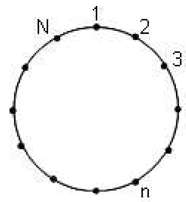
PROBLEME I : Chaîne fermée de N oscillateurs couplés

Soit une chaîne fermée de N particules de même masse m disposées régulièrement sur un cercle :



L'état du système est caractérisé par les variables réelles que sont les coordonnées x_n et les impulsions p_n avec $n \in [1, N]$. L'hamiltonien H décrivant ce système est donné par :

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_n^2 + \frac{1}{2} m\Omega^2 (x_n - x_{n+1})^2 \right)$$

où ω et Ω sont des fréquences. La chaîne étant fermée, nous avons $x_{N+1} = x_1$ et $p_{N+1} = p_1$.
Nous définissons les coordonnées y_k et impulsions q_k complexes suivantes (avec $k \in [1, N]$) :

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{\frac{2i\pi kn}{N}} x_n \ , \quad q_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} p_n$$

dont les relations inverses sont :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} y_k \ , \quad p_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2i\pi kn}{N}} q_k$$

Aide pour les calculs : vous utiliserez les égalités suivantes

$$\sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2i\pi k(n-n')}{N}} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq n' \ , \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2i\pi k(n-n')}{N}} = N \quad \text{si} \quad n = n'$$

Questions

1. Montrer que $y_k^* = y_{N-k}$ et $q_k^* = q_{N-k}$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{N} y_k y_k^* = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} q_k q_k^* = \sum_{n=1}^{N} p_n^2$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n+1})^2 = 4 \sum_{k=1}^{N} \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right) y_k y_k^*$$

4. Ecrire l'hamiltonien H en fonction des variables y_k, y_k^*, q_k et q_k^*.
5. Réécrire l'hamiltonien H en fonction des variables y_k, y_{N-k}, q_k et q_{N-k}.
6. Ecrire les équations de Hamilton et en déduire les équations différentielles satisfaites par la coordonnée y_k et l'impulsion q_k.
7. Calculer la solution $y_k(t)$ en prenant comme conditions initiales $y_k(0) = 1$ et $\dot{y}_k(0) = 0$.
8. En déduire que l'expression de $x_k(t)$ est donnée par :

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \cos(W_k t)$$

où W_k est une fréquence que vous déterminerez en fonction de ω, Ω, k et N.

PROBLEME II : Action $\mathcal{S}$

1. **Equation de Hamilton-Jacobi**

L'action $\mathcal{S}$ d'un système possédant $2N$ degrés de liberté est définie par :

$$\mathcal{S}(q_i, t) = \int \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{1}$$

où q_i sont les coordonnées généralisées et $\dot{q}_i$ sont les vitesses généralisées pour $i \in [1, N]$.

Questions

(a) A partir de l'équation (1), établir l'expression de $d\mathcal{S}/dt$ en fonction des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, des impulsions généralisées p_i, et de l'hamiltonien $H(p_i, q_i, t)$.

(b) Démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = p_i \tag{2}$$

(c) L'action $\mathcal{S}$ étant une fonction des coordonnées généralisées q_i et du temps t uniquement, démontrer l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H = 0 \tag{3}$$

2. **Calcul de l'action**

On se place en dimension 1, dans ce cas, l'action ne dépend que de x et de t. Nous allons rechercher les solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi donnée par l'équation (3) à l'aide de la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire sous la forme :

$$\mathcal{S}(x, t) = S_1(x) + S_2(t) \tag{4}$$

Questions

Soit une particule libre de masse m.

(a) Calculer le lagrangien $\mathcal{L}$ associé.

(b) Calculer l'hamiltonien H et démontrer que c'est une quantité conservée au cours du temps, que l'on notera E (énergie totale du système).

(c) A partir des équations (2), (3) et (4), démontrer que nous avons :

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1(x)}{dx}\right)^2 = -E$$

(d) Calculer $S_1(x)$ et $S_2(t)$, puis donner l'expression finale de l'action $\mathcal{S}(x, t)$ en fonction de m, E, x et t.