
MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Examen partiel (17 novembre 2008)

1 Lagrangien du couplage minimal

Considérons le lagrangien $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qy(E - B\dot{x})$$

et gouvernant la dynamique d'une particule de masse m dans un champ de force extérieur ; les grandeurs q , E et B sont des constantes réelles non nulles caractéristiques du système.

1) Montrer que les variables x et z sont cycliques. Quelle propriété possèdent alors les variables conjuguées $p_x = \partial L / \partial \dot{x}$ et $p_z = \partial L / \partial \dot{z}$?

2) Dédurre des équations de Lagrange pour L l'accélération \ddot{y} en fonction de \dot{x} et des constantes du système.

3) Donner l'expression de la force $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ à laquelle est soumise la particule. Interprétation physique de \mathbf{F} ?

4) On suppose désormais qu'à l'instant $t = 0$ la particule est localisée au point $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, z_0)$ et a pour vitesse $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (\dot{x}_0, 0, 0)$. Montrer que sa trajectoire est plane.

5) Dédurre, de plus, que la vitesse complexe $v = \dot{x} + i\dot{y}$ est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{v} - i\omega v = \frac{iqE}{m} \quad (1)$$

où ω est une constante réelle que l'on exprimera en fonction de q , B et m .

6) Intégrer l'équation différentielle (1) compte tenu des conditions initiales ci-dessus.

7) En déduire finalement, compte tenu des mêmes conditions initiales, la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$ en fonction de E, B, ω, z_0 et \dot{x}_0 . Cette trajectoire est une *trochoïde*.

8) Etudier les cas particuliers : (i) $\dot{x}_0 = 0$ et (ii) $\dot{x}_0 = E/B$.

2 Un tour de grande roue

La grande roue d'un parc d'attractions possède un rayon b et tourne dans un plan fixe vertical avec une vitesse angulaire constante, ω_0 . Soit $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ un référentiel euclidien "fixe", d'origine O , le centre de la roue. (La direction de la verticale est donnée par $-\mathbf{e}_z$.) Considérons maintenant le référentiel mobile $\mathcal{R}' = (O', (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ attaché à une nacelle de la roue où s'installe le public. Faire un graphique.

1) Donner l'expression du vecteur $\mathbf{b} = \mathbf{OO}'$ à l'instant t , sachant que $\mathbf{b}|_{t=0} = b \mathbf{e}_x$.

2) Exprimer la position \mathbf{r}_{rel} d'un point matériel, M , relativement à la nacelle en fonction de sa position "absolue" $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ et de \mathbf{b} .

3) Donner son accélération relative \mathbf{a}_{rel} en fonction de son accélération absolue \mathbf{a} , de \mathbf{b} et de ω_0 .

4) En déduire, à chaque instant t , l'accélération \mathbf{g}_{rel} de la pesanteur dans le référentiel \mathcal{R}' de la nacelle si celle-ci est $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ dans \mathcal{R} .

5) Pour quelle vitesse angulaire ω_0 de la grande roue peut-on avoir $\mathbf{g}_{\text{rel}} = 0$, c'est-à-dire être en apesanteur dans la nacelle ? A quels instants t_n ($n \in \mathbb{Z}$) cela arrive-t-il alors ?

3 Crochets de Poisson

1) Rappeler l'expression du crochet de Poisson $\{F, G\}$ de deux fonctions différentiables F et G de l'espace des phases \mathbb{R}^2 paramétré par les variables conjuguées (p, q) .

2) Calculer les crochets de Poisson mutuels des trois fonctions

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad L = \frac{1}{2}(p^2 - \omega^2 q^2), \quad D = \omega pq$$

où ω est une constante dimensionnée.

3) Justifier que H, L, D engendrent une algèbre de Lie de dimension 3.