Chapitre 4

Modélisation d'un pendule double

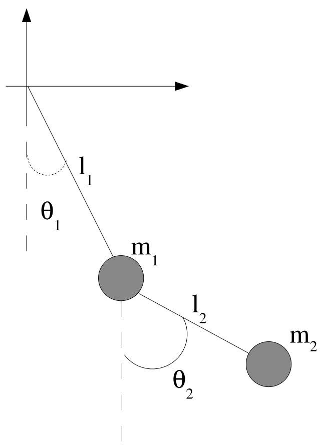

FIG. 4.1 – Le pendule double

L'objectif de ce projet est de modéliser la dynamique d'un pendule double placé dans le champ de gravitation terrestre. Ce pendule est constitué de deux masses reliées par des cables rigides de masses négligeables.

En coordonnées polaires on exprime les positions des deux masses

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1)$$

$$y_1 = -l_1 \cos(\theta_1)$$

et

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2)$$

$$y_2 = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)$$

l'énergie totale du système s'exprime

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + g(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

où $v_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Le lagrangien du système s'exprime $L = T - V$, si on l'introduit dans l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

Objectifs

1. Réaliser un programme réalisant le calcul des équations différentielles en θ_1 et θ_2, ainsi qu'une animation permettant de visualiser la dynamique du pendule.
2. Pour aller plus loin, considérer un système tenant compte de la dissipation, en introduisant un terme de dissipation $D = \frac{1}{2}\lambda_i \theta_i^2$, le système d'équation s"écrit alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial D}{\partial \theta_i}$$