Université de la Méditerranée - Année universitaire 2009/2010
Partiel PHY7 de 10h-12h le 12/11/09 - Documents et calculatrices interdits

---

PROBLEME 1 : Particule de charge $-e$ et de masse m plongée dans un champ électrique et un champ de pesanteur

Soit une particule, de charge $q = -e$ et de masse m, plongée dans un champ électrique constant $\vec{E} = -E\vec{e}_z$ et soumise à la force de gravitation $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$.

1. Calculer le potentiel scalaire $\phi(x, y, z)$ associé au champ électrique $\vec{E} = -E\vec{e}_z$. Nous rappelons que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, où $\vec{\nabla}\phi$ est le gradient de ϕ dont les composantes dans la base $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ sont :

$$\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. Calculer le potentiel V associé à la force de gravitation $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$.
3. Le lagrangien associé à ce système est donné par : $\mathcal{L} = T - V - q\phi$, où T est l'énergie cinétique. Calculer l'énergie cinétique et donner l'expression du lagrangien.
4. Ecrire les équations de Lagrange de ce système. Montrer que les équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule sont de la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} + g - \tfrac{eE}{m} &= 0 \end{aligned}$$

5. Résoudre ces équations différentielles dans le cas où la position initiale de la particule est $\vec{r}(t = 0) = \vec{0}$, et pour une vitesse initiale nulle : $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$.
6. La particule va-t-elle "monter" ou "descendre" ? Autrement dit : quelle force va l'emporter entre la force de Coulomb associée au champ électrique et la force de gravitation ? Pour répondre, vous utiliserez les valeurs suivantes qui vous permettront de faire une estimation :

$$\begin{aligned} e &\approx 1,6 \cdot 10^{-19}\ A.s \\ m &\approx 9,1 \cdot 10^{-31}\ kg \\ g &\approx 9,81\ m.s^{-2} \\ E &\approx 10^{-2}\ V.m^{-1} \end{aligned}$$

   <u>Aide :</u> $1\ V = 1\ kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$.

7. Estimer la valeur maximale du champ électrique qu'il ne faut-il pas dépasser si l'on veut que la particule "descende" ?

$\longrightarrow$ **TSVP**

PROBLEME 2 : Rampe d'escalier en colimaçon

Un enfant de masse m glisse sans frottement sur la rampe d'un escalier en colimaçon (une hélice) d'équation :

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\theta(t)) \\ y(t) &= R\sin(\theta(t)) \\ z(t) &= a\theta(t) \end{aligned}$$

où R est une constante correspondant au rayon de l'hélice, a est une constante correspondant au pas de l'hélice, et $\theta(t)$ varie au cours du temps.

1. Calculer l'énergie cinétique T.
2. Calculer le potentiel V associé à la force de gravitation agissant sur la masse m.
3. En déduire le lagrangien $\mathcal{L}$. Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?
4. Déterminer l'expression de l'impulsion p_θ en fonction de $\dot{\theta}$ et des constantes du problème.
5. Calculer l'hamiltonien H, et montrer qu'il peut se mettre sous la forme :

   $$H(p_\theta, \theta) = Ap_\theta^2 + B\theta$$

   où A et B sont des constantes que vous exprimerez en fonction de m, a, R et g (constante d'accélération de la pesanteur).
6. Montrer que l'hamiltonien H est égal à $T + V$.
   H correspond alors à l'énergie E du système.
7. Déterminer l'intervalle de variation de la variable θ en fonction de E, m, g et a.
8. Montrer que l'impulsion peut s'écrire sous la forme :

   $$p_\theta = \pm\sqrt{\frac{E - B\theta}{A}}$$

   où A et B sont les constantes qui ont été déterminées à la question 5.
9. Représenter l'allure des trajectoires dans l'espace des phases : représenter graphiquement l'impulsion p_θ en fonction de θ pour différentes valeurs de la constante E.
10. Indiquer sur votre graphique la trajectoire correspondant aux conditions initiales suivantes : $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.