TD 4 : Méthodes des différences finies et des éléments finis

Le but du TD est de résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx} + 8x = 0 \tag{1}$$

pour $x \in [0,1]$ avec comme conditions aux limites $f(0) = 0$ et $(df/dx)_{x=1} = 0$.
Vous échantillonnerez l'intervalle $[0,1]$ en N sous-intervalles de longueur h.

Exercice 1

Résolution par la méthode des différences finies

Après avoir remplacé, dans l'équation différentielle (1), les dérivées par des différences finies, écrire le système d'équations sous forme matricielle en prenant en compte les conditions aux limites.

Exercice 2

Résolution par la méthode des éléments finis

1. Mettre l'équation différentielle (1) sous forme variationnelle.
2. Réécrire cette équation sous la forme d'un système de N équations à N inconnues en utilisant le développement de la fonction f dans la base des fonctions linéaires φ_i :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} \eta_i \varphi_i(x)$$

   où les η_i sont les estimations aux noeuds du réseau $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ de la fonction f recherchée et où les fonctions linéaires φ_i sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varphi_i(x) = 1 + \frac{x-x_i}{h} & \text{si} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \varphi_i(x) = 1 - \frac{x-x_i}{h} & \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \varphi_i(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

   On rappelle que η_0 est connu, car la valeur de $f(0)$ est determinée par les conditions aux limites.
3. Calculez explicitement les coefficients des N équations et réécrire le système d'équations sous forme matricielle.

Calculs à rendre à la fin de la séance de TD la semaine du 13 octobre

---