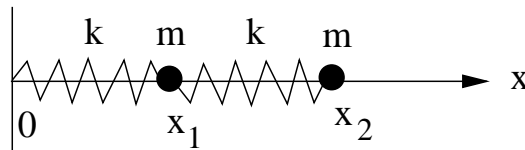


PROBLEME I : Masses fixées à des ressorts

Soient deux objets de même masse m reliés entre eux et fixés à un mur par deux ressorts identiques de constante de rappel $k > 0$ (voir figure). Nous supposons que les deux objets se déplacent le long de l'axe x uniquement et nous négligeons les forces de frottement. Nous désignons par x_1 et x_2 les coordonnées de chacun des deux objets, et par x_0 la constante correspondant à la longueur d'un ressort au repos.



1. Calculer l'énergie cinétique T du système.
2. Calculer l'énergie potentiel V .
3. En déduire le lagrangien $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$.
4. A partir des équations de Lagrange, établir les équations du mouvement qui régissent l'évolution temporelle des variables x_1 et x_2 .
5. A l'aide du changement de variables suivant :

$$X_1 = x_1 - x_0$$

$$X_2 = x_2 - 2x_0$$

montrer que les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme :

$$\ddot{X}_1 + \omega_0^2 (2X_1 - X_2) = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_0^2 (X_2 - X_1) = 0$$

Donner l'expression de ω_0 en fonction de k et m .

6. Rechercher les modes propres du système, c'est-à-dire les fréquences propres ω et les amplitudes A_1 et A_2 des solutions particulières :

$$X_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$$

$$X_2(t) = A_2 \cos(\omega t)$$

Commenter vos résultats.

7. Représenter schématiquement l'évolution temporelle des $x_1(t)$ et $x_2(t)$ associés aux modes propres obtenus.

→ TSVP

PROBLEME II : Particule relativiste

Le lagrangien d'une particule relativiste de masse m plongée dans un potentiel V , qui ne dépend pas explicitement du temps, s'écrit :

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) = -mc\sqrt{c^2 - v^2} - V(\vec{r})$$

où \vec{r} est la position de la particule, \vec{v} sa vitesse, et $v = \|\vec{v}\|$ la norme de la vitesse. La constante c correspond à la vitesse de la lumière.

1. Calculer les composantes p_x , p_y et p_z de l'impulsion \vec{p} de la particule.
2. En déduire l'expression de v en fonction de m , c et $p = \|\vec{p}\|$.
3. Calculer le produit scalaire de l'impulsion par la vitesse, $\vec{p} \cdot \vec{v}$, et exprimer-le en fonction des quantités m , c et p uniquement.
4. Montrer que l'hamiltonien de la particule est égal à :

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V(\vec{r})$$

5. A l'aide des équations de Hamilton, démontrer que H est une quantité conservée au cours du mouvement, qui correspond à l'énergie totale E .
6. Dans la mesure où l'on a $\mathcal{L} = T - E_P$ et $E = T + E_P$, en déduire les expressions de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle E_P d'une particule relativiste en fonction de m , c et v .

NB : l'énergie potentielle E_P d'une particule relativiste n'est pas simplement donnée par V , elle contient une contribution supplémentaire que vous devez trouver à l'issue de votre calcul.

7. Que deviennent les expressions de \mathcal{L} , \vec{p} , E , T et E_P dans la limite non relativiste, c'est-à-dire lorsque $v \ll c$.