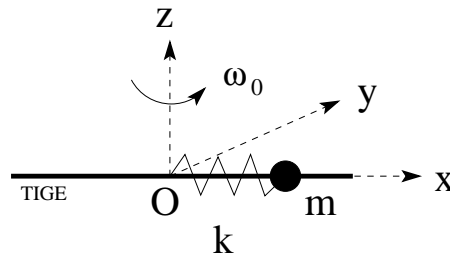


PROBLEME 1 : Masse fixée à un ressort sur une tige horizontale en rotation autour d'un axe vertical

Considérons une masse m fixée à un ressort qui est contrainte de se déplacer le long d'une tige horizontale en rotation autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire constante ω_0 .



Cette masse est soumise à la force de pesanteur $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$, à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e}_x$, à la force de réaction de la tige \vec{R} , ainsi qu'aux forces d'inertie. Notons que g , k et x_0 sont des constantes positives.

1. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique dans le référentiel attaché à la tige.
2. Donner les expressions des forces d'inertie en fonction du vecteur position \vec{r} , du vecteur vitesse \vec{v} et du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$.
3. Déterminer les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ en fonction de ω_0 dans la base mobile $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.
4. Projeter l'équation fondamentale de la dynamique sur les axes x , y et z .
5. En déduire les expressions des composantes R_y et R_z de la force de réaction \vec{R} .
6. Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la variable x est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha$$

où ω et α sont des constantes que vous exprimerez en fonction de k , m et ω_0 .

7. Résoudre cette équation différentielle avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t = 0) = x_0$$

$$\dot{x}(t = 0) = 0$$

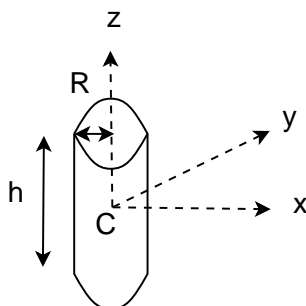
8. Donner les composantes de \vec{R} dans la base mobile $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ en fonction des constantes du problème : g , k , m , ω_0 et x_0 .
9. Quel serait le mouvement de la masse m , pour les conditions initiales ci-dessus, si la tige ne tournait pas ?

→ TSVP

PROBLEME 2 : Cylindre libre en rotation

– PARTIE I

1. Calculer le tenseur d'inertie \mathbf{I} d'un cylindre homogène de masse M , de hauteur h et de rayon R , par rapport à son centre de masse C .



Aide pour le calcul des intégrales apparaissant dans le tenseur d'inertie :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi, \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

2. Les moments principaux d'inertie I_1 , I_2 et I_3 du cylindre sont-ils tous distincts ? En donner les raisons et les conséquences.

– PARTIE II

L'énergie cinétique associée à ce cylindre s'écrit :

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

où θ , ϕ et ψ sont des variables appelées angles d'Euler.

1. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ dans le cas où aucune force n'agit sur le cylindre. Calculer les impulsions p_θ , p_ϕ et p_ψ .
2. En déduire les expressions de $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction des impulsions et de l'angle θ .
3. Calculer l'hamiltonien $H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi)$.
4. Ecrire les équations de Hamilton. Montrer que p_ϕ et p_ψ sont des constantes du mouvement.
5. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la variable θ dans les limites $\theta \approx 0$ et $p_\psi = p_\phi$, est de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

6. Donner l'expression de ω en fonction de I_1 et p_ψ (ou p_ϕ) et calculer la solution $\theta(t)$.
7. A l'aide des résultats obtenus à la question 3, et toujours dans les limites $\theta \approx 0$ et $p_\psi = p_\phi$, déterminer $\phi(t)$ et $\psi(t)$.

Remarque : Les variables θ de la partie I et de la partie II sont deux variables distinctes : dans I, θ correspond à l'angle des coordonnées cylindriques $\{r, \theta, z\}$; dans II, θ est l'un des trois angles d'Euler $\{\theta, \phi, \psi\}$.