Mécanique analytique et Mécanique du solide
Fiche de TD n°1

1) Soit une masse m lancée au temps $t = 0$ à une vitesse $\vec{v}_0$ dont la direction fait un angle α avec l'horizontal (axe x), et soumise à la seule force de gravitation $-mg\vec{e}_z$.
– Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(x, z, \dot{x}, \dot{z})$ associé à ce système.
– Etablir les équations du mouvement à l'aide des équations de Lagrange.
– Résoudre ces équations dans le cas où la position de départ de la masse coïncide avec l'origine du référentiel : $x(t = 0) = z(t = 0) = 0$.
– Quelle est l'équation $z(x)$ de la trajectoire suivie par la masse ?

2) Soit un objet de masse m relié à un ressort et contraint de se déplacer sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontal. Cet objet est soumis à la force de gravitation $-mg\vec{e}_z$, et à une force de rappel $-k(\vec{r} - \vec{r}_0)$, où $k > 0$ est une constante de raideur, $\vec{r}$ est le vecteur désignant la position de la masse, et $\vec{r}_0$ est la position (vecteur constant) qui annule la force de rappel. Vous négligerez les forces de frottement.
– Déterminer les expressions de l'énergie cinétique $T(\dot{r})$ et de l'énergie potentielle $V(r)$ associées à ce système. On désigne par $r = ||\vec{r}||$ la distance entre la masse m et l'orgine du référentiel considéré, et par $\dot{r} = ||\dot{\vec{r}}||$ la norme de la vitesse.
– Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(r, \dot{r})$ et établir l'équation du mouvement à l'aide de l'équation de Lagrange.
– Résoudre cette équation différentielle en supposant qu'à $t = 0$, la position de la masse est égale à $r_0 = ||\vec{r}_0||$ et sa vitesse est nulle.
– Interpréter le résultat dans le cas où $\alpha = 0$, d'une part, et $\alpha = \pi/2$, d'autre part.

3) Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel de masse m se déplaçant dans un champ de force dérivant d'un potentiel $V(x, y, z)$ s'expriment en fonction des coordonnées sphériques comme suit :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

– Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$.
– Ecrire les équations de Lagrange pour un potentiel quelconque $V(r, \theta, \varphi)$.
– Trouver l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ d'un pendule sphérique de masse m et de longueur l soumis au champ de pesanteur. A partir des équations de Lagrange, il vous est demandé d'établir les équations du mouvement.

4) Une perle glisse sans frottement sur un fil ayant la forme d'une cycloïde d'équations :

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

avec a, une constante strictement positive, et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$, puis l'équation du mouvement associé à cette perle.
- Montrer que l'on peut réécrire cette équation sous la forme $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$, avec $u = \cos(\theta/2)$.
- Trouver l'expression de ω et résoudre l'équation différentielle.

5) Soient deux masses m_1 et m_2, telles que $m_1 \geq m_2$, qui sont lâchées au temps $t = 0$ des altitudes h_1 et h_2, telles que $h_1 > h_2$. Ces masses sont soumises à la force de gravitation et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse avec un coefficient de proportionnalité η identique pour les deux masses.
- Déterminer le lagrangien $\mathcal{L}$.
- Calculer les forces généralisées $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.
- Ecrire les équations de Lagrange associées et les résoudre.
- A quel instant t la première masse rejoindra-t-elle la seconde (on négligera les termes exponentiels dans les solutions pour répondre à cette question) ?
- Que se passe-t-il lorsque $m_1 = m_2$? Et lorsque $\eta = 0$?

6) Nous considérons une particule, de masse m et de charge $-e$, plongée dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$.
- Déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire ϕ associés.
  Pour vous aider, il vous est proposé de supposer A_x et A_y indépendants de z et liés par la relation $\partial A_y/\partial x = -\partial A_x/\partial y$, et de prendre $A_z = 0$.
- Calculer le lagrangien et établir les équations du mouvement.
- Déterminer la trajectoire de la particule pour les conditions initiales suivantes : $\vec{r}(t = 0) = 0$ et $\vec{v}(t = 0) = v_0\vec{e}_x$.

7) Soit deux pendules simples, de longueurs l_1 et l_2 ($l_1 \approx l_2$) et de masses m_1 et m_2, reliés entre eux à leurs extrémités par un ressort de constante de raideur $k > 0$. On supposera que ces deux pendules sont contraints de se déplacer dans le plan $\{x0z\}$. Leurs points de suspension sont respectivement positionnés en $x = 0$ et $x = d$, où d est la longueur du ressort au repos.
- Donner les expressions de l'énergie cinétique $T(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ et de l'énergie potentielle $V(\theta_1, \theta_2)$.
- Dans le cas où les angles θ_1 et θ_2 que font les pendules avec la verticale sont petits, trouver les expressions approchées de $T(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ et de $V(\theta_1, \theta_2)$ en effectuant un développement limité à l'ordre 2 par rapport aux angles θ_1 et θ_2.
- Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ associé.
- Etablir les équations du mouvement et les résoudre.
- Discuter les différents types de mouvement des deux pendules.

8) N objets ponctuels, de même masse m, reliés entre eux par des ressorts de même constante de raideur $k > 0$, se déplacent le long d'un axe x. L'objet le plus gauche et l'objet le plus droite sont reliés par des ressorts identiques à des parois dont les positions sont fixes. Nous dénotons pas x_i le déplacement de la i-ème masse par rapport à sa position d'équilibre.
- Donner les expressions de l'énergie cinétique $T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_N)$ et de l'énergie potentielle $V(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ associées à ce système.
- Déterminer l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_N)$.
- Trouver les équations du mouvement des N masses à l'aide des équations de Lagrange.
- Donner l'expression de l'énergie totale $E = T + V$ du système et vérifier que c'est bien une constante du mouvement