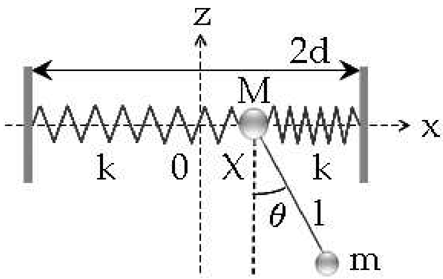
PROBLEME I : Pendule plan dont le point de suspension est fixé à deux ressorts identiques

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'un pendule plan de longueur l, dont le point de suspension est attachée à une masse M fixée à deux ressorts identiques de constantes de raideur $k > 0$, et de longueurs au repos d (voir figure ci-dessous). La masse M est contrainte de se déplacer sur l'axe $\{0x\}$, tandis que la masse m se déplace sur le plan $\{x0z\}$. On désigne par $\theta(t)$ l'angle que fait le pendule avec la verticale, par $X(t)$ la coordonnée de la masse M, et par $g > 0$ la constante gravitationnelle.

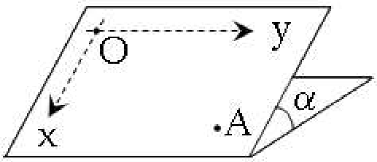


1. Montrer que l'énergie cinétique de ce système est égale à :
$$T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta$$
2. Montrer que l'énergie potentielle de ce système est égale à :
$$V = -mgl\cos\theta + kX^2$$
3. En déduire l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, X, \dot{X})$.
4. A l'aide des équations de Lagrange, trouver les équations différentielles vérifiées par $\theta(t)$ et $X(t)$.
5. Dans la limite $\theta \approx 0$,
   (a) montrer que le système d'équations différentielles couplées obtenu à la question 4 se réduit à :
$$\begin{cases} l\ddot{\theta} + \ddot{X} + g\theta = 0 \\ (m+M)\ddot{X} + ml\ddot{\theta} + 2kX = 0 \end{cases}$$
   (b) trouver les fréquences propres ω du système en fonction de m, M, g, l et k, en recherchant les solutions sous la forme $X(t) = A\cos(\omega t)$ et $\theta(t) = B\cos(\omega t)$;
   (c) représenter schématiquement la trajectoire associée dans l'espace des phases $\{\theta, \dot{\theta}\}$ en fonction de ω et B ;
   (d) quelles valeurs prennent les fréquences propres ω obtenues à la question 5(b) pour $k = 0$?

⟶ **TSVP**

PROBLEME II : Trajectoire optimale d'un skieur

L'objectif de ce problème est de trouver la trajectoire optimale pour qu'un skieur de masse m, évoluant sur une pente enneigée plane faisant un angle α par rapport à l'horizontal, gagne la course. Il faut donc trouver la trajectoire qui minimise le temps de parcours t_A entre les points O et A. Les forces de frottement seront négligées et on notera g la constante gravitationnelle. Le choix des axes x et y est indiqué sur la figure ci-après.



1. Montrer que l'énergie potentielle du skieur est égale à $V = -mgx \sin\alpha$.
2. Calculer l'énergie cinétique T et donner l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.
3. Calculer les impulsions p_x et p_y, et donner l'expression de l'hamiltonien $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.
4. Montrer que H est égal à l'énergie totale du système $E = T + V$, qui est une quantité conservée au cours du mouvement : $E = E_0$, où E_0 est une constante que vous prendrez égale à 0.
5. En déduire la relation suivante :
$$dt^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{2gx \sin\alpha}$$
6. Intégrer cette équation de façon à obtenir le temps $t_A = \int_O^A dt$, mis par le skieur pour aller du point O au point A sous la forme :
$$t_A = \int_O^A \mathcal{F}(x, y, y')dx$$
où $y'(x) = dy/dx$. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{F}(x, y, y')$.
7. La trajectoire optimale $y(x)$ est celle qui minimise le temps t_A. L'équation différentielle vérifiée par $y(x)$ s'obtient à partir de l'équation (du type équation de Lagrange) suivante :
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0$$
où $\mathcal{F}$ est la fonction que vous avez déterminé à la question 6.
A partir de l'équation ci-dessus, monter que la trajectoire optimale $y(x)$ vérifie l'équation : $y'(x) = C\sqrt{2gx \sin\alpha(1 + (y'(x))^2)}$, où C est une constante d'intégration.
8. Vérifier que :
$$x(t) = (1 - \cos(Kt))/K^2$$
$$y(t) = (Kt - \sin(Kt))/K^2$$
est solution de l'équation différentielle obtenue à la question 7. Donner l'expression de la constante K en fonction de g, α et C.
9. Représenter schématiquement la trajectoire entre les points O et A. Comment nomme-t-on cette courbe ?