Problème 2 : Trajectoire optimale d'un skieur.

1) Energie potentielle

$V = -\int + mg\sin\alpha\, \vec{e}_x \cdot d\vec{r} = -mg\sin\alpha\, x$ car la force gravitationnelle est égale à $mg\sin\alpha\, \vec{e}_x$ (projection de la vertical sur l'axe x).

$\Rightarrow \boxed{V = -mg\sin\alpha\, x}$

2) Energie cinétique

$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \Longrightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg\sin\alpha\, x}$

3) Impulsions.

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg\sin\alpha\, x}$$

4) Trivialement, nous avons $\mathcal{H} = T + V = E = 0$ d'après l'énoncé $(E_0 = 0)$

5) Nous avons donc : $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gx\sin\alpha$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dx^2 + dy^2}{2gx\sin\alpha} = dt^2}$$

6) $\Longrightarrow t_A = \displaystyle\int_0^{t_A} dt = \int_0^{t_A} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gx\sin\alpha}} = \boxed{\int_0^A \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gx\sin\alpha}}\, dx = t_A}$

Conclusion, nous avons $t_A = \int_0^A F(x,y,y')\,dx$ avec :

$$\boxed{F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gx\sin\alpha}}}$$

7) Nous avons $\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} =$ Constante par rapport à x

$$\Rightarrow \frac{2y'}{\sqrt{2gx\sin\alpha(1+(y'(x))^2)}} = C \Rightarrow \boxed{y'(x) = C\sqrt{2gx\sin\alpha(1+(y'(x))^2)}}$$

8) • $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{K - K\cos(Kt)}{K\sin(Kt)} = \frac{1-\cos(Kt)}{\sin(Kt)}$

• $1+(y'(x))^2 = \frac{\sin^2(Kt) + 1 + \cos^2(Kt) - 2\cos(Kt)}{\sin^2(Kt)} = \frac{2(1-\cos(Kt))}{\sin^2(Kt)}$

$\Rightarrow \sqrt{2gx\sin\alpha(1+(y'(x))^2)} = \left(\frac{4g\sin\alpha}{K^2}\right)^{1/2}\frac{1-\cos(Kt)}{\sin(Kt)}$

Nous avons $y'(x) = C\sqrt{2gx\sin\alpha(1+(y'(x))^2)}$ si $\frac{2C}{K}\sqrt{g\sin\alpha} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{K = 2C\sqrt{g\sin\alpha}}$$

9) C'est une cycloïde.