Université de la Méditerranée - Année universitaire 2011/2012
DS de Mécanique Analytique et Mécanique du Solide (PHY7) du 10/12/2011
Documents et calculatrices non autorisés

PROBLEME I : Transformation de référentiels

Soit un point matériel M dont la position est notée $\vec{r}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, et $\vec{r}^{\,*}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}^*$. Nous considérons la transformation du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}^*$ définie par :

$$\vec{r}^{\,*} = A\,\vec{r} + \vec{b}$$

où A est une matrice de rotation et $\vec{b}$ le vecteur de translation reliant les origines $O^{\,*}$ et O des deux référentiels.

Nous introduisons également la matrice anti-symétrique $j(\vec{\omega}) = \dot{A}A^{-1}$, où $\vec{\omega}$ correspond à la vitesse instantanée de rotation.

QUESTION DE COURS

1. Etablir la loi de transformation de la vitesse afin d'exprimer la vitesse
$$\vec{v}^{\,*} = \frac{d\vec{r}^{\,*}}{dt}$$
dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ en fonction de $\vec{r}$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $\vec{\omega}$ et $\dot{\vec{b}}$.
2. Etablir la loi de transformation de l'accélération afin d'exprimer l'accélération
$$\vec{a}^{\,*} = \frac{d\vec{v}^{\,*}}{dt}$$
dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ en fonction de $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$, $\vec{\omega}$, $\dot{\vec{\omega}}$, $\dot{\vec{b}}$ et $\ddot{\vec{b}}$.

PREMIERE APPLICATION

Soit la matrice de rotation

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) & 0 \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur de translation $\vec{b}(t) = b_0 t \vec{e}_z$. On suppose de plus que le point matériel M est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1. Déterminer le vecteur instantanée de rotation $\vec{\omega}$ associée à la matrice de rotation A ci-dessus.
2. Calculer la position $\vec{r}^{\,*}$ du point matériel M dans $\mathcal{R}^*$.
3. Quel est le nom de la trajectoire du point matériel M dans $\mathcal{R}^*$?
Représenter cette trajectoire schématiquement.
4. Calculer la vitesse $\vec{v}^{\,*}$ et l'accélération $\vec{a}^{\,*}$.
5. Calculer les normes $||\vec{v}^{\,*}||$ et $||\vec{a}^{\,*}||$ et déterminer l'angle θ entre les vecteurs $\vec{v}^{\,*}$ et $\vec{a}^{\,*}$.

$\longrightarrow$ **TSVP**

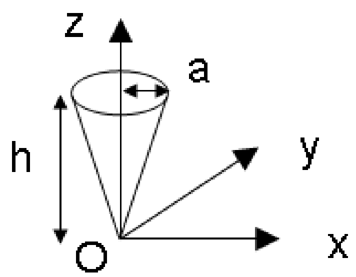
SECONDE APPLICATION

Soit le vecteur instantanée de rotation $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_x$ et le vecteur de translation $\vec{b} = \vec{0}$. Nous supposons que la position du point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est donnée à chaque instant par $\vec{r}(t) = v_0 t \vec{e}_z$.

1. Déterminer la matrice de rotation A associée au vecteur instantanée de rotation $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_x$.
2. Calculer la position $\vec{r}^{\,*}$ du point matériel M dans $\mathcal{R}^*$.
3. Quel est le nom de la trajectoire du point matériel M dans $\mathcal{R}^*$?
   Représenter cette trajectoire schématiquement.
4. Calculer la vitesse $\vec{v}^{\,*}$ et l'accélération $\vec{a}^{\,*}$.
5. Calculer les normes $||\vec{v}^{\,*}||$ et $||\vec{a}^{\,*}||$ et déterminer l'angle θ entre les vecteurs $\vec{v}^{\,*}$ et $\vec{a}^{\,*}$.

PROBLEME II : Calcul de barycentre et tenseur d'inertie

Soit un cône homogène de masse M, de hauteur h dont la base est un cercle de rayon a.



1. Calculer le volume V du cône.
2. On désigne pas C le centre de masse. Calculer le barycentre $\vec{R} = \overrightarrow{OC}$.
3. Calculer les éléments du tenseur d'inertie I du cône.

<u>Aide pour le calcul des intégrales :</u>

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \;\; ; \;\; \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi \;\; ; \;\; \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta = 0$$