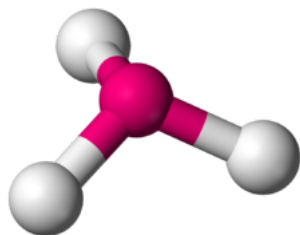

MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Examen du 11 juin 2009

Durée : 2h. Sans document et sans calculatrice

1 Opérateur d'inertie d'une molécule pyramidale

Certaines molécules, comme l'ammoniac NH_3 , ont une forme pyramidale assurant leur stabilité.



Ces molécules comportent 4 atomes disposés aux sommets d'un tétraèdre de hauteur h s'appuyant sur un triangle équilatéral : le sommet principal (en haut sur la figure) est occupé par un atome (par exemple d'azote N), les trois autres atomes identiques (e.g. des atomes d'hydrogène H) occupent les sommets d'un triangle dont les côtés sont de longueur a .

Nous nous proposons de déterminer l'opérateur d'inertie I_G d'une telle molécule par rapport à son centre d'inertie G .

1) Rappeler l'expression générale de l'opérateur d'inertie I_O d'un solide constitué de points matériels A_1, \dots, A_N , de masses m_1, \dots, m_N , par rapport à un point O . (* Noter $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ les composantes de \mathbf{OA}_i dans un repère euclidien d'origine O , pour $i = 1, \dots, N$. *)

Un atome A_4 , de masse M , occupe l'origine O d'un repère euclidien par rapport auquel les coordonnées de trois atomes A_1, A_2, A_3 de même masse, m , sont

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0, -h \right), \quad \mathbf{r}_2 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{2}, -h \right), \quad \mathbf{r}_3 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}, -h \right),$$

avec, bien sûr, $\mathbf{r}_4 = (0, 0, 0)$.

2) Déterminer les composantes de l'opérateur d'inertie I_O de cette molécule, par rapport à O , en fonction de a, h et m . (* Vérifier que la matrice de I_O est diagonale dans cette base. *)

3) Déterminer les coordonnées \mathbf{R} du centre d'inertie G de la molécule en fonction de h, m et M .

4) Rappeler (ou démontrer) la relation *générale* entre I_G, I_O, \mathbf{R} et la masse totale M_{tot} .

5) Calculer enfin les composantes de l'opérateur d'inertie I_G de cette molécule, par rapport à G .

2 Couplage minimal relativiste

1) Rappeler la forme des équations de Hamilton associées à un hamiltonien H , fonction différentiable de l'espace des phases $T^*\mathbf{R}^3$ paramétré par les variables d'impulsion $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et de position $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ et muni de sa structure de Poisson canonique.

Pour décrire les mouvements d'une particule relativiste de masse propre m et de charge électrique e , dans un champ magnétique $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ constant, on considère l'hamiltonien

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c\sqrt{\|\boldsymbol{\pi}\|^2 + m^2c^2}$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide, le vecteur $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ étant donné par

$$\pi_1 = p_1 + \frac{1}{2}eB q_2, \quad \pi_2 = p_2 - \frac{1}{2}eB q_1, \quad \pi_3 = p_3,$$

dans un référentiel lié au laboratoire.

2) Calculer les dérivées partielles $\partial H/\partial p_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Montrer qu'elles s'écrivent très simplement en fonction de H , c et de π_i .

3) Dédire des équations de Hamilton la vitesse $\dot{\mathbf{q}}$. (* Ici $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ où t représente le temps du laboratoire. *)

4) Calculer les dérivées partielles $\partial H/\partial q_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Ecrire ces quantités en fonction de H et de certaines composantes de $\boldsymbol{\pi}$ (ainsi que des constantes e, c, B du problème).

5) Dédire des équations de Hamilton l'expression de $\dot{\mathbf{p}}$.

6) Rappeler (sans calcul) la valeur de \dot{H} .

7) Dédire des questions précédentes les équations du mouvement de la particule relativiste.

Montrer qu'elles sont de la forme

$$\ddot{\mathbf{q}} = k \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}$$

où k est une quantité que l'on exprimera en fonction de e, c et H .