Licence Sciences Physiques et Chimiques
Licence Mathématiques et Informatique
Unité d'Enseignement **PHY7**

Année universitaire 2007–2008
Faculté des Sciences de Luminy
Université de la Méditerranée

Mécanique du solide & Mécanique analytique

Examen partiel (21 novembre 2007)

---

1 Perle pesante sur un cerceau tournant

Une perle M, de masse m, se déplace sans frottement sur un cerceau de rayon R et de centre O. Le cerceau, de masse négligeable, est mobile autour d'une direction $\mathbf{e}_z$, troisième vecteur d'une base euclidienne fixe $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On désigne par θ l'angle que forme le vecteur $\mathbf{OM}$ avec $\mathbf{e}_z$. On appelle N le point du cerceau pour lequel $\theta = \frac{1}{2}\pi$, et φ l'angle que forme $\mathbf{ON}$ avec $\mathbf{e}_x$. Faire un graphique.

1) Donner les coordonnées du point M dans le repère euclidien $(O, (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$.

2) Le cerceau tourne maintenant à vitesse angulaire $\omega_0 = \mathrm{const.}$, de sorte que $\varphi = \omega_0 t$ à l'instant t. En déduire la vitesse $d\mathbf{M}/dt$ du point matériel.

3) Donner l'énergie cinétique, T, de la perle en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ ainsi que m, R et ω_0.

4) Le système étant soumis au champ d'accélération, $\mathbf{g} = -\mathrm{g}\mathbf{e}_z$, de la pesanteur où $\mathrm{g} = \mathrm{const.} > 0$, donner l'énergie potentielle, V, de cette perle en fonction de m, g, R et θ.

5) Déterminer le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ du problème et écrire les équations de Lagrange.

6) En déduire l'équation du mouvement pour le paramètre angulaire $\theta(t)$, équation différentielle non linéaire du second ordre que l'on donnera explicitement.

7) A quelle condition $\theta(t) = \theta_0$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) en est-elle une solution exacte ? Vérifier que ces solutions sont données (modulo 2π) par (i) $\theta_0 = 0$, (ii) $\theta_0 = \pi$ et (iii) $\cos\theta_0 = C$, où C est une constante que l'on exprimera en fonction de R, g et ω_0.

8)* Linéariser l'équation du mouvement autour de ces solutions exactes (chercher des solutions $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon\theta_1(t)$ à $O(\varepsilon^2)$ près). Justifier que la linéarisation est illégitime dans le cas (i). En déduire la pulsation, ω, des petits mouvements de la perle en fonction de R, g et ω_0 dans les cas (ii) et (iii).

2 Hamiltonien relativiste

L'hamiltonien d'une particule relativiste de masse propre m (constante), plongée dans un potentiel V, est représenté par la fonction

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 c^2 + m^2 c^4} + V(\|\mathbf{q}\|)$$

de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^3$ que l'on paramètre par les variables canoniques $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$; on note $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. (La constante $c > 0$ est la vitesse de la lumière dans le vide.)

1) Calculer les dérivées partielles $\partial H/\partial p_i$ et $\partial H/\partial q_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

2) Déduire des équations de Hamilton pour H les expressions de $d\mathbf{p}/dt$ et $d\mathbf{q}/dt$ où t représente le temps du référentiel choisi.

3)* On définit le *temps propre*, τ, par $d\mathbf{q}/d\tau = \mathbf{p}/m$. Montrer que $dt/d\tau = \sqrt{1 + \|\mathbf{q}'\|^2/c^2}$ où l'on a posé $\mathbf{q}' = d\mathbf{q}/d\tau$. En déduire l'accélération propre $\mathbf{q}''$ de la particule.

4) Le moment angulaire orbital de la particule est $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} = (L_1, L_2, L_3)$. Calculer les crochets de Poisson $\{L_i, L_j\}$ pour $i, j = 1, 2, 3$.

5) Trouver la valeur des crochets de Poisson $\{H, \mathbf{L}\}$. Comment interpréter ce résultat ?