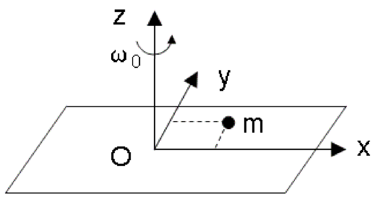
PROBLEME 1 : Bille se déplaçant sur un plateau en rotation

Considérons une bille de masse m sur un plateau en rotation à la vitesse angulaire constante ω_0 autour de son axe perpendiculaire $\{Oz\}$ (voir schéma). On suppose que bille va se déplacer sans glisser sur le plateau sous l'action des forces d'inertie. La force de pesanteur ne sera pas prise en compte dans la mesure où elle est exactement compensée par la réaction du support. On néglige les autres forces de frottement.



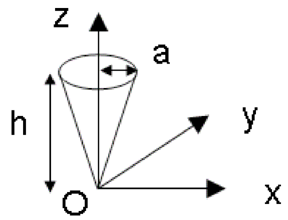
Vous travaillerez dans le référentiel mobile attaché au plateau. Les coordonnées de la bille seront repérées à l'instant t par $\{x(t), y(t), 0\}$.

1. Calculer les forces d'inertie agissant sur la bille.
2. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique.
3. Montrer que les équations différentielles obtenues à la question précédente peuvent s'écrire sous la forme :
$$\ddot{u} + 2i\omega_0\dot{u} - \omega_0^2 u = 0 \tag{1}$$
où $u(t) = x(t) + iy(t)$ est une variable complexe.
4. Donner la solution de l'équation différentielle (1) pour les conditions initiales suivantes : $u(0) = x_0 > 0$ et $\dot{u}(0) = 0$ (la bille part de la position $x_0\vec{e}_x$ à vitesse nulle).
5. En déduire les solutions $x(t)$ et $y(t)$ associées.
6. A partir des solutions obtenues à la question 5, calculer la distance $d(t)$ de la bille par rapport au centre de rotation O :
$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
Comment se comporte $d(t)$ lorsque $t \to \infty$?
7. Donner la solution de l'équation différentielle (1) pour les conditions initiales suivantes : $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = v_0 > 0$ (la bille part de la position d'origine à une vitesse égale à $v_0\vec{e}_x$).
8. En déduire les solutions $x(t)$ et $y(t)$ associées. Comment nomme-t-on cette trajectoire ?
9. A partir des solutions obtenues à la question 8, calculer la distance $D(t)$ de la bille par rapport au centre de rotation O :
$$D(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
Comment se comporte $D(t)$ lorsque $t \to \infty$?
10. Tracer sur un même graphique, l'évolution temporelle de $d(t)$ et $D(t)$ et commenter.
A quelle condition, ces deux courbes peuvent-elles se croiser ?

$\longrightarrow$ **TSVP**

PROBLEME 2 : Cône libre en rotation

Soit un cône homogène de masse M, de hauteur h dont la base est un cercle de rayon a.



1. Calculer le volume du cône à partir de l'expression :

$$V = \int dV = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{az}{h}} r dr$$

où $\{r, \theta, z\}$ sont les coordonnées cylindriques reliés aux coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$ par les relations : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

2. On désigne pas C le centre de masse. Calculer le barycentre $\vec{R} = \overrightarrow{OC}$ à partir de sa définition :

$$\overrightarrow{R} = \frac{1}{V}\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{az}{h}} \vec{r} r dr$$

et montrer qu'il est égal à $(3h/4)\vec{e}_z$.

3. Calculer le tenseur d'inertie I du cône, par rapport à l'origine du référentiel O. Montrer qu'il est diagonal et que ses moments principaux d'inertie sont

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3M}{5}\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right) \quad \text{et} \quad I_{zz} = \frac{3M}{10}a^2$$

<u>Aide pour le calcul des intégrales :</u>

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi \ ; \ \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi \ ; \ \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = 0$$

4. Calculer les éléments du tenseur d'inertie J du cône, par rapport à son centre de masse C, à l'aide des règles de correspondance suivantes :

$$\begin{aligned} J_{ii} &= I_{ii} - M(R^2 - R_i^2) \\ J_{i\neq j} &= I_{ij} + MR_iR_j \end{aligned}$$

où $R = ||\overrightarrow{R}||$ est la norme du barycentre et R_i sont ses composantes ($i = x$, y ou z).

Questions bonus :

5. Partant de la relation $d\overrightarrow{L}/dt = \overrightarrow{L} \times \overrightarrow{\Omega}$ s'appliquant dans le cas d'un solide libre en rotation, démontrer que les composantes de la vitesse angulaire de rotation $\overrightarrow{\Omega}$ vérifient les équations différentielles suivantes :

$$J_{xx}\dot{\Omega}_x - (J_{yy} - J_{zz})\Omega_y\Omega_z = 0$$
$$J_{yy}\dot{\Omega}_y - (J_{zz} - J_{xx})\Omega_x\Omega_z = 0$$
$$J_{zz}\dot{\Omega}_z - (J_{xx} - J_{yy})\Omega_x\Omega_y = 0$$

6. Comment nomme-t-on ces équations ?
7. Résoudre ces équations dans le cas d'un cône libre en rotation et déterminer l'évolution temporelle de $\overrightarrow{\Omega}(t)$.