

MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Examen du 17 juin 2008

Durée : 3h. Sans document et sans calculatrice

1. Pendule composé

(i) Donner la densité de masse, ρ , d'une plaque carrée, homogène, de masse M et de côté a .

(ii) On choisit, dans l'espace, un repère euclidien $(O, (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ d'origine, O , l'un des sommets du carré, et dont les vecteurs \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y s'appuient sur les côtés du carré. Donner la distance $R = \|\mathbf{OG}\|$ entre le point O et le centre de masse, G , du solide en fonction de a .

(iii) Déterminer l'opérateur d'inertie, I , du carré relativement au sommet, O . Calculer, pour ce faire, la matrice de I dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ en fonction de M et a . *N.B.* Cette matrice n'est pas diagonale!

(iv) Le carré pivote maintenant sans frottement autour de son sommet fixe, O , dans le plan orthogonal au vecteur fixe \mathbf{e}_z . Sa vitesse angulaire est alors $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$, où θ désigne l'angle entre la direction *verticale*, \mathbf{e}_1 , et le vecteur \mathbf{OG} (cf. Fig. 1). Donner l'énergie cinétique, T , du solide en fonction du moment d'inertie, I_z , par rapport à \mathbf{e}_z et de $\dot{\theta}$.

(v) Le système est soumis à l'accélération constante, $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_1$, de la pesanteur. Donner l'énergie potentielle, V , du solide en fonction de M, g, R , et θ .

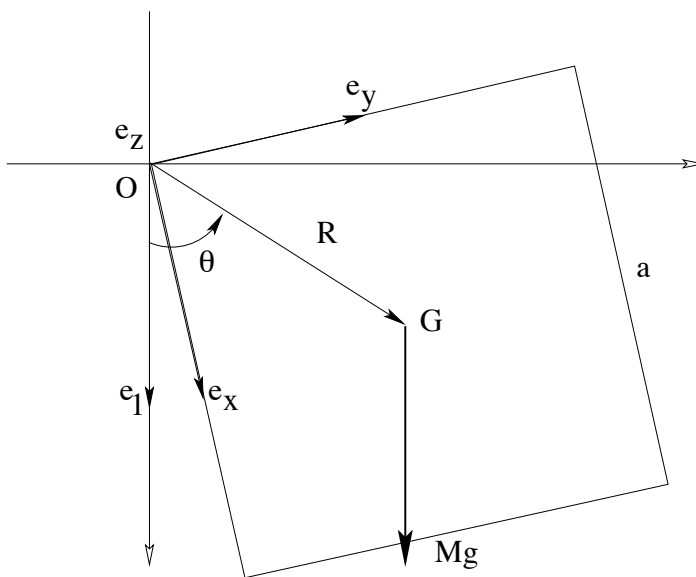


FIG. 1 – Pendule composé

(vi) En déduire le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ du système.

(vii) Déduire des équations de Lagrange l'équation différentielle du second ordre régissant le mouvement du carré dans le plan vertical.

(viii) Montrer que $\theta(t) = 0$ (quelque soit l'instant t) en constitue une solution exacte. Prouver que la linéarisation de l'équation différentielle précédente autour de cette solution est légitime. En déduire la pulsation, Ω , des petits mouvements en fonction de a et de g .

(ix) Quel est l'hamiltonien, H , du système ?

(x) On décide des conditions initiales suivantes : $\theta(0) = \frac{1}{2}\pi$, et $\dot{\theta}(0) = 0$. Déduire de la question précédente la vitesse angulaire, $\|\omega\|$, du pendule aux instants, t_0 , où $\theta(t_0) = 0$, i.e. quand le centre de masse, G , du pendule passe sous le point de suspension, O .

2. Crochets de Poisson galiléens

(i) Rappeler la définition du crochet de Poisson, $\{F, G\}$, de deux fonctions différentiables F et G de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^2$, décrit par les coordonnées canoniques (p_1, p_2, q_1, q_2) .

(ii) Calculer les crochets de Poisson $\{p_i, p_j\}$, $\{p_i, q_j\}$, et $\{q_i, q_j\}$, pour $i, j = 1, 2$.

(iii) On pose maintenant $\ell = q_1 p_2 - q_2 p_1$, $g_1 = m q_1$, $g_2 = m q_2$, et $h = (p_1^2 + p_2^2)/(2m)$, où $m = \text{const.} > 0$. Compléter le tableau suivant

$\{\cdot, \cdot\}$	ℓ	g_1	g_2	p_1	p_2	h	m
ℓ							
g_1							
g_2							
p_1							
p_2							
h							
m							

(iv) Justifier que les 7 observables $\ell, g_1, g_2, p_1, p_2, h$, et m engendrent bien une algèbre de Lie. Donner l'interprétation mécaniste de ces générateurs.

(v) Quels sont les générateurs invariants par rotation ? Quels sont ceux qui sont invariants par translation temporelle ? Quel est le statut du générateur m ?