Mécanique analytique et Mécanique du solide
Fiche de TD n°2

1) Soit une particule, de charge $q = -e$ et de masse m, plongée dans un champ électrique constant $\vec{E} = -E\vec{e}_z$ et soumise à la force de gravitation $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$.
- Calculer le potentiel scalaire $\phi(x, y, z)$ associé au champ électrique et le potentiel $V(x, y, z)$ associé à la force de gravitation.
- Calculer l'hamiltonien.
- Etablir les équations du mouvement à partir des équations de Hamilton.
- Résoudre ces équations dans le cas où la position initiale de la particule est $\vec{r}(t = 0) = \vec{0}$ avec une vitesse initiale nulle.
- La particule va-t-elle "monter" ou "descendre" ? Autrement dit : quelle force va l'emporter entre la force de Coulomb associée au champ électrique et la force de gravitation ? Pour répondre, vous utiliserez les valeurs suivantes qui vous permettront de faire une estimation :

$$\begin{array}{rcl} e & \approx & 1,6 \cdot 10^{-19}\ A.s \\ m & \approx & 9,1 \cdot 10^{-31}\ kg \\ g & \approx & 9,81\ m.s^{-2} \\ E & \approx & 10^{-2}\ V.m^{-1} \end{array}$$

2) Un enfant de masse m glisse sans frottement sur la rampe d'un escalier en colimaçon (une hélice) d'équation :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & R\cos(\theta(t)) \\ y(t) & = & R\sin(\theta(t)) \\ z(t) & = & a\theta(t) \end{array}$$

où R est une constante correspondant au rayon de l'hélice, a est une constante correspondant au pas de l'hélice, et $\theta(t)$ varie au cours du temps.
- Calculer l'énergie cinétique T.
- Calculer le potentiel V associé à la force de gravitation agissant sur la masse m.
- En déduire le lagrangien $\mathcal{L}$. Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?
- Déterminer l'expression de l'impulsion p_θ en fonction de $\dot{\theta}$ et des constantes du problème.
- Calculer l'hamiltonien H, montrer qu'il est égal à $T + V$ et qu'il correspond alors à l'énergie E du système.
- Déterminer l'intervalle de variation de la variable θ en fonction de E, m, g et a.
- Représenter l'allure des trajectoires dans l'espace des phases : représenter graphiquement l'impulsion p_θ en fonction de θ pour différentes valeurs de la constante E.
- Indiquer sur votre graphique la trajectoire correspondant aux conditions initiales suivantes : $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.

3) Soit un pendule plan de longueur l et de masse m, dont le point de suspension de masse M peut se déplacer sur une droite horizontale. Les forces de frottements seront négligées.

- Calculer le lagrangien $\mathcal{L}(X, \theta, \dot{X}, \dot{\theta})$ où X est la coordonnée du point M et θ l'angle que fait le pendule avec la verticale.
- Déterminer les impulsions p_θ et p_X.
- Calculer l'hamiltonien H associé à ce système et identifier les constantes du mouvement.
- Déterminer les trajectoires des deux masses pour $p_X = 0$ et dans la limite où l'angle θ reste faible.

4) Considérons deux masses m_1 et m_2 fixées entre elles par un fil inextensible de longueur l, se déplaçant sur des plans inclinés d'angles α_1 et α_2. Ces masses sont soumises à la pesanteur. Les frottements sont négligés. Soient $\{x_1, z_1\}$ et $\{x_2, z_2\}$ les coordonnées des masses m_1 et m_2, que l'on supposera ponctuelles. Soient $\{x_A, z_A\}$ les coordonnées du point A, et l_1, l_2 les distances entre le point A et les masses m_1, m_2 respectivement. Le point A est fixe mais les longueurs l_1 et l_2 peuvent varier au cours du temps.

- Exprimer x_1, z_1, x_2 et z_2 en fonction des coordonnées du point A, des longueurs l_1, l_2, et des angles α_1, α_2. Eliminer les variables l_1 et l_2 des expressions de z_1, x_2 et z_2.
- Trouver les relations entre les coordonnées des vitesses $\dot{z}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{z}_2$ et $\dot{x}_1$.
- Exprimer l'énergie cinétique T en fonction de m_1, m_2, $\dot{x}_1$ et α_1.
- Calculer l'énergie potentielle V, puis le lagrangien $\mathcal{L}(x_1, \dot{x}_1)$. Faites en sorte que seules les variables x_1 et $\dot{x}_1$ et les constantes m_1, m_2, g, l, α_1, α_2, x_A et z_A apparaissent.
- Exprimer l'impulsion p_1 associé à la variable x_1 en fonction de m_1, m_2, $\dot{x}_1$ et α_1.
- Calculer l'hamiltonien $H(x_1, p_1)$ et montrer qu'il est égal à la somme $T + V$.
- Ecrire les équations de Hamilton et établir l'équation différentielle vérifiée par x_1.
- En déduire les expressions des normes des accélérations $\sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{z}_1^2}$ et $\sqrt{\ddot{x}_2^2 + \ddot{z}_2^2}$.

5) Soit un pendule sphérique de masse m, relié au point 0 par une tige rigide de longueur l. Le pendule est soumis à la force de gravitation de constante $g > 0$. Les forces de frottement seront négligées. La position de la masse m est repérée à chaque instant par les deux angles θ et φ.

- Calculer l'énergie cinétique T.
- Calculer l'énergie potentielle V associée à la force de gravitation.
- En déduire l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta, \varphi)$.
- Calculer les impulsions p_θ et p_φ associées aux angles θ et φ.
- En déduire l'expression de l'hamiltonien $H(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi)$.
- Ecrire les équations de Hamilton et identifier les constantes du mouvement.
- Etablir les équations du mouvement du pendule.
- Nous souhaitons déterminer pour quel angle θ le pendule présentera un mouvement de précession à vitesse constante autour de l'axe z : θ et $\dot{\varphi}$ ont alors des valeurs constantes.
  Trouver l'expression de $\dot{\varphi}$ en fonction de θ, g et l.
  Quelle est la condition sur l'angle θ ? Faites un schéma pour vous aider.