Correction DS du 6/11/18 ①

Problème I : Chaîne fermée de N oscillateurs couplés

1). • Calcul de $y^*_{N-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{2i\pi(N-k)n}{N}} x^*_n$

or $x^*_n = x_n \Rightarrow y^*_{N-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{-2i\pi n} e^{\frac{2i\pi k n}{N}} x_n$

or $e^{-2i\pi n} = \cos 2i\pi n - i \sin 2\pi n = 1$, donc $\boxed{y^*_{N-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{\frac{2i\pi k n}{N}} = y_k}$

• Calcul de $q^*_{N-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{+\frac{2i\pi(N-k)n}{N}} p^*_n$

or $p^*_n = p_n \Rightarrow q^*_{N-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{e^{2i\pi n}}_{=1} e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} p_n = q_k$

$$\Rightarrow \boxed{q^*_{N-k} = q_k}$$

2) • $\sum_{k=1}^{N} y_k y^*_k = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1\\n'=1\\k=1}}^{N} e^{\frac{2i\pi k(n-n')}{N}} x_n x^*_{n'}$

$$= \frac{1}{N} \sum_n \sum_{n'} x_n x_{n'} \underbrace{\sum_k e^{\frac{2i\pi k(n-n')}{N}}}_{= N \delta_{nn'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{N} y_k y^*_k = \sum_n x_n^2}$$

• $\sum_{k=1}^{N} q_k q^*_k = \frac{1}{N} \sum_k \sum_n \sum_{n'} e^{-\frac{2i\pi k(n-n')}{N}} p_n p^*_{n'}$

$$= \frac{1}{N} \sum_n \sum_{n'} p_n p_{n'} \underbrace{\sum_k e^{-\frac{2i\pi k(n-n')}{N}}}_{= N \delta_{nn'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{N} q_k q^*_k = \sum_n p_n^2}$$

3) $\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n+1})^2 = \sum_n (x_n^2 + x_{n+1}^2 - 2 x_n x_{n+1})$

- Or, d'après la question 2, nous avons $\sum_n (x_n^2 + x_{n+1}^2) = 2 \sum_k y_k y_k^*$
- Calculons $\sum_n x_n x_{n+1}^* = \frac{1}{N} \sum_k \sum_{k'} \sum_n e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} e^{+\frac{2i\pi k'(n+1)}{N}} y_k y_{k'}^*$

$= \frac{1}{N} \sum_k \sum_{k'} y_k y_{k'}^* \underbrace{\sum_n e^{-\frac{2i\pi(k+k')n}{N}}}_{= N\delta_{kk'}} e^{+\frac{2i\pi k'}{N}}$

$= \sum_k y_k y_{\cancel{+}k}^* \; e^{\frac{2i\pi k}{N}}$

Or, $\sum_n x_n x_{n+1}^*$ est réel, donc $\sum_n x_n x_{n+1}^* = \frac{1}{2} \sum_k y_k y_k^* \left(e^{\frac{2i\pi k}{N}} + e^{-\frac{2i\pi k}{N}}\right)$

$= \sum_k y_k y_k^* \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$

En conséquence $\boxed{\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n+1})^2 = 2 \sum_k y_k y_k^* \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) = 4 \sum_k y_k y_k^* \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$

4) Hamiltonien H

$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_n^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 (x_n - x_{n+1})^2 \right)$

$= \sum_k \left(\frac{q_k q_k^*}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 y_k y_k^* + \frac{\cancel{4}}{2} m \Omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) y_k y_k^* \right)$

$$\boxed{H = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{q_k q_k^*}{2m} + \left(\frac{m\omega^2}{2} + 2m\Omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) \right) y_k y_k^* \right)}$$

5) Equations du mouvement

Equations de Hamilton pour les variables y_k et q_k : $\dot{y}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}$ et $\dot{q}_k = \frac{-\partial H}{\partial y_k}$

on va tout d'abord réécrire $\mathcal{H}$ en fonction de y_k et q_k seulement en utilisant les résultats de la question 1 :

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{q_k q_{N-k}}{2m} + \left(\frac{m\omega^2}{2} + 2m\Omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) y_k y_{N-k} \right)}$$

6) • $\dot{y}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = \frac{1}{2m}\left(q_{N-k} \times 2\right) = \frac{q_{N-k}}{m} \Rightarrow q_{N-k} = m\,\dot{y}_k$

• $\dot{q}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_k} = -\frac{m}{2}\left(\omega^2 + 4\Omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) y_{N-k} \times 2 = -m\left(\omega^2 + 4\Omega^2\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) y_{N-k}$

or $\dot{q}_k = m\,\ddot{y}_{N-k} \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_k + \left(\omega^2 + 4\Omega^2\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) y_k = 0}$

7) Solution $\boxed{y_k(t) = A_k \cos(\tilde{\Omega}_k t) + B_k \sin(\tilde{\Omega}_k t)}$ avec $\boxed{\tilde{\Omega}_k^2 = \omega^2 + 4\Omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$

avec $A_k = 1$ car $y_k(0) = 1$ et $B_k = 0$ car $\dot{y}_k(0) = 0$.

8) Calcul de $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} \left(A_k \cos(\tilde{\Omega}_k t) + B_k \sin(\tilde{\Omega}_k t)\right)$

$$\boxed{x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} \cos(\tilde{\Omega}_k t)}$$

x_n étant réelle $\Rightarrow \boxed{x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \cos\left(\tilde{\Omega}_k t\right)}$