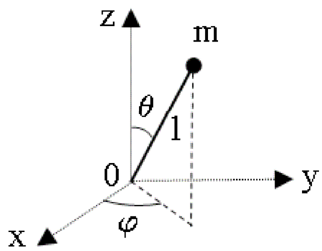
PROBLEME 1 : Pendule sphérique soumis à la force de gravitation

Soit un pendule sphérique de masse m, relié au point 0 par une tige rigide de longueur l. Le pendule est soumis à la force de gravitation de constante $g > 0$. Les forces de frottement seront négligées. La position de la masse m est repérée à chaque instant par les deux angles θ et φ définis sur la figure ci-après.



1. Démontrer que l'énergie cinétique T de la masse m est donnée par l'expression :
$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$
2. Démontrer que l'énergie potentielle V associée à la force de gravitation est donnée à une constante près par :
$$V = mgl\cos\theta$$
3. En déduire l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta, \varphi)$.
4. Calculer les impulsions p_θ et p_φ associées aux angles θ et φ.
5. En déduire l'expression de l'hamiltonien $H(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi)$.
6. Ecrire les équations de Hamilton.
7. Identifier les constantes du mouvement.
8. Montrer que les équations du mouvement de ce pendule s'écrivent :
$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = C \qquad (1)$$
$$\ddot{\theta} - \cos\theta\sin\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (2)$$
où C est une constante que vous exprimerez en fonction de m, l et p_φ.
9. Nous souhaitons déterminer pour quel angle θ le pendule présentera un mouvement de précession à vitesse constante autour de l'axe z : θ et $\dot{\varphi}$ ont alors des valeurs constantes. Que devient l'équation (2) dans ce cas ?
Trouver l'expression de $\dot{\varphi}$ en fonction de θ, g et l.
Quelle est la condition sur l'angle θ ? Faites un schéma pour vous aider.

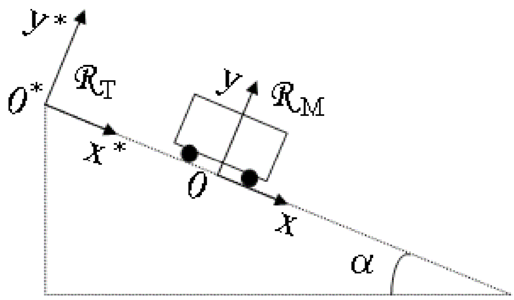
$\longrightarrow$ **TSVP**

PROBLEME 2 : Véhicule sur route inclinée

Soit un véhicule de masse M abandonné sans vitesse initiale sur une route inclinée faisant un angle α avec l'horizontale (voir figure ci-dessous). On définit deux référentiels : le référentiel galiléen fixe $\mathcal{R}_T$ attaché à la route, et le référentiel mobile $\mathcal{R}_M$ attaché au véhicule. Soient $\vec{a}^{\,*}$ l'accélération du véhicule dans $\mathcal{R}_T$ et $\vec{a}$ l'accélération du véhicule dans $\mathcal{R}_M$.

Au cours de son mouvement, le véhicule subit les trois forces suivantes :

- une force de frottement $\vec{F} = -\eta\vec{v}^{\,*}$, avec $\eta > 0$ et $\vec{v}^{\,*}$ la vitesse du véhicule dans $\mathcal{R}_T$;
- la force de réaction de la route $\vec{R}$;
- la force de gravitation $\vec{P}$, avec $g > 0$ la constante de gravitation.



1. Faire un schéma des forces en présence en indiquant clairement leurs directions.
2. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_T$.
3. En projetant l'équation vectorielle obtenue à la question 2 sur les axes $x^{\,*}$ et $y^{\,*}$, montrer que l'on a les relations :

$$M\ddot{x}^{\,*} = Mg\sin\alpha - \eta\dot{x}^{\,*}$$
$$R_{y^*} = Mg\cos\alpha$$

4. Résoudre l'équation différentielle à laquelle obéit $\dot{x}^{\,*}(t)$ et donner l'évolution temporelle de $\vec{v}^{\,*}(t)$.
5. Déterminer l'évolution temporelle de l'accélération $\vec{a}^{\,*}(t)$ du véhicule.
6. En déduire si le référentiel $\mathcal{R}_M$ est galiléen ou pas. Justifier votre réponse.
7. Quelles sont les valeurs de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du véhicule dans le référentiel $\mathcal{R}_M$?
8. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel mobile $\mathcal{R}_M$. Comment appelle-t-on les forces supplémentaires qui agissent sur la masse M dans $\mathcal{R}_M$?
9. Donner l'expression de la force d'entraînement $\vec{f}_{ent}$.