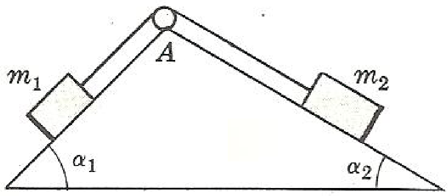
PROBLEME 1 : Masses reliées entre elles sur plans inclinés

Considérons deux masses m_1 et m_2 fixées entre elles par un fil inextensible de longueur l, se déplaçant sur des plans inclinés d'angles α_1 et α_2. Ces masses sont soumises à la pesanteur (constante de gravitation $g > 0$). Les frottements sont négligés.



Soient $\{x_1, z_1\}$ et $\{x_2, z_2\}$ les coordonnées des masses m_1 et m_2, que l'on supposera ponctuelles. Soient $\{x_A, z_A\}$ les coordonnées du point A, et l_1, l_2 les distances entre le point A et les masses m_1, m_2 respectivement. Le point A est fixe mais les longueurs l_1 et l_2 peuvent varier au cours du temps.

1. Exprimer x_1, z_1, x_2 et z_2 en fonction des coordonnées du point A, des longueurs l_1, l_2, et des angles α_1, α_2.
2. Eliminer les variables l_1 et l_2 des expressions de z_1, x_2 et z_2 obtenues à la question 1, en utilisant les deux égalités :
$$l_1 = \frac{x_A - x_1}{\cos\alpha_1}, \qquad l_2 = l - l_1$$
3. Montrer que les coordonnées des vitesses $\dot{z}_1$, $\dot{x}_2$ et $\dot{z}_2$ sont reliées à $\dot{x}_1$ de la façon suivante :
$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}, \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}, \qquad \dot{z}_2 = -\dot{x}_1\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1}$$
4. Exprimer l'énergie cinétique T en fonction de m_1, m_2, $\dot{x}_1$ et α_1.
5. Calculer l'énergie potentielle $V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$, puis le lagrangien $\mathcal{L}(x_1, \dot{x}_2)$. Faites en sorte que seules les variables x_1 et $\dot{x}_1$ et les constantes m_1, m_2, g, l, α_1, α_2, x_A et z_A apparaissent. Vous pouvez regrouper sous la désignation V_0 l'ensemble des termes constants de V dans le but de simplifier la suite du calcul.
6. Exprimer l'impulsion p_1 associé à la variable x_1 en fonction de m_1, m_2, $\dot{x}_1$ et α_1.
7. Calculer l'hamiltonien $H(x_1, p_1)$ et montrer qu'il est égal à la somme $T + V$.
8. Ecrire les équations de Hamilton et monter que l'équation différentielle vérifiée par x_1 est de la forme
$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = g\cos\alpha_1\Big(m_2\sin\alpha_2 - m_1\sin\alpha_1\Big)$$
9. En déduire les expressions des normes des accélérations $\sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{z}_1^2}$ et $\sqrt{\ddot{x}_2^2 + \ddot{z}_2^2}$. Ces normes sont-elles différentes ou égales ?

$\longrightarrow$ **TSVP**

PROBLEME 2 : Parallélépipède rectangle libre en rotation

Soit un parallélépipède rectangle homogène de masse M, de hauteur h, et ayant pour base un carré de côté R.

1. Calculer le tenseur d'inertie $\mathbf{I}$ de ce parallélépipède par rapport à son centre de masse C.
2. Montrer que ce tenseur est de la forme :

$$\mathbf{I} \;=\; \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

   et donner les expressions de I_1 et I_3 en fonction de M, h et R.
3. En l'absence de toute force extérieure agissant sur ce parallélépipède, écrire l'équation du mouvement qui lie le moment angulaire $\vec{L}$ et la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.
4. A partir de cette équation du mouvement, montrer que les composantes Ω_1, Ω_2 et Ω_3 de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ vérifient les équations d'Euler :

$$\begin{pmatrix} I_1\dot{\Omega}_1 \\ I_1\dot{\Omega}_2 \\ I_3\dot{\Omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_1 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\ (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Résoudre l'équation différentielle à laquelle obéit $\Omega_3(t)$.
6. Résoudre les équations différentielles couplées auxquelles obéissent $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ en prenant comme conditions initiales :

$$\Omega_1(t=0) = \Omega_0, \qquad \dot{\Omega}_1(t=0) = 0$$

7. Donner l'expression de la fréquence de précession ω_0 obtenue en fonction de h, R et Ω_3. Que vaut-elle lorsque $R = h$?