

Résolution d'équations différentielles du second ordre

1 Solution d'équations homogènes

Les équations homogènes sont des équations dont le second membre est nul. On peut donc les écrire en toute généralité :

$$a\ddot{r} + b\dot{r} + cr = 0, \text{ où } r = r(t). \quad (1)$$

La solution de ce type d'équation est $r(t) \propto e^{\omega t}$, où \propto indique une proportionnalité. Injectons ce type de solution dans (1) :

$$\begin{aligned} a\omega^2 e^{\omega t} + b\omega e^{\omega t} + ce^{\omega t} &= 0 \\ \Rightarrow a\omega^2 + b\omega + c &= 0. \end{aligned}$$

Donc pour que $r(t) \propto e^{\omega t}$ soit solution de (1), il faut que ω soit solution de l'équation caractéristique :

$$\boxed{a\omega^2 + b\omega + c = 0}. \quad (2)$$

Supposons maintenant que nous avons ω_1 , une solution de (2). La forme la plus générale de la solution que nous recherchons est donc :

$$r(t) = f(t)e^{\omega_1 t}.$$

Ainsi :

$$\dot{r}(t) = \left(\dot{f}(t) + \omega_1 f(t) \right) e^{\omega_1 t},$$

et

$$\ddot{r}(t) = \left(\ddot{f}(t) + 2\omega_1 \dot{f}(t) + \omega_1^2 f(t) \right) e^{\omega_1 t}.$$

On obtient donc que $r(t) = f(t)e^{\omega_1 t}$ est solution de (1) si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \left[a \left(\ddot{f}(t) + 2\omega_1 \dot{f}(t) + \omega_1^2 f(t) \right) + b \left(\dot{f}(t) + \omega_1 f(t) \right) + cf(t) \right] e^{\omega_1 t} = 0 \\ \Rightarrow & a\ddot{f}(t) + (2a\omega_1 + b)\dot{f}(t) + (a\omega_1^2 + b\omega_1 + c)f(t) = 0 \\ \Rightarrow & a\ddot{f}(t) + (2a\omega_1 + b)\dot{f}(t) = 0. \end{aligned}$$

On peut donc distinguer deux cas :

1. $2a\omega_1 + b = 0$

Dans ce cas, cela signifie que $\omega_1 = -\frac{b}{2a}$, donc ω_1 est une racine double de (2), que nous noterons ω . On a alors à résoudre :

$$a\ddot{f}(t) = 0 \Rightarrow f(t) = At + B,$$

où A et B sont des constantes à déterminer. Ainsi, la solution de l'équation (1) est :

$$\boxed{r(t) = (At + B)e^{\omega t}}.$$

2. $2a\omega_1 + b \neq 0$

Dans ce cas, il nous faut résoudre :

$$a\ddot{f}(t) + (2a\omega_1 + b)\dot{f}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{f}(t) = -\frac{2a\omega_1 + b}{a}\dot{f}(t).$$

On obtient donc :

$$\dot{f}(t) = Ce^{-\frac{2a\omega_1 + b}{a}t},$$

d'où :

$$f(t) = \frac{-C}{\frac{2a\omega_1 + b}{a}}e^{-\frac{2a\omega_1 + b}{a}t} + D.$$

On pose pour la suite :

$$A = \frac{-C}{\frac{2a\omega_1 + b}{a}}.$$

On peut maintenant injecter cette solution pour $f(t)$ dans $r(t) = f(t)e^{\omega_1 t}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(Ae^{-\frac{2a\omega_1 + b}{a}t} + D \right) e^{\omega_1 t} \\ &= Ae^{-\frac{a\omega_1 + b}{a}t} + De^{\omega_1 t} \end{aligned}$$

$$\boxed{r(t) = Ae^{\omega_2 t} + De^{\omega_1 t}},$$

où $\omega_2 = -\frac{a\omega_1 + b}{a}$ est la deuxième solution de l'équation caractéristique (2). Dans le cas particulier où ω_1 et ω_2 sont des racines complexes conjuguées, c'est à dire que le discriminant de l'équation caractéristique (2) est négatif, il est possible de noter :

$$\omega_1 = \alpha + i\beta, \quad \omega_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On obtient donc :

$$\boxed{r(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))}.$$

Dans tous les cas, les constantes A et B sont des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales données.

2 Solution d'équations inhomogènes

Les équations inhomogènes sont des équations dont le second membre n'est pas nul. On peut donc les écrire en toute généralité :

$$a\ddot{r}(t) + b\dot{r}(t) + cr(t) = g(t). \quad (3)$$

Pour résoudre ce type d'équation différentielle, il faut d'abord trouver la solution de l'équation homogène correspondante :

$$a\ddot{r}(t) + b\dot{r}(t) + cr(t) = 0,$$

puis trouver une solution particulière qui est le même type de fonction que $g(t)$. La solution générale est alors la somme de la solution de l'équation homogène avec la solution particulière. Les cas les plus pertinents sont alors :

1. $g(t) = C$, une constante,
2. $g(t) = C \cos(\omega t)$,
3. $g(t) = P^k(t)$, où $P^k(t)$ désigne un polynôme d'ordre k en t .

1. $g(t) = C$

On cherche donc une solution particulière $r_p(t) = A$. On injecte ce type de solution dans l'équation à résoudre, on obtient donc :

$$cA = C \Rightarrow A = r_p(t) = \frac{C}{c}.$$

2. $g(t) = C \cos(\omega t)$

On cherche donc une solution particulière $r_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Il suffit alors d'injecter cette solution particulière dans (3) et d'identifier les coefficients de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$ séparément.

3. $g(t) = P^k(t)$

On cherche alors une solution particulière $r_p(t)$ sous la forme d'un autre polynôme d'ordre k en t et il faut alors identifier séparément les coefficients des différentes puissances de t .

Dans tous les cas, si on écrit $r_0(t)$ la solution de l'équation homogène, la solution générale de (3) est donc :

$$\boxed{r(t) = r_0(t) + r_p(t)}.$$