Mécanique analytique et Mécanique du solide
Fiche de TD n°3

1) Les matrices suivantes peuvent-elles être associées à des rotations conservant le produit scalaire ?

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_2(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2) On effectue successivement les deux rotations suivantes :
- une première rotation d'un angle $\pi/2$ autour de l'axe z qui permet de passer du référentiel $\mathcal{R} = \{0, \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}\}$ au référentiel $\mathcal{R}^* = \{0, \{\vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*}\}\}$,
- une seconde rotation d'un angle π autour de l'axe y^* qui permet de passer du référentiel $\mathcal{R}^* = \{0, \{\vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*}\}\}$ au référentiel $\mathcal{R}^{**} = \{0, \{\vec{e}_{x^{**}}, \vec{e}_{y^{**}}, \vec{e}_{z^{**}}\}\}$.

Calculer la matrice de rotation A qui permet de passer directement de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}^{**}$, et vérifier que $A\overline{A}$ est égale à la matrice unité.

3) Soit un référentiel $\mathcal{R}^*$ déduit du référentiel $\mathcal{R}$ par une rotation caractérisée par la matrice suivante :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

où l'angle θ dépend du temps.
- Cette matrice de rotation vérifie-t-elle la relation $A^{-1} = \overline{A}$?
- Calculer $j(\vec{\omega}) = \dot{A}A^{-1}$, et déterminer le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$.
- Vérifier que $A = \exp(j(\theta\vec{e}_x))$.
- Calculer la position dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ en fonction des coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}$.
- Calculer la vitesse et l'accélération à l'aide des lois de transformation.

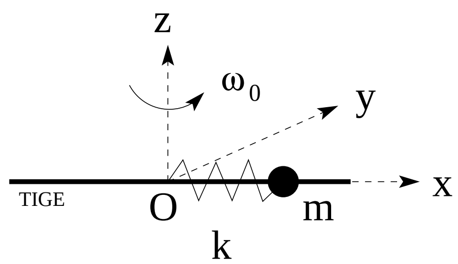
4) Une tube cylindrique creux horizontal de longueur L tourne à la vitesse angulaire ω_0 constante autour de l'axe vertical. Une particule de masse m initialement au repos à la position $d > 0$ dans le tube (cette position étant repérée par rapport au centre du tube) est contrainte de se déplacer sous l'action des forces d'inertie.
- Déterminer la position et la vitesse de la particule dans le tube à tout instant.
- Au bout de quel temps la particule sortira-t-elle du tube et à quelle vitesse ?
- Que se passe-t-il pour $d = 0$ et pour $d = L/2$?

5) Calculer le poids apparent d'une personne immobile de masse m dans un ascenseur se déplaçant avec une accélération constante égale à $a_0\vec{e}_z$. Discuter les trois cas de figure : $a_0 = 0$, $a_0 > 0$ et $a_0 < 0$.

6) Soit une fusée de masse m, lancée depuis le sol de la latitude λ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_r$. Ecrire les équations du mouvement et les résoudre dans le cadre des hypothèses suivantes : $\vec{P} = -mg\vec{e}_r$ et $r \ll R_T$, où r est la distance entre la position de la fusée et le centre de la terre et R_T est le rayon terrestre. Vous négligerez par ailleurs les termes d'ordre 2 en ω_0 (vitesse angulaire terrestre). Déterminer la déviation de la particule par rapport au plan passant par les points O (centre de la terre), N (pôle nord) et M (position initiale de la particule) en fonction de λ, ω_0, g et v_0. A-t-on une déviation vers l'est ou bien vers l'ouest ?

7) Pendule de Foucault : étudier le mouvement d'un pendule simple de masse m et de longueur l situé à la latitude λ sur un temps non-négligeable devant la période $T = 2\pi/\omega_0$ de révolution de la terre sur elle-même. Vous prendrez comme conditions initiales un pendule dans le plan xOz, faisant un angle θ_0 avec la verticale du lieu, et sans vitesse initiale.

8) Considérons une masse m fixée à un ressort qui est contrainte de se déplacer le long d'une tige horizontale en rotation autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire constante ω_0.



Cette masse est soumise à la force de pesanteur $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$, à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e}_x$, à la force de réaction de la tige $\vec{R}$, ainsi qu'aux forces d'inertie. Notons que g, k et x_0 sont des constantes positives.

- Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique dans le référentiel attaché à la tige.
- Donner les expressions des forces d'inertie en fonction du vecteur position $\vec{r}$, du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$.
- Déterminer les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ en fonction de ω_0 dans la base mobile $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.
- Projeter l'équation fondamentale de la dynamique sur les axes x, y et z.
- En déduire les expressions des composantes R_y et R_z de la force de réaction $\vec{R}$.
- Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la variable x est de la forme $\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha$, où ω et α sont des constantes que vous exprimerez en fonction de k, m et ω_0.
- Résoudre cette équation différentielle pour les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$.
- Donner les composantes de $\vec{R}$ dans la base mobile $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ en fonction des constantes du problème : g, k, m, ω_0 et x_0.