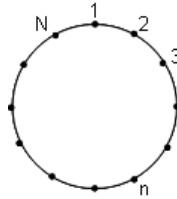


PROBLEME I : Chaîne fermée de N oscillateurs couplés

Soit une chaîne fermée de N particules de même masse m disposées régulièrement sur un cercle :



L'état du système est caractérisé par les variables réelles que sont les coordonnées x_n et les impulsions p_n avec $n \in [1, N]$. L'hamiltonien H décrivant ce système est donné par :

$$H = \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_n^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 (x_n - x_{n+1})^2 \right)$$

où ω et Ω sont des fréquences. La chaîne étant fermée, nous avons $x_{N+1} = x_1$ et $p_{N+1} = p_1$. Nous définissons les coordonnées y_k et impulsions q_k complexes suivantes (avec $k \in [1, N]$) :

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{\frac{2i\pi kn}{N}} x_n, \quad q_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} p_n$$

dont les relations inverses sont :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} y_k, \quad p_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{\frac{2i\pi kn}{N}} q_k$$

Aide pour les calculs : vous utiliserez les égalités suivantes

$$\sum_{k=1}^N e^{\frac{2i\pi k(n-n')}{N}} = 0 \quad \text{si } n \neq n', \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^N e^{\frac{2i\pi k(n-n')}{N}} = N \quad \text{si } n = n'$$

Questions

1. Montrer que $y_k^* = y_{N-k}$ et $q_k^* = q_{N-k}$.
2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^N y_k y_k^* = \sum_{n=1}^N x_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^N q_k q_k^* = \sum_{n=1}^N p_n^2$$

3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1})^2 = 4 \sum_{k=1}^N \sin^2 \left(\frac{k\pi}{N} \right) y_k y_k^*$$

4. Ecrire l'hamiltonien H en fonction des variables y_k, y_k^*, q_k et q_k^* .

5. Réécrire l'hamiltonien H en fonction des variables y_k, y_{N-k}, q_k et q_{N-k} .

6. Ecrire les équations de Hamilton et en déduire les équations différentielles satisfaites par la coordonnée y_k et l'impulsion q_k .

7. Calculer la solution $y_k(t)$ en prenant comme conditions initiales $y_k(0) = 1$ et $\dot{y}_k(0) = 0$.

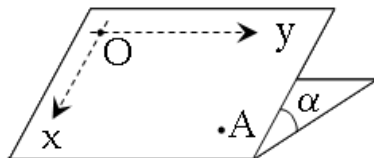
8. En déduire que l'expression de $x_k(t)$ est donnée par :

$$x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \cos \left(\frac{2\pi kn}{N} \right) \cos(W_k t)$$

où W_k est une fréquence dont vous déterminerez l'expression en fonction de ω, Ω, k et N .

PROBLEME II : Trajectoire optimale d'un skieur

L'objectif de ce problème est de trouver la trajectoire optimale pour qu'un skieur de masse m , évoluant sur une pente enneigée plane faisant un angle α par rapport à l'horizontal, gagne la course. Il faut donc trouver la trajectoire qui minimise le temps de parcours t_A entre les points O et A . Les forces de frottement seront négligées et on notera g la constante gravitationnelle. Le choix des axes x et y est indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Montrer que l'énergie potentielle du skieur est égale à $V = -mgx \sin \alpha$.

2. Calculer l'énergie cinétique T et donner l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.

3. Calculer les impulsions p_x et p_y , et donner l'expression de l'hamiltonien $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.

4. Montrer que H est égal à l'énergie totale du système $E = T + V$, qui est une quantité conservée au cours du mouvement : $E = E_0$, où E_0 est une constante que vous prendrez égale à 0.

5. En déduire la relation suivante :

$$dt^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{2gx \sin \alpha}$$

6. Intégrer cette équation de façon à obtenir le temps $t_A = \int_O^A dt$, mis par le skieur pour aller du point O au point A sous la forme :

$$t_A = \int_O^A \mathcal{F}(x, y, y') dx$$

où $y'(x) = dy/dx$. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{F}(x, y, y')$.

7. La trajectoire optimale $y(x)$ est celle qui minimise le temps t_A . L'équation différentielle vérifiée par $y(x)$ s'obtient à partir de l'équation (du type équation de Lagrange) suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0$$

A partir de l'équation ci-dessus, monter que la trajectoire optimale $y(x)$ vérifie l'équation : $y'(x) = C \sqrt{2gx \sin \alpha (1 + (y'(x))^2)}$, où C est une constante d'intégration.

8. Vérifier que :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0(1 - \cos(Kt))/K^2 \\ y(t) &= a_0(Kt - \sin(Kt))/K^2 \end{aligned}$$

est solution de l'équation différentielle obtenue à la question 7. a_0 est l'accélération du skieur au temps $t = 0$. Donner l'expression de la constante K en fonction de g , α et C .

9. Représenter schématiquement la trajectoire entre les points O et A . Comment nomme-t-on cette courbe ?