

MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE DU SOLIDE
FICHE DE TD N°4

- 1) Déterminer la position du centre de masse d'un demi-disque homogène de rayon R .

- 2) Déterminer la position du centre de masse d'une pyramide homogène de hauteur h et dont la base est un carré de côté a .

- 3) Considérons une molécule formée de quatre atomes situés aux sommets d'une pyramide triangulaire droite de hauteur h et de base un triangle équilatéral de côté a . Les atomes aux sommets du triangle de base ont la même masse m_1 et celui situé au sommet de la pyramide a une masse m_2 .
 - Déterminer la position du centre d'inertie C de la molécule.
 - Calculer le tenseur d'inertie I de la molécule par rapport à C .

- 4) Calculer le tenseur d'inertie I d'un cylindre homogène de masse M , de hauteur h et de rayon R , par rapport à son centre de masse C .

- 5) Le tenseur d'inertie d'un cube homogène de masse M et de côté a situé dans l'espace $x \in [0, a]$, $y \in [0, a]$ et $z \in [0, a]$ est égal à :

$$I = Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Diagonaliser cette matrice de façon à obtenir les moments principaux d'inertie I_1 , I_2 et I_3 .
 - Déterminer également les vecteurs propres et représenter sur un schéma du cube les directions de ces vecteurs.
-
- 6) Un disque de masse M et de rayon R possède une densité de masse telle que le centre d'inertie C ne coïncide pas avec le centre du disque D . Soit d la distance entre ces deux points (balourd). Nous désignons par θ l'angle entre le vecteur DC et la verticale. Le disque roule sans glisser sur le sol avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$.
 - Déterminer l'énergie cinétique, le potentiel associé à la pesanteur et écrire le lagrangien.
 - En déduire l'équation du mouvement et la résoudre dans la limite des petits mouvements.

- 7) La terre ayant une forme aplatie au niveau de ses pôles, son tenseur d'inertie est tel que $I_1 \approx I_2 < I_3$.
- Ecrire les équations d'Euler et les résoudre.
 - Calculer la fréquence de précession de la terre autour de son axe de rotation.
 - Estimer la valeur de la période de précession en prenant le rapport $(I_3 - I_1)/I_1 \approx 0,0033$.
 - Comparer à la période observée qui est de 427 jours.

8) L'énergie cinétique de rotation d'un solide s'écrit en fonction des angles d'Euler :

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)^2 + \frac{I_2}{2}(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

Dans le cas d'une toupie sphérique libre, montrer que le vecteur angulaire de rotation :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

est une constante du mouvement.

9) L'énergie cinétique associée à un cylindre, dont les moments principaux d'inertie sont $\{I_1, I_1, I_3\}$, s'écrit :

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

où θ , ϕ et ψ sont des variables appelées angles d'Euler.

- Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ dans le cas où aucune force n'agit sur le cylindre. Calculer les impulsions p_θ , p_ϕ et p_ψ .
- En déduire les expressions de $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction des impulsions et de l'angle θ .
- Calculer l'hamiltonien $H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi)$.
- Ecrire les équations de Hamilton. Montrer que p_ϕ et p_ψ sont des constantes du mouvement.
- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la variable θ dans les limites $\theta \approx 0$ et $p_\psi = p_\phi$, est de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

- Donner l'expression de ω en fonction de I_1 et p_ψ (ou p_ϕ) et calculer la solution $\theta(t)$.
- Déterminer $\phi(t)$ et $\psi(t)$ dans les limites $\theta \approx 0$ et $p_\psi = p_\phi$.