathbf{v}_G\|^2 + \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\omega}, I_G\,\boldsymbol{\omega}\rangle$. (On désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire euclidien et par $\|\cdot\|$ la norme associée.)

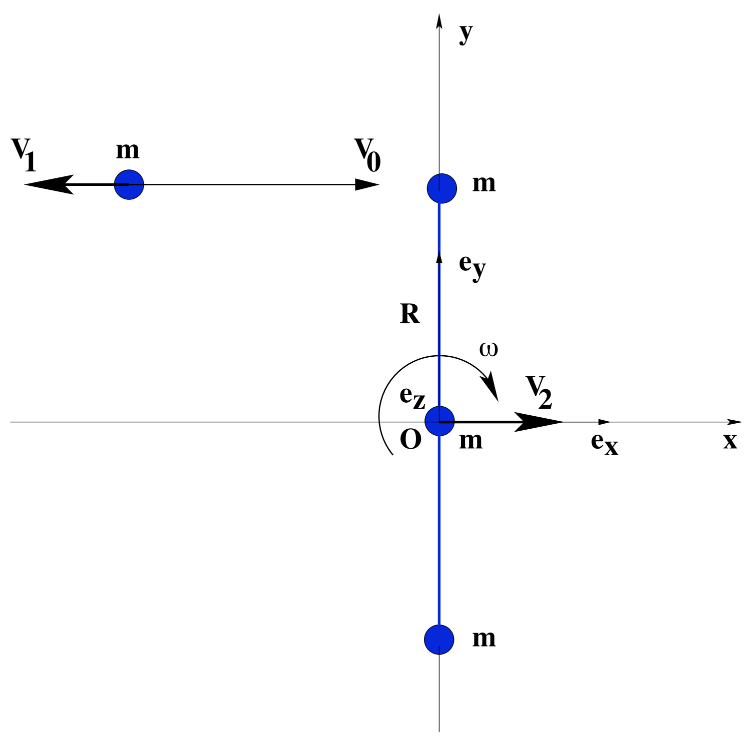
III. Collision élastique atome-molécule triatomique

Une molécule rigide est composée de trois atomes ponctuels *identiques*, de masse m, alignés sur l'axe des y ; deux atomes voisins sont séparés par une distance R (cf. la figure ci-dessous).

1) Choisir le *centre d'inertie*, O, de ce solide comme origine. Soit $(O, (\mathbf{e}_x\,\mathbf{e}_y\,\mathbf{e}_z))$ un repère euclidien associé aux coordonnées x, y, z. Trouver l'opérateur d'inertie I_O de ce rotateur en fonction de m et de R. (Calculer les moments d'inertie I_x, I_y et I_z selon les axes principaux.)

2) Un autre atome, de même masse m, entre en collision parfaitement élastique avec la molécule *au repos* avant le choc. Sa vitesse "in" (avant collision) est $\mathbf{v}_0 = v_0\,\mathbf{e}_x$. Son paramètre d'impact est R. Donner le moment linéaire $\mathbf{p}^{\text{in}} = p^{\text{in}}\,\mathbf{e}_x$, le moment angulaire $\boldsymbol{\ell}_O^{\text{in}} = \ell^{\text{in}}\,\mathbf{e}_z$ et l'énergie cinétique T^{in} du système en fonction de m, v_0 et R.

3) Après collision, la vitesse "out" de l'atome incident est $\mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{e}_x$ et celle de la molécule $\mathbf{v}_2 = v_2\,\mathbf{e}_x$; la molécule acquiert de plus, sous le choc, une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$. Donner dans ces conditions, le moment linéaire $\mathbf{p}^{\text{out}} = p^{\text{out}}\,\mathbf{e}_x$, le moment angulaire $\boldsymbol{\ell}_O^{\text{out}} = \ell^{\text{out}}\,\mathbf{e}_z$ et aussi l'énergie cinétique T^{out} du système atome-molécule en fonction de m, v_1, v_2, I_z, ω et R. (Cf. le problème précédent.)



4) Quels théorèmes garantissent ici (en l'absence de forces extérieures) : (i) $p^{\text{in}} = p^{\text{out}}$ et (ii) $\ell^{\text{in}} = \ell^{\text{out}}$? De plus, la collision étant élastique, on a : (iii) $T^{\text{in}} = T^{\text{out}}$.

5) Résoudre complètement le système d'équations (i), (ii) et (iii) : exprimer les vitesses "out" v_1 et v_2 en fonction de la vitesse "in" v_0 et donner la vitesse angulaire "out" de la molécule, ω , en fonction de v_0 et R.