Coordonnées sphériques

Si on pose, dans un exercice :

$$\vec{r}(t) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \text{ avec } \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

où r, θ, ϕ sont des fonctions du temps, il est plus aisé d'exprimer le problème en terme des coordonnées sphériques. Pour cela, on pose :

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ainsi, le calcul de la vitesse est simplement :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r.$$

Il faut maintenant calculer $\dot{\vec{e}}_r$. Pour cela, on tient compte du fait que $\vec{e}_r$ dépend explicitement à la fois de θ et de ϕ. Ainsi :

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}.$$

Or, par définition :

$$\vec{e}_\phi = \frac{1}{\|\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}\|}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}, \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{\|\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\|}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}.$$

Il faut donc maintenant mener les calculs jusqu'au bout :

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \left\|\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}\right\| = \sin\theta, \quad \Rightarrow \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \left\|\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\right\| = 1, \quad \Rightarrow \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi.$$

On obtient donc :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi\right).$$

Il est alors aisé de déduire que l'énergie cinétique d'une particule de masse m et de position $\vec{r}(t)$ est :

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin\theta^2\right).$$