

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES¹

Mai 2010

CH. DUVAL²

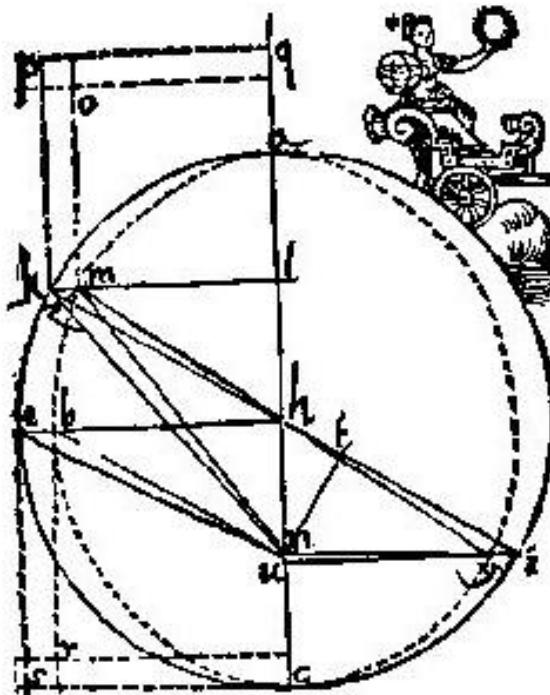


FIGURE 1 – Astronomia Nova (Kepler, 1609)

1. Unité d'Enseignement PHY1 des Licences "Physique, Chimie" et "Informatique et Mathématiques" — UFR Sciences de Luminy

2. Département de Physique, Université de la Méditerranée & CPT-CNRS, Luminy, Case 907, F-13288 Marseille, Cedex 9, FRANCE ; mailto : duval@cpt.univ-mrs.fr

Table des matières

Préface	ix
0.1 Euclide (~ III-ème siècle avant J.-C.)	ix
0.2 Aristote (~ -385 / -322)	x
0.3 Galilée (1564–1642)	x
0.3.1 Chute libre	xi
0.3.2 Principe de l'inertie	xiii
0.4 Kepler (1571–1630)	xv
0.4.1 L'ellipse	xv
0.4.2 Les trois lois de Kepler	xvi
0.4.3 Le système solaire	xvii
0.5 Newton (1642–1727)	xvii
0.5.1 Principe fondamental de la dynamique	xix
0.5.2 Terre & Soleil	xx
0.6 Lagrange (1736–1813)	xxi
0.7 Einstein (1879–1955)	xxi
0.7.1 Relativité restreinte (1905)	xxi
0.7.2 Relativité générale (1915)	xxiii
1 Cinématique	1
1.1 Géométrie euclidienne	1
1.1.1 L'espace \mathbf{R}^3	1
1.1.2 Produit scalaire	2
1.1.3 Angle de deux vecteurs	5
1.1.4 Produit vectoriel	5
1.1.5 Produit vectoriel et élément de surface	7

1.1.6	L'espace euclidien affine de dimension 3	10
1.1.7	Coordonnées polaires planes	13
1.2	Cinématique dans l'espace euclidien	14
1.2.1	Courbes de l'espace	14
1.2.2	Exemple : courbure & torsion de l'hélice circulaire	25
1.3	Cinématique dans l'espace-temps galiléen	28
1.3.1	L'espace-temps	28
1.3.2	Lignes d'univers	30
1.3.3	Groupe de Galilée	34
1.3.4	Exemples de changements de référentiels	38
2	Équations différentielles par l'exemple	41
2.1	Équations affines du premier ordre	41
2.1.1	Solution générale de l'équation homogène	41
2.1.2	Solution générale de l'équation avec second membre	42
2.1.3	Exemples	43
2.2	Équations affines du second ordre	46
2.2.1	Résolution générale de l'équation homogène	47
2.2.2	Résolution générale de l'équation avec second membre	48
2.2.3	Exemples	49
3	Principes de la dynamique newtonienne	55
3.1	Les trois lois de Newton	56
3.1.1	N_I : Principe de l'inertie	56
3.1.2	N_{II} : Principe fondamental de la dynamique	56
3.1.3	N_{III} : Loi de l'action & de la réaction	56
3.1.4	Analyse des lois de Newton	56
3.2	Exemples	58
3.2.1	Force de gravitation	58
3.2.2	Force de Lorentz	60
3.2.3	Forces de frottement visqueux	61
3.2.4	Forces de frottement solide-solide	61
3.2.5	Forces inertielles	63

4 Forces & lois de conservation	67
4.1 Calcul différentiel vectoriel	67
4.1.1 Rappel sur les dérivées	67
4.1.2 Dérivées partielles	68
4.1.3 Gradient	69
4.1.4 Rotationnel	70
4.1.5 Divergence	71
4.2 Travail & forces conservatives	71
4.2.1 Prélude : saut à la perche	71
4.2.2 Travail	72
4.3 Loi de conservation de l'énergie	78
4.4 Loi de conservation du moment angulaire	80
4.4.1 Champ de forces central	80
4.4.2 Vitesse aréolaire	81
4.4.3 Loi des aires	83
5 Analyse dimensionnelle	87
5.1 Unités fondamentales	87
5.2 Exercices	88
6 Théorèmes généraux et lois de conservation galiléennes	91
6.1 Théorèmes généraux	91
6.1.1 Forces intérieures & forces extérieures	91
6.1.2 Théorèmes généraux	92
6.2 Onze moments galiléens des systèmes isolés	97
6.2.1 Conservation de l'impulsion	97
6.2.2 Conservation du moment angulaire	98
6.2.3 Conservation du passage	98
6.2.4 Conservation de l'énergie	99
6.2.5 Conservation de la masse	100
6.2.6 Loi de transformation des moments galiléens	101
6.3 Exemples	102
6.3.1 Feu d'artifice	102

6.3.2	Ballistocardiographe	102
6.3.3	Fission de l'uranium 235	104
6.3.4	Jeu de billard	106
7	La gravitation	113
7.1	Le champ newtonien	113
7.1.1	Le triomphe de la mécanique céleste	113
7.1.2	Repères historiques	114
7.1.3	Équations de champ	115
7.2	Le problème à 2-corps	119
7.2.1	La décomposition barycentrique	119
7.2.2	Intégration par la méthode de Binet	122
7.2.3	Intermezzo : l'ellipse	125
7.2.4	Lien entre énergie et excentricité	128
7.2.5	La troisième loi de Kepler	133
7.2.6	Le vecteur de Lenz	134
7.2.7	Équation du temps	136
7.3	Vitesses cosmiques & trous noirs	138
7.3.1	Première vitesse cosmique	138
7.3.2	Deuxième vitesse cosmique	138
7.3.3	Trous noirs [Laplace]	139
8	L'Oscillateur harmonique	143
8.1	Le modèle Hooke	143
8.1.1	L'oscillateur harmonique unidimensionnel	144
8.1.2	L'oscillateur isotrope spatial	147
8.1.3	L'oscillateur anisotrope	147
8.2	Le problème à deux corps	148
8.2.1	Décomposition barycentrique	149
8.2.2	Trajectoires elliptiques	149
8.3	Linéarisation & petits mouvements	153
8.3.1	Vibrations de molécules diatomiques	153
8.3.2	Cuvettes & collines de potentiel	155

8.3.3	Linéarisation des équations du mouvement	158
8.4	Exemples de petits mouvements	161
8.4.1	Pendule (pas si) simple	161
8.4.2	Potentiel de Lennard-Jones	164
8.4.3	Potentiel de Higgs	164
8.4.4	Pendule cycloïdal	165
8.5	Un oscillateur forcé : le ciel	166
8.5.1	Le modèle de J.J. Thomson	167
8.5.2	Réponse aux excitations solaires	168
8.5.3	Puissance rayonnée par le ciel	169
9	Problèmes choisis	171
9.1	Hooke & Galilée	171
9.2	Radar routier	172
9.3	Lois de Descartes	172
9.4	Petits mouvements	174
9.5	Aberration des étoiles	175
9.6	Force de Lorentz & friction	176
9.7	Rentrée dans l'atmosphère	177
9.8	Voyage autour et au centre de la terre	178
9.9	L'équation du sprinter	179
9.10	Loi de Hubble	180
9.11	Périhélie de comète	181
9.12	Vitesse de libération	182
9.13	Fusée à un étage	183
Bibliographie		185

Préface

Justifions d'entrée le nom de cet enseignement : *Dynamique des Systèmes* et donnons tout d'abord l'étymologie du terme “Dynamique” qui est dérivé du grec “dunamis” (force). Les “Systèmes” sont, quant à eux, compris comme ensemble de points matériels dont la configuration est décrite par un nombre **fini** de paramètres¹ (ou degrés de liberté). Il s'agit donc de l'étude générale des **mouvements des systèmes soumis à l'action de forces**.

Il nous faut souligner que depuis l'antiquité, astronomie, géométrie et mécanique entretiennent des rapports privilégiés, les avancées et progrès de certaines de ces sciences entraînant “mécaniquement” celui des autres. Signalons le cas exemplaire du calcul différentiel (Newton & Leibniz) dont l'émergence au XVII-ème siècle fut, en partie, due aux avancées théoriques fulgurantes en mécanique céleste (Newton), elles-mêmes impulsées par les interprétations décisives (Kepler) des récentes données observationnelles (Tycho Brahe).

Nous avons donc choisi de baser cette introduction sur certains points de repères historiques importants concernant des avancées scientifiques majeures en mécanique pré-relativiste.

0.1 Euclide (~ III-ème siècle avant J.-C.)

Les XIII livres des “Eléments” constituent la base intangible de la **géométrie euclidienne** abstraite (angles, distances ; droites, triangles, cercles, etc.), la seule envisagée jusqu'au début du XIX-ème siècle.

1. Il faut, par exemple, 3 paramètres pour décrire la position d'un satellite artificiel dans l'espace ; il en faut 6 pour donner la configuration d'une toupie, etc. Nous écartons donc de notre étude les milieux continus (fluides, milieux déformables, etc.) à un nombre ∞ de degrés de liberté.

La géométrie euclidienne revêt une importance tout particulière en physique et en mécanique car l'**espace tri-dimensionnel** qui sert d'arène aux phénomènes physiques est — dans une très bonne approximation² — un espace euclidien.

0.2 Aristote ($\sim -385 / -322$)

L'œuvre d'Aristote (esprit universel : philosophe, logicien, physicien, etc.) est considérable et a durablement influencé la pensée occidentale jusqu'à la Renaissance. Elle jette notamment les bases d'une physique “qualitative” (dialectique forme-matière³) et introduit le **temps** comme catégorie philosophique/scientifique au même titre que l'espace.

Pour Aristote, espace et temps sont indépendants. Il existe un espace absolu (celui de la terre) et un temps absolu (celui de la vie des hommes) : c'est le principe géocentrique aristotélicien (la Terre est le centre de l'Univers).

0.3 Galilée (1564–1642)

Galileo Galilei (dit Galilée), géomètre, astronome, mécanicien révolutionne la vision du monde en déplaçant l'homme du centre du cosmos et en ne privilégiant aucun point de vue, c'est-à-dire aucun **référentiel** pour cartographier l'Univers.

Citons quelques faits saillants de l'activité scientifique de Galilée :

- Mise au point d'une lunette (grossissement 10 – 30) qu'il pointe vers le ciel [*Sidereus Nuncius*, 1610]
 - observation des phases de Venus (qui tourne donc autour du Soleil)
 - découverte de 4 satellites de Jupiter (Io, Europe, Ganymède, Callisto)
 - observation de la surface lunaire, etc.
- Adoption du système héliocentrique (Copernic) ; Galilée soutient dès 1633, malgré les foudres du Saint-Office, que la Terre tourne autour du Soleil [*Dialogue sur les deux principaux systèmes du Monde*⁴, 1632], puis renie ce point

2. La relativité générale (Einstein, 1915) remettra en cause la nature euclidienne “plate” de l'espace tri-dimensionnel (ainsi que de l'espace-temps à quatre dimensions).

3. Il s'agit du principe fondateur de la relativité générale : la matière (source du champ de gravitation) courbe l'espace-temps et cette courbure (forme) génère, à son tour, la matière.

4. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, Ptolemaico e Copernico.*



FIGURE 2 – Galileo Galilei

de vue mais laisse échapper “*eppur si muove . . .*”

- Etude de la chute des corps : il s’agit de la première étude phénoménologique de la chute libre (“Expérience du mouvement”) [*Discorsi*,⁵ 1638]. Ce travail fondamental ouvre la voie à la théorie générale de la gravitation (Newton).
- Formulation du *Principe de l’inertie* — cf. plus bas — selon lequel il existe des référentiels dits inertiels (ou “galiléens”) tels que
 1. les lois de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels,
 2. tout référentiel animé d’un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel inertiel est inertiel.

0.3.1 Chute libre

Décrivons brièvement l’expérience du plan incliné de Galilée (cf. Fig. 3) avec une citation liminaire datant de 1632 : *Les espaces parcourus par un objet en chute libre, initialement au repos, avec un mouvement uniformément accéléré sont comme les carrés des temps mis à les traverser.*

⁵. *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux nouvelles sciences touchant la mécanique et les mouvements locaux.*

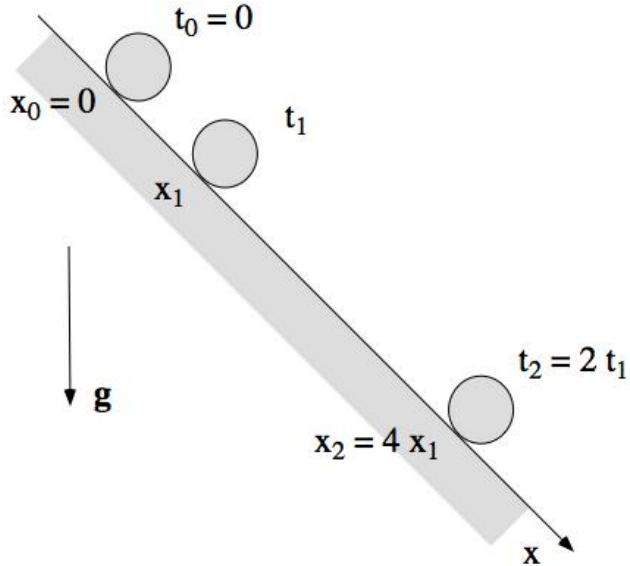


FIGURE 3 – Plan incliné (Galilée, 1609)

La position de la boule mesurée par Galilée au temps $t_n = nt_1$ est $x_n = n^2 x_1$ avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Cette loi phénoménologique en “carrés des temps” est comprise de nos jours de manière plus analytique : on sait qu’avec les conditions initiales ci-dessus la loi horaire du mouvement est

$$\begin{cases} x(t) = 0 & (t \leq 0) \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 & (t > 0) \end{cases} \quad (0.3.1)$$

avec $a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$ où la constante $g > 0$ est l’accélération de la pesanteur (sur terre !) et α l’angle que fait le plan incliné avec l’horizontale. La loi galiléenne précédente est confirmée : $x_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ et $x_n = x(t_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

On peut avantageusement décrire le mouvement de la boule en étudiant la trace spatio-temporelle de ce système assimilé à un point matériel : c’est une courbe de l’espace-temps (à 1 + 1 dimensions seulement !), appelée **ligne d’univers** dont l’équation est donnée ici par (0.3.1). Voir la Fig. 4. La ligne d’univers est une droite pour les temps négatifs et une branche de **parabole** pour les temps positifs.⁶

6. Le point O représente l’événement “lâcher de la boule”.

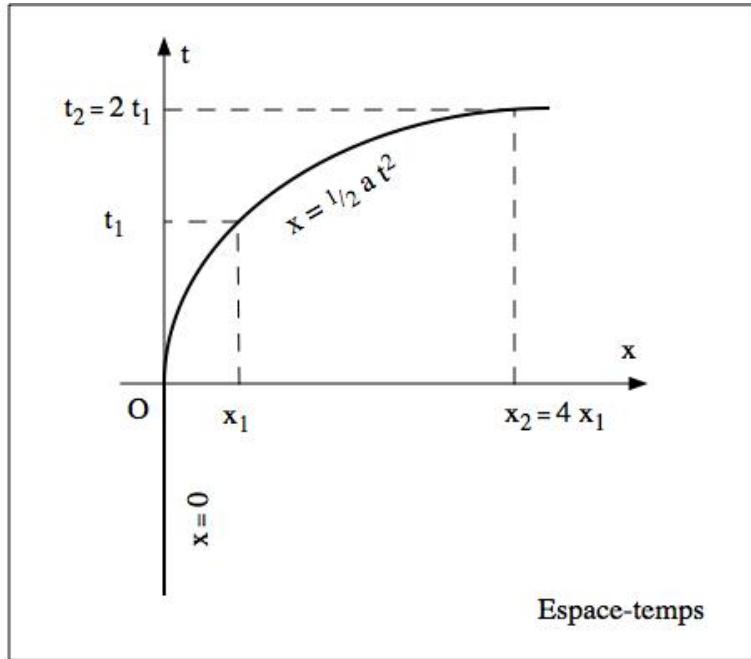


FIGURE 4 – Ligne d'univers : parabole de Galilée

0.3.2 Principe de l'inertie

Selon le “Principe de l'inertie” énoncé plus haut, la chute libre se décrit identiquement sur terre et sur un navire animé d'une vitesse constante par rapport à la rive.

Le problème était le suivant, cf. Fig. 5. On laisse tomber (sans vitesse initiale) un boulet du sommet du mât d'un navire à quai ; le boulet tombe bien au pied du mât. Quelle est la trajectoire du boulet si on reproduit l'expérience dans un navire se déplaçant à vitesse constante v par rapport à la mer ? Le boulet tombera-t-il devant ou derrière le mât ou encore au pied du mât ?

L'expérience a été menée par Pierre Gassendi à la fin du XVII-ème siècle sur des galères dans la rade de ...Marseille.

On sait que les équations du mouvement de Newton : $(\ddot{x}(t) = 0, \ddot{y}(t) = -g)$ s'intègrent immédiatement si on connaît vitesse $(\dot{x}(0) = v, \dot{y}(0) = 0)$ et position $(x(0) = 0, y(0) = h)$ initiales du boulet (h représente ici la hauteur du mât). Il vient aisément

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \quad (0.3.2)$$

ce qui signifie que la trajectoire, *vue de la rive*, est une parabole : $y = -\frac{1}{2}gx^2/v^2 + h$.

Dans le cas où le navire est à l'arrêt, $v = 0$, les équations (0.3.2) confirment bien que $x(t) = 0$ quel que soit la date t : le boulet tombe bien au pied du mât.

Maintenant, un **changement de référentiel** “rive-navire”, va nous offrir le point de vue des marins grâce à la transformation de coordonnées suivante (cf. Fig. 5) :

$$\begin{cases} x^* = x - vt \\ y^* = y \\ (t^* = t) \end{cases} \quad (0.3.3)$$

appelée **boost** de vitesse v selon l'axe des x . Grâce à (0.3.2), on trouve

$$\begin{cases} x^*(t) = 0 \\ y^*(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \quad (0.3.4)$$

prouvant que le boulet tombe bien au pied du mât dans le bateau en mouvement.

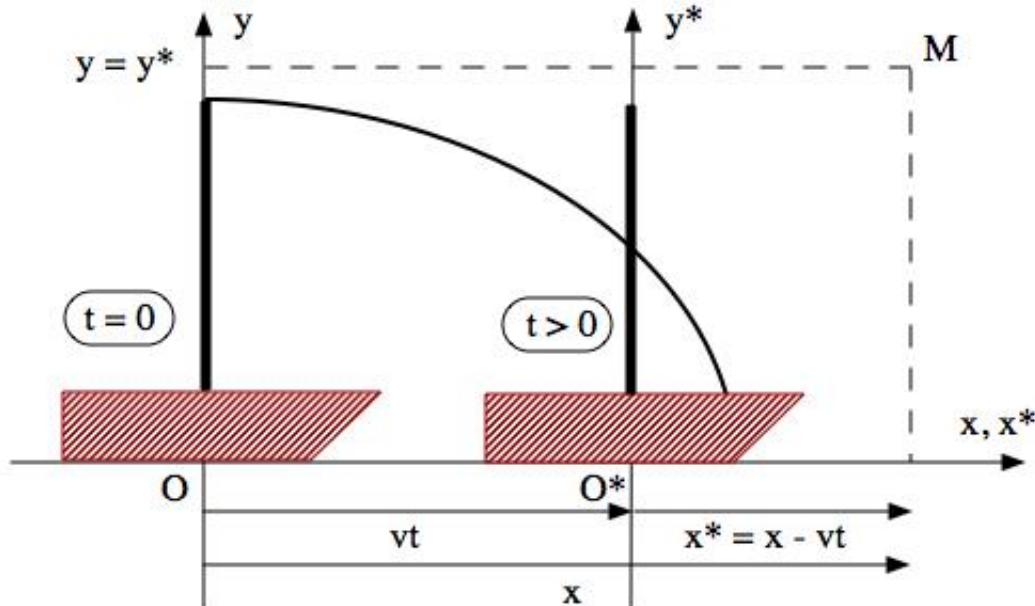


FIGURE 5 – Galère de Gassendi

Le “Principe de l'inertie” est justifié : le navire fournit un référentiel inertiel dans lequel les lois du mouvement sont précisément les *mêmes* équations de Newton : $(\ddot{x}^*(t) = 0, \ddot{y}^*(t) = -g)$. La vitesse initiale du boulet (par rapport au navire) étant ici nulle, $(\dot{x}^*(0) = 0, \dot{y}^*(0) = 0)$, et sa position initiale $(x^*(0) = 0, y^*(0) = h)$, on retrouve immédiatement (0.3.4).

0.4 Kepler (1571–1630)



FIGURE 6 – Johannes Kepler

Astronome du Saint-Empire romain germanique, Johannes Kepler analyse les résultats numériques des observations du “noble danois” Tycho Brahe relatives aux planètes (Prague, 1600).

Le seul mouvement acceptable, en ces temps, pour ces objets célestes devait être déduit d'une composition de mouvements circulaires uniformes⁷. Les données numériques confirment Kepler dans cette croyance — les orbites planétaires sont des cercles — sauf peut-être pour ...**Mars** dont l'orbite apparaît être un “ovale”. Kepler identifie finement l'orbite de Mars à une **ellipse** relativement excentrée.

0.4.1 L'ellipse

Rappelons le tracé du jardinier : on plante deux piquets F_1 et F_2 dans le sol, distants de $2c \geq 0$, et on se munit d'une corde fermée de longueur $2a + 2c$ ($a > c$). Un troisième piquet, M , permet de tracer une courbe sur le sol, la corde restant tendue autour des trois piquets : $\|\overrightarrow{MF_1}\| + \|\overrightarrow{MF_2}\| = 2a$, voir la Fig. 7.

7. Le cercle, figure géométrique parfaite, était d'essence divine ; il était à la base de la théorie des “épicycles” de Ptolémée [L'*Amalgame*, 150 après J.-C.].

Cette courbe est une **ellipse** de foyers F_1 et F_2 , de demi-grand axe a , de demi-petit axe $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et d'**excentricité**

$$e = \frac{c}{a}.$$

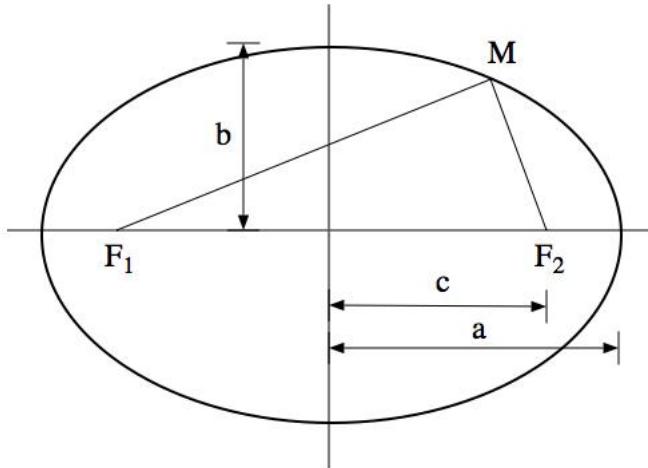


FIGURE 7 – Ellipse du jardinier

La découverte par Kepler du caractère elliptique de l’orbite de Mars⁸

$$e_{\text{Mars}} = 0,0934 \gg e_{\text{Terre}} = 0,0167$$

est une découverte scientifique majeure ouvrant la voie à l’astronomie et la physique modernes (cf. l’ouvrage d’Arthur Köstler [*Les somnambules*, 1960]).

0.4.2 Les trois lois de Kepler

Kepler formule les trois lois empiriques fondamentales suivantes [*Astronomia Nova*, 1609 ; *Harmonia Mundi*, 1619].

K_I Les planètes décrivent des *orbites elliptiques* dont le Soleil occupe un des foyers.

K_{II} Toute planète balaye des *aires égales en des temps égaux*.⁹

K_{III} La quantité a^3/T^2 est la *même* pour toutes les planètes (de demi-grand axe a et de période de révolution T).

8. Mars est, parmi les planètes connues à l’époque, celle dont la trajectoire est la plus excentrée ; les données concernant Mercure, trop proche du Soleil, étaient difficilement accessibles pour Kepler.

9. Voir Fig. 8.

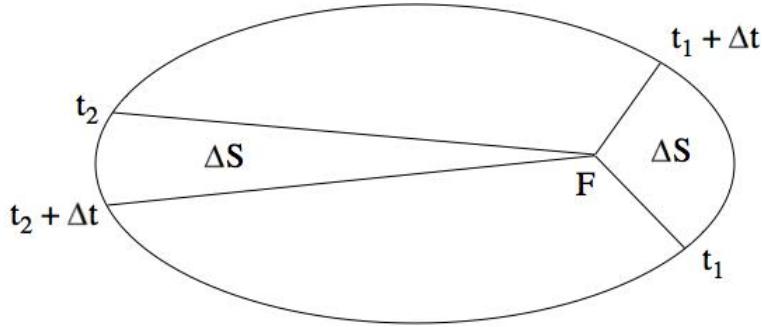


FIGURE 8 – Loi des aires

0.4.3 Le système solaire

Voici, à toutes fins utiles, quelques données (demi-grand axe, excentricité, période et masse) sur les planètes de notre système solaire [3, 7].

Planète	a/UA	e	T/an	M/M_\oplus
Mercure	0,387	0,2056	0,241	0,0553
Vénus	0,723	0,0068	0,615	0,815
Terre	1	0,0167	1	1
Mars	1,524	0,0934	1,881	0,1074
Astéroïdes	2,0–3,3			
Jupiter	5,203	0,0483	11,862	317,833
Saturne	9,540	0,0553	29,458	95,159
Uranus	19,180	0,0461	84,013	14,499
Neptune	30,070	0,0096	164,810	17,204

Signalons que depuis 2006 Pluton fait partie, avec Cérès, Eris et Makemake, des *planètes naines*.

0.5 Newton (1642–1727)

Sir Isaac Newton est une des plus grandes figures scientifiques de tous les temps. Après des études à Cambridge (lecture de Descartes, Gassendi, Galilée, etc.), il devient, à 27 ans, professeur à Trinity College qu'il ne quittera pratiquement jamais [1]. L'essentiel de ses découvertes scientifiques majeures a lieu pendant les années de peste (autour de 1665), alors qu'il est âgé de moins de 25 ans ! Les points saillants du grand œuvre de Newton peuvent être brièvement détaillés comme suit :



FIGURE 9 – Isaac Newton

- Calcul différentiel et intégral (indépendamment de Leibniz).
- Géométrie des courbes et analyse mathématique.
- Optique : décomposition de la lumière blanche, interférences lumineuses, etc.
- Mécanique céleste & théorie de la gravitation universelle : loi en “ $1/r^2$ ”.

“All matter attracts all other matter with a force proportional to the product of their masses and inversely proportional to the squares of the distances between them.”

- Axiomatique rigoureuse de la mécanique des systèmes (“trois lois de Newton”).

N_I Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sinon pour autant qu'il est contraint à changer cet état par les forces qui lui sont imprimées.

N_{II} Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée, et se fait selon la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée.

N_{III} Il y a toujours une réaction contraire à l'action et égale à celle-ci ; c'est-à-dire que les actions mutuelles de deux corps sont toujours égales et dirigées en sens contraire.

Philosophiae naturalis principia Mathematica, 1687.

Traduction Madame la Marquise du Chastellet, 1749.

0.5.1 Principe fondamental de la dynamique

Ce principe (ou deuxième loi de Newton) stipule donc l'égalité

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad (0.5.1)$$

où m représente la masse *inertielle* du point matériel considéré, d'accélération \vec{a} ; la force totale \vec{F} appliquée étant de nature phénoménologique.

Les équations régissant l'évolution temporelle d'un système mécanique (à savoir sa position \vec{r} et sa vitesse $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ dans un référentiel donné) sont donc des équations différentielles du second ordre de la forme générale

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (0.5.2)$$

où le membre de droite est donné, selon (0.5.1), par les forces extérieures.

La recherche de la solution de l'équation de Newton (0.5.2) pour des conditions initiales fixées ($\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0, t_0$) est une tâche en général ardue, sauf dans certains cas simples en présence de symétries, comme nous le verrons par la suite : champ newtonien (0.5.3) à symétrie sphérique et indépendant du temps, équations différentielles linéaires (oscillateur harmonique (an)isotrope), etc.

Ce type d'**équation différentielle** est universel ; il se rencontre non seulement en mécanique, mais aussi en électricité, en biologie et . . . en mathématiques. On montre l'existence et l'unicité (locale) de la solution de (0.5.2) pour des conditions initiales données. Ce résultat mathématique est à la base du **déterminisme** newtonien sur lequel repose l'essentiel de la physique pré-quantique.

L'application de ces principes généraux au cas particulier du mouvement des planètes dans le champ de gravitation

$$\vec{F}_{\text{Newton}} = -\frac{GMm}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} \quad (0.5.3)$$

dû au Soleil a permis à Newton de justifier complètement les trois lois de Kepler (Section 0.4.2) et de donner une assise théorique à des lois restées jusqu'alors purement empiriques. Dans (0.5.3), M désigne la masse du Soleil et m la masse (gravitationnelle) de la planète de position relative \vec{r} par rapport au Soleil ; la constante

$$G = 6,672\,59(85) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

est la constante de couplage de la gravitation newtonienne (cf. (7.1.2)).

La théorie universelle de la gravitation formulée par Newton reste parfaitement valable aujourd’hui : c’est grâce à elle que sont calculées les trajectoires des satellites artificiels et des sondes spatiales que l’homme envoie aux confins du système solaire. La Fig. 10 donne, à titre d’exemple, la trajectoire de la sonde **Global Surveyor** qui a été envoyée en 1997 sur Mars par la NASA et le JPL.¹⁰

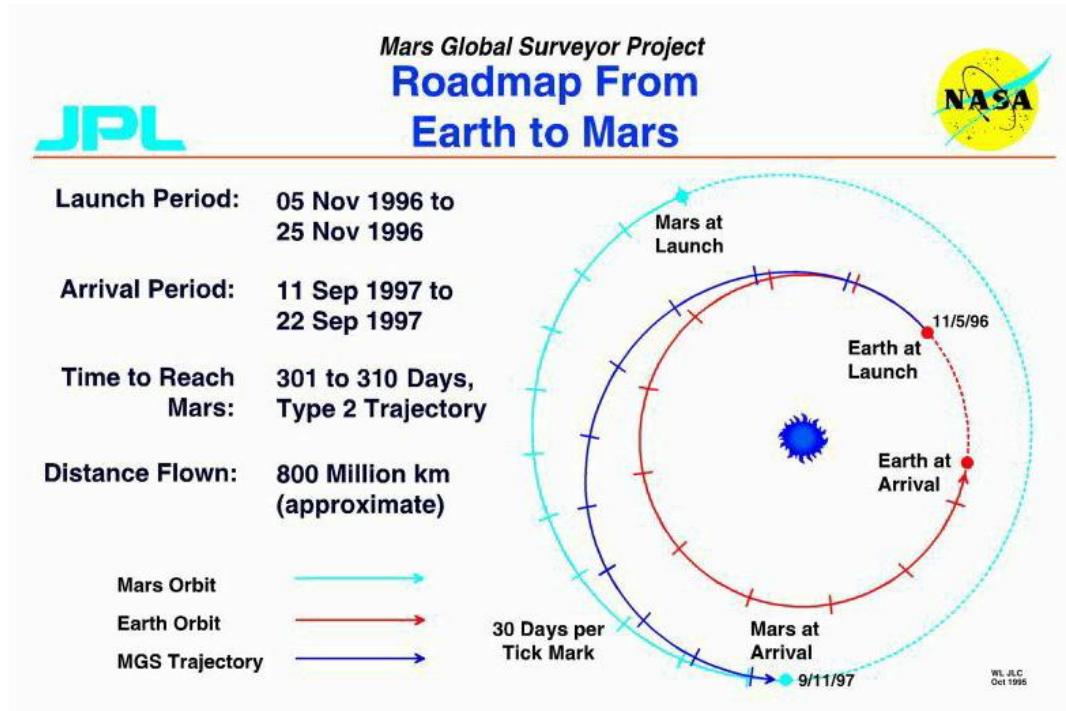


FIGURE 10 – Global Surveyor

La dernière mission vers la planète rouge est celle de la sonde **Phoenix Mars Lander** lancée le 4 août 2007 et arrivée à destination le 25 mai 2008 (exploration des plaines arctiques de Mars).

A signaler enfin, de manière plus anecdotique, que l’un des premiers et plus fervents admirateurs de l’œuvre de Newton fut . . . Voltaire.¹¹

0.5.2 Terre & Soleil

Terminons cette section par quelques données numériques utiles.¹²

10. Site de la NASA : <http://mars.jpl.nasa.gov/mgs>

11. Voltaire, *Les lettres anglaises* (1734), J.-J. Pauvert éditeur, 1964.

12. Pour mémoire, l’Unité Astronomique (UA) est la distance moyenne Terre-Soleil.

Unité astronomique	UA	$1,495\,978\,706\,6(2)\,10^{11}$ m
Année sidérale	an	365,257 jours
Masse du Soleil	M_{\odot}	$1,988\,92(25)\,10^{30}$ kg
Masse de la Terre	M_{\oplus}	$5,974\,2\,10^{24}$ kg
Rayon équatorial du Soleil	R_{\odot}	$6,959\,9(7)\,10^8$ m
Rayon équatorial de la Terre	R_{\oplus}	6381,40 km

0.6 Lagrange (1736–1813)

Avec Lagrange (Comte Joseph-Louis de), la mécanique quitte le domaine de la géométrie pour celui de l’analyse mathématique.

La *Mécanique analytique* publiée en 1788 est un ouvrage fondamental qui jette les bases d’une mécanique nouvelle basée sur la structure de “variété” des **espaces des mouvements** des systèmes dynamiques.

Lagrange introduit la notion de structure symplectique pour ces espaces ; il découvre également de nouvelles opérations algébriques (actuellement plus connues sous le nom de “crochets de Poisson”) qui ont ouvert la voie aux théories quantiques modernes.

L’héritage qu’a laissé ce grand scientifique est, actuellement, encore vivant dans les travaux des mathématiciens et mécaniciens contemporains (Arnold, Kirillov, Kosztant, Souriau, Marsden, Weinstein, etc.).

0.7 Einstein (1879–1955)

Albert Einstein est à l’origine de deux révolutions scientifiques, outre sa contribution à l’explication de l’effet photoélectrique (1905, Prix Nobel 1922).

0.7.1 Relativité restreinte (1905)

La relativité restreinte propose une modification radicale de la structure d’espac-temps classique galiléen pour permettre une adéquation complète avec la théorie de l’électromagnétisme de J.C. Maxwell (1890).

Cette toute nouvelle théorie du champ électromagnétique — unifiant avec un succès, toujours actuel aujourd’hui, les théories disparates de l’électrostatique et du

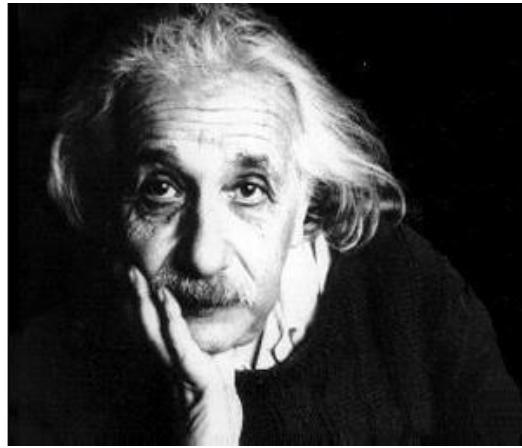


FIGURE 11 – Albert Einstein

magnétisme — étant incompatible avec la variance galiléenne des lois physiques, Einstein conçoit une nouvelle “relativité”, la **relativité restreinte** pour laquelle

- seule la notion d'espace-temps est absolue,¹³
- la vitesse de la lumière dans le vide, c , est un invariant.

Cette théorie fut envisagée, dès la fin du XIX-ème siècle, par de nombreux physiciens et étudiée sur le plan mathématique par Henri Poincaré qui détermina le groupe des symétries “relativistes” actuellement connu sous le nom de **groupe de Poincaré**.

Bien entendu, l'espace-temps de Minkowski-Einstein restitue l'espace-temps de Galilée dans la limite “non relativiste” $c \rightarrow +\infty$ de l'optique géométrique (où la lumière se propage instantanément).

La relativité restreinte a suscité la définition officielle du “mètre” reproduite ci-dessous (après celle de la “seconde”) :

- XIII-ème Conférence générale des poids et mesures (1967) : “La **seconde** est égale à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.”
- XVII-ème Conférence générale des poids et mesures (1983) : “Le **mètre** est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de seconde.”

13. Galilée rejette la notion aristotélicienne d'espace absolu mais conserve celle de temps absolu ; Einstein renonce à l'absolu de l'espace et du temps pris séparément.

0.7.2 Relativité générale (1915)

Einstein prolonge, en pleine première guerre mondiale, le succès flamboyant de la relativité restreinte qui ne prenait en considération que le champ électromagnétique et délaissait la description relativiste du champ de gravitation.

La fusion de la nouvelle théorie relativiste et de la gravitation newtonienne s'opère dans la théorie de la **relativité générale**.¹⁴

Cette théorie tire son origine sur la nécessité de la description de phénomènes fins récemment découverts en astronomie. Par exemple, une anomalie associée à l'orbite très excentrée¹⁵ de Mercure : il s'agit de l'avance de son périhélie¹⁶ d'un angle

$$\Delta\varphi = 42,56'' \pm 0,9''$$

par siècle. Cette observation reste inexplicable par la théorie des perturbations newtoniennes dues aux autres planètes.

La relativité générale (RG) associe le **champ de gravitation** à la *forme* de l'espace-temps via les **équations d'Einstein**

$$E = \kappa T \quad (0.7.1)$$

qui reposent sur la dualité entre courbure de l'espace-temps représentée par le tenseur d'Einstein E et la distribution de matière donnée par le tenseur énergie-impulsion T des sources. La constante κ est reliée à la constante de Newton, G , et à la vitesse de la lumière, c , par $\kappa = 8\pi G/c^4$.

Utilisant la version relativiste du champ de gravitation newtonien du Soleil, solution de (0.7.1), Einstein trouve

$$(\Delta\varphi)_{RG} = 43,03''$$

par siècle. Comparer à la valeur expérimentale ci-dessus !

“La chose la plus incompréhensible au sujet du monde est qu'il soit compréhensible.”

Einstein.

14. Le “Principe de relativité générale” va, en fait, au delà d'une simple théorie de la gravitation.

15. Bis repetita ! Cf. Kepler.

16. L'orbite elliptique de Mercure “tourne” en bloc très lentement ; donc le périhélie, qui est le point le plus proche du Soleil, est animé d'un mouvement de rotation séculaire.

Chapitre 1

Cinématique

1.1 Géométrie euclidienne

Voici une brève introduction à la géométrie euclidienne tri-dimensionnelle qui revêt une importance toute particulière pour nous : c'est la géométrie de l'“espace” (instantané) tri-dimensionnel de la mécanique et de la physique classique.

1.1.1 L'espace \mathbf{R}^3

Donnons nous deux vecteurs à 3 composantes réelles

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix},$$

i.e., $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ (l'espace des triplets de nombres réels).

On sait en faire la **somme**¹

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

On sait, de même, **multiplier**² le vecteur \vec{a} par un nombre réel λ (un “scalaire”):

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

1. Donnons un premier exemple physique : si deux forces \vec{F}_1 & \vec{F}_2 sont appliquées en un point, la *force totale* est la somme vectorielle $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ aussi appelée “résultante” (Gilles Personne de Roberval, 1602–1675).

2. Les physiciens disent aussi “dilater” ; par exemple, la force de rappel \vec{F} d'un ressort parfait est proportionnelle à l'élongation, \vec{r} , de ce dernier : $\vec{F} = -k\vec{r}$; le scalaire $k > 0$ est la “raideur” du ressort.

Notons la décomposition naturelle pour tout vecteur :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (1.1.1)$$

où

$$\vec{e}_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

constituent la **base canonique** de l'espace \mathbf{R}^3 .

On désigne par $\vec{0}$ l'**origine** de \mathbf{R}^3 (le vecteur de composantes toutes nulles).

Remarque 1.1.1. *Nos vecteurs ont ici $n = 3$ composantes ; tout ce qui sera dit par la suite sera (sauf mention contraire) vrai en “dimension” n quelconque.*

1.1.2 Produit scalaire

Dans le cadre de ce qui deviendra la géométrie euclidienne, nous allons maintenant associer à tout couple de vecteurs \vec{a} et \vec{b} un nombre réel (scalaire) appelé ...produit scalaire des deux vecteurs.

Définition 1.1.2. *On appelle **produit scalaire euclidien** de \vec{a} et \vec{b} , vecteurs de \mathbf{R}^3 , le nombre réel*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \quad (1.1.3)$$

Donnons l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - \sqrt{3}.$$

Proposition 1.1.3. *Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes :*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{b} \cdot \vec{a}$,
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
3. $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \equiv \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$,
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ pour tout $\vec{b} \iff \vec{a} = \vec{0}$,
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$.

Les trois premières propriétés du produit scalaire (symétrie et bi-linéarité) sont évidentes (cf. (1.1.3)) ; la quatrième (non dégénérescence) se montre aisément en prenant ($b_x = 1, b_y = 0, b_z = 0$), etc. La dernière (positivité) est triviale.

Si $a_z = 0$, on a $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 \geq 0$. Le théorème de Pythagore nous assure alors que $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ est bien la longueur du vecteur \vec{a} à deux composantes. D'où la

Définition 1.1.4. *On appelle **norme** (ou longueur) du vecteur $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ le nombre positif (ou nul)*

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (1.1.4)$$

On a par exemple $\|\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

Définition 1.1.5. *On appelle vecteur **unitaire** tout vecteur de norme 1.*

Définition 1.1.6. *Deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont dits **orthogonaux** (perpendiculaires) si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

Les vecteurs \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z (cf. (1.1.2)) sont unitaires et mutuellement orthogonaux. On dit qu'ils forment une **base orthonormée** de l'espace \mathbf{R}^3 euclidien (i.e., muni du produit scalaire (1.1.3)).

Notons que, grâce à la Proposition 1.1.3, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$ et $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$ est bien donné par (1.1.3) dans **toute** base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Exercice 1.1.7. *Vérifier que le produit scalaire est **invariant par rotation**, c'est-à-dire qu'il reste inchangé si on le calcule dans une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ou une autre base $(\vec{e}_x^*, \vec{e}_y^*, \vec{e}_z^*)$ déduite par une rotation arbitraire. On considérera, par exemple, une rotation d'angle θ autour de \vec{e}_z , à savoir³*

$$\vec{e}_x^* = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y^* = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y, \quad \vec{e}_z^* = \vec{e}_z. \quad (1.1.5)$$

Démonstration. On a, pour tout vecteur $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$, la décomposition suivante

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = a_x^* \vec{e}_x^* + a_y^* \vec{e}_y^* + a_z^* \vec{e}_z^*$$

3. La nouvelle base est orthonormée si l'ancienne l'est.

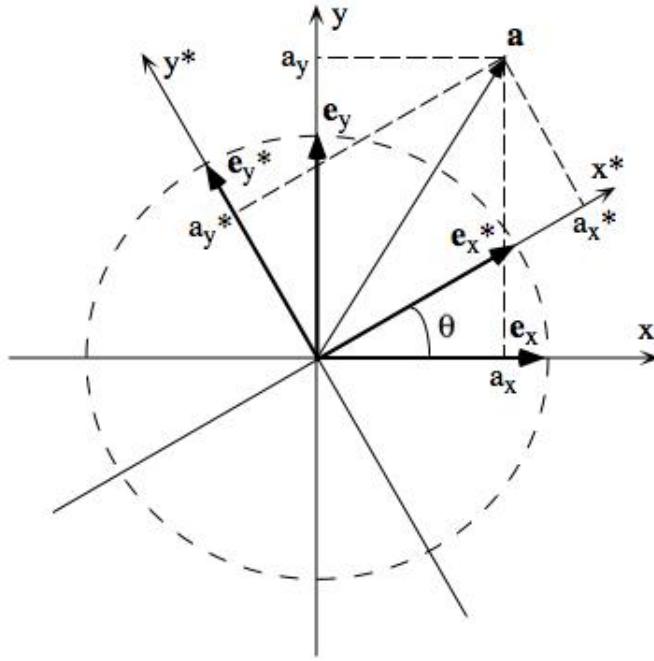


FIGURE 1.1 – Rotation plane

et, grâce à (1.1.5),

$$\begin{cases} a_x^* = + \cos \theta a_x + \sin \theta a_y \\ a_y^* = - \sin \theta a_x + \cos \theta a_y \\ a_z^* = a_z. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

On vérifie directement que le produit scalaire de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est alors

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_x^* b_x^* + a_y^* b_y^* + a_z^* b_z^*,$$

ce qui achève la preuve pour une rotation autour de \vec{e}_z . La généralisation utilise le fait que toute rotation spatiale est la composée de trois rotations planes. \square

Exemple 1.1.8. *Donnons quelques illustrations du produit scalaire en mécanique.*

- *Le travail d'une force constante \vec{F} le long du vecteur \overrightarrow{AB} est donné par*

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

- *La puissance instantanée d'une force \vec{F} appliquée à une particule de vitesse \vec{v} est égale à*

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

– L'énergie cinétique d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} est

$$T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2.$$

1.1.3 Angle de deux vecteurs

Soient \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs de \mathbf{R}^3 ; nous avons vu que leur produit scalaire est invariant par rotation, par exemple par la rotation plane (1.1.6) dans le plan engendré par ces deux vecteurs supposés non nuls. On peut donc se ramener au cas : $a_y = 0$ et $a_x = \|\vec{a}\| > 0$. Si θ désigne l'angle que forment entre eux \vec{e}_x et \vec{b} , on a alors $b_x = \|\vec{b}\| \cos \theta$ et $b_y = \|\vec{b}\| \sin \theta$ et donc

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta. \quad (1.1.7)$$

L'angle θ entre deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est donc défini dans l'intervalle $[0, \pi]$ par la formule (1.1.7). Attention : c'est un angle **non orienté**.⁴

Exercice 1.1.9. Calculer l'angle entre deux rayons lumineux dont les directions (vecteurs directeurs unitaires) sont $\vec{u}_1 = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{3}$ et $\vec{u}_2 = (\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)/\sqrt{3}$.

Démonstration. On vérifie que $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$; donc $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (1+1-1)/3 = \cos \theta$ entraîne $\cos \theta = 1/3$. Enfin $\theta \cong 1,23096 \cong 70,53^\circ$. \square

1.1.4 Produit vectoriel

Nous introduisons maintenant une deuxième opération qui associe, cette fois-ci, à tout couple de vecteurs un troisième vecteur de l'espace euclidien.

Définition 1.1.10. On appelle **produit vectoriel** de \vec{a} et \vec{b} , vecteurs de \mathbf{R}^3 , le nouveau vecteur

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

Remarque 1.1.11. La définition (1.1.8) du produit vectoriel ne vaut qu'en dimension $n = 3$.

Exemple 1.1.12. Voici quelques exemples de calculs de produit vectoriel :

4. Puisque \vec{a} et \vec{b} jouent des rôles symétriques par symétrie du produit scalaire (1.1.3).

1. Un calcul simple donne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2} - 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs dans le plan a la forme spéciale suivante

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (1.1.9)$$

3. Avec la définition (1.1.8), on trouve aisément

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad (1.1.10)$$

et donc, la table de multiplication (vectorielle)

\times	\vec{e}_x	\vec{e}_y	\vec{e}_z
\vec{e}_x	$\vec{0}$	\vec{e}_z	$-\vec{e}_y$
\vec{e}_y	$-\vec{e}_z$	$\vec{0}$	\vec{e}_x
\vec{e}_z	\vec{e}_y	$-\vec{e}_x$	$\vec{0}$

(1.1.11)

Proposition 1.1.13. Le produit vectoriel jouit des propriétés suivantes :

1. $\vec{a} \times \vec{b} \equiv -\vec{b} \times \vec{a}$ (antisymétrie),
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \equiv \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
3. $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \equiv \lambda \vec{a} \times \vec{b}$ quel que soit $\lambda \in \mathbf{R}$,
4. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ssi ($\vec{b} = \lambda \vec{a}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ ou $\vec{a} = \vec{0}$) : \vec{a} et \vec{b} sont **parallèles**,
5. $\vec{a} \times \vec{b}$ est **perpendiculaire** à \vec{a} et \vec{b} ,
6. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 \equiv \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ (identité de Lagrange),
7. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (formule du double produit vectoriel),
8. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \equiv \vec{0}$ (identité de Jacobi).

Il est important de souligner que le produit vectoriel permet d'orienter l'espace (notion fondamentale en mathématiques et en physique).

Définition 1.1.14. On dit que trois vecteurs \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} forment une base **directe** de \mathbf{R}^3 si⁵

$$\text{vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0. \quad (1.1.12)$$

Remarquons que la base canonique (1.1.2) est directe car $\text{vol}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = +1$.

Remarque 1.1.15. Grâce aux trois premières propriétés de la Proposition 1.1.13, le produit vectoriel de deux vecteurs quelconques se calcule donc par la table de multiplication (1.1.11) valable pour toute base orthonormée directe.

Signalons encore la formule utile⁶

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin \theta|. \quad (1.1.13)$$

reliant la norme du produit vectoriel de deux vecteurs à l'angle qu'ils forment entre eux.

1.1.5 Produit vectoriel et élément de surface

Considérons deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} de l'espace \mathbf{R}^3 . Montrons que $\vec{S} := \vec{a} \times \vec{b}$ donne la surface orientée du parallélogramme de sommets $(\vec{0}, \vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{b})$ — cf. Fig. 1.2.

Écartons d'entrée le cas où \vec{a} et \vec{b} sont parallèles (la surface du “parallélogramme” engendré est, bien sûr, nulle).

On travaille ainsi dans le plan engendré par ces deux vecteurs de produit vectoriel (1.1.9) ; ce dernier est invariant par rotation (1.1.6) dans ce plan, c'est-à-dire

$$a_x b_y - a_y b_x = a_x^* b_y^* - a_y^* b_x^*.$$

On peut donc, comme en Section 1.1.3, se ramener au cas $a_y = 0$ et $a_x = a > 0$ avec $a := \|\vec{a}\|$. On a donc $\vec{S} = ab_y \vec{e}_z$. Mais la norme $\|\vec{S}\| = a|b_y|$ donne évidemment la surface du rectangle de longueur a et de largeur $|b_y|$, donc celle du parallélogramme construit sur \vec{a} et \vec{b} . On a donc la

5. Cette quantité représente le volume **orienté** du parallélépipède construit sur les trois vecteurs : \vec{a}, \vec{b} et \vec{c} , pris dans cet ordre.

6. En notant $a := \|\vec{a}\|$, etc., on déduit de la formule de Lagrange (cf. Proposition 1.1.13) et de la formule (1.1.7) : $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = a^2 b^2 - (ab \cos \theta)^2 = a^2 b^2 \sin^2 \theta$; d'où le résultat.

Proposition 1.1.16. *Le produit vectoriel*

$$\vec{S} := \vec{a} \times \vec{b} \quad (1.1.14)$$

donne la **surface orientée** du parallélogramme construit sur $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$.

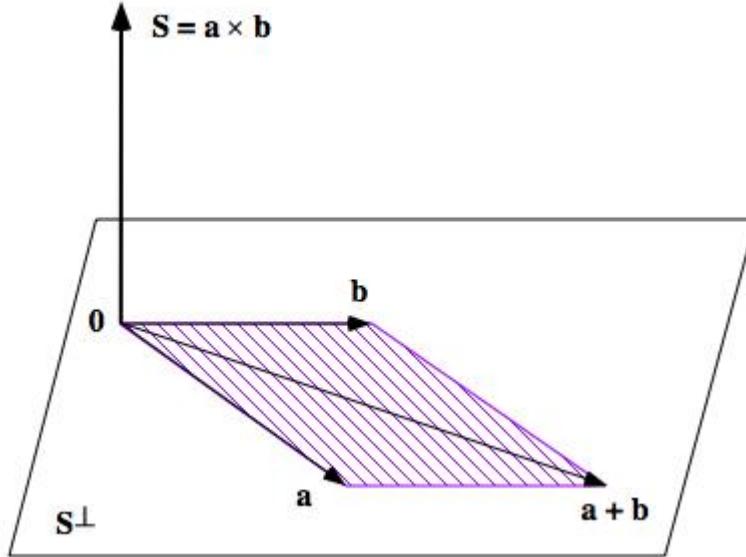


FIGURE 1.2 – Produit vectoriel

Exercice 1.1.17. Trouver la surface $\vec{\Sigma}$ du triangle de côtés $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ et $\vec{b} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$ pris dans cet ordre.

Démonstration. La surface orientée du triangle est donc $\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_y - \vec{e}_x$ et sa surface $\|\vec{\Sigma}\| = \sqrt{2}$. \square

Exemple 1.1.18. Voici quelques illustrations du produit vectoriel en mécanique.

1. LE MOMENT ANGULAIRE PAR RAPPORT À UNE ORIGINE. Si $\vec{P} = m\vec{v}$ désigne l'*impulsion*⁷ d'un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} en un point M de l'espace, on définit le **moment angulaire**⁸ par rapport à une origine O comme le produit vectoriel

$$\vec{L} := \overrightarrow{OM} \times \vec{P}. \quad (1.1.15)$$

7. On préférera la terme "impulsion" à celui de quantité de mouvement (daté) ou "moment linéaire" (anglicisme).

8. On n'emploiera pas le terme "moment cinétique" qui lui est équivalent.

2. LE MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT À UN POINT. Si \vec{F} est la force appliquée au point M , on appelle **moment** de cette force par rapport à une origine O le vecteur

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} := \overrightarrow{OM} \times \vec{F} \quad (1.1.16)$$

et, dans le cas de N points matériels M_1, M_2, \dots, M_N auxquels sont appliquées des forces $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$, le moment total n'est autre que le vecteur

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} := \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OM}_i \times \vec{F}_i. \quad (1.1.17)$$

Illustrons maintenant, à titre d'exercice sur le produit vectoriel, l'équilibre du levier d'Archimède⁹ (Syracuse, -287/-212).

Exercice 1.1.19. Considérer un levier dont les bras sont de longueur $\ell_1 = \|\overrightarrow{OM}_1\|$ et $\ell_2 = \|\overrightarrow{OM}_2\|$; appliquer aux extrémités M_1 et M_2 les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 indiquées sur la Fig. 1.3. Trouver les conditions d'équilibre du système.

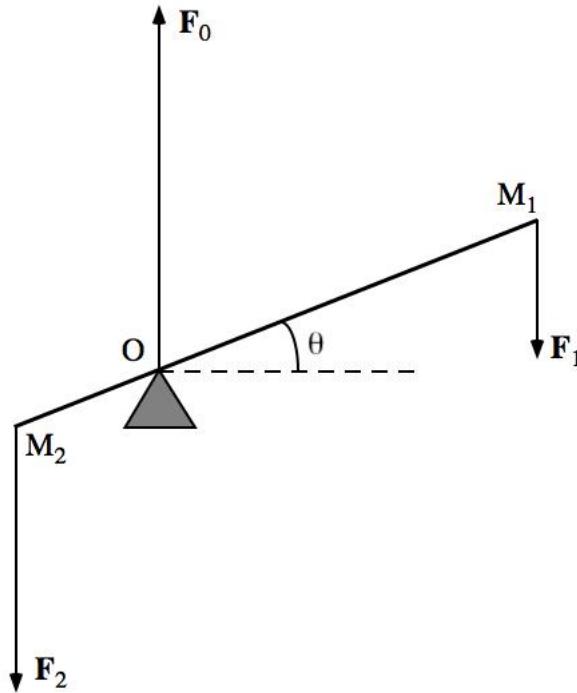


FIGURE 1.3 – Levier d'Archimède

9. "Donnez moi un point d'appui et je soulèverai le monde."

Démonstration. Nous verrons (cf. les Théorèmes généraux pour les systèmes) que les conditions d'équilibre du système sont :

1. force totale nulle : $\vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$,
2. moment total nul : $\overrightarrow{OM}_0 + \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 = \vec{0}$.

Nous avons ici

$$\overrightarrow{OM}_1 = \ell_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OM}_2 = -\ell_2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ F_i \end{pmatrix}$$

pour $i = 0, 1, 2$. La première condition donne immédiatement la réaction du pivot

$$F_0 = -(F_1 + F_2),$$

quant à la seconde : $\overrightarrow{OM}_1 \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}$ (cf. (1.1.17)), elle s'écrit

$$(\ell_1 F_1 - \ell_2 F_2) \cos \theta = 0$$

c'est-à-dire

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{ou} \quad \ell_1 F_1 = \ell_2 F_2.$$

On aura donc (seul cas physiquement acceptable) la condition d'équilibre d'Archimède

$$F_1 = \frac{\ell_2}{\ell_1} F_2$$

(1.1.18)

donnant la force \vec{F}_1 à exercer pour équilibrer la force \vec{F}_2 qui peut parfaitement être très intense ($|F_2| \gg |F_1|$) pour peu que $\ell_1 \gg \ell_2$. \square

1.1.6 L'espace euclidien affine de dimension 3

L'**espace affine** tri-dimensionnel A^3 ne se distingue de \mathbf{R}^3 que par le fait que l'*origine de l'espace n'est pas fixée*. Mais une fois fixé un point "origine" $O \in A^3$, l'isomorphisme (ou bijection) $A^3 \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^3$ permettant de les identifier est donné par¹⁰

$$M \longmapsto \overrightarrow{OM}$$

où $\overrightarrow{OM} = M - O$ désigne le *vecteur* d'origine O et d'extrémité M .

10. L'inverse $\mathbf{R}^3 \xrightarrow{\cong} A^3$ est donné par $\vec{a} \longmapsto O + \vec{a}$.

On désignera (cf. Fig. 1.4) par $\overrightarrow{dM} = M' - M$ le vecteur au point M associé au *bipoint* (M, M') , c'est-à-dire le déplacement qui permet de passer de M à M' .

Introduisons maintenant une notion importante, celle de référentiel affine (que nous retrouverons dans le cadre de la cinématique galiléenne). Qu'est-ce donc qu'un *référentiel*? C'est simplement un moyen de *repérer* un point par des coordonnées adaptées à l'espace affine.

Définition 1.1.20. *Un référentiel affine de A^3 est un couple \mathcal{R} formé d'un point origine $O \in A^3$ et d'une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de \mathbf{R}^3 . Tout point $M \in A^3$ sera alors repéré comme suit*

$$M = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := O + x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (1.1.19)$$

où les nombres $x, y, z \in \mathbf{R}$ représentent ses **coordonnées cartésiennes** dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{-1}(M). \quad (1.1.20)$$

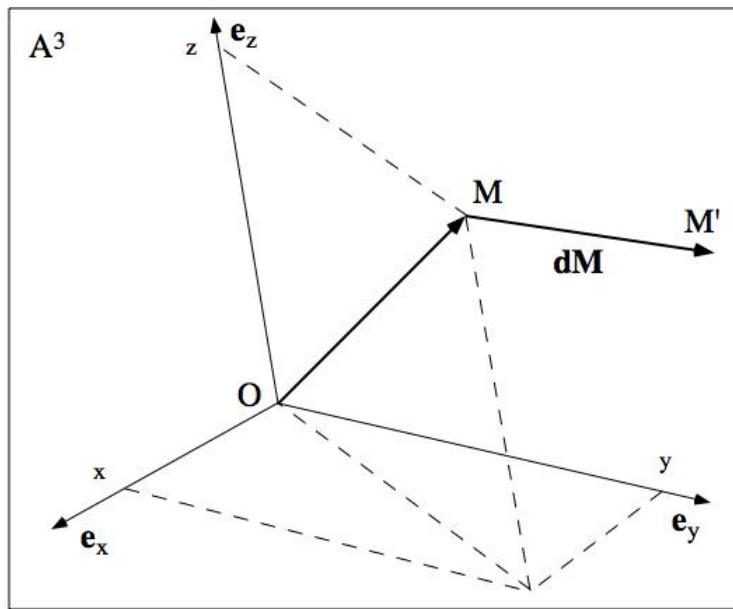


FIGURE 1.4 – Référentiel affine

Il existe d'autres systèmes de coordonnées pour repérer les points de l'espace : par exemple, les coordonnées cylindriques, sphériques, etc.

La Définition 1.1.20 se généralise immédiatement en dimension n quelconque (nous envisagerons, d'ailleurs, le cas $n = 4$ pour l'espace-temps).

Définition 1.1.21. On appelle **espace affine euclidien** E^3 l'espace A^3 muni du produit scalaire euclidien (1.1.3) de \mathbf{R}^3 : il existe une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ telle que la norme carrée du vecteur

$$\overrightarrow{dM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

d'origine $M \in E^3$ a la forme

$$\|\overrightarrow{dM}\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1.21)$$

en coordonnées cartésiennes associées à cette base. Le produit scalaire de deux vecteurs \overrightarrow{dM} et $\overrightarrow{\delta M}$ sera donc donné, dans cette même base, par

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} = dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z \quad (1.1.22)$$

Exemple 1.1.22. Donnons quelques exemples en basses dimensions.

1. L'espace E^1 modélise, entre autres, l'**axe temporel**. Son orientation donne la direction du futur; le produit scalaire euclidien canonique fournit une horloge¹¹.
2. L'espace de configuration d'une particule contrainte à se mouvoir dans un plan est l'espace E^2 . C'est le cas en **physique planaire** qui décrit d'importants phénomènes en physique de la matière condensée (l'effet Hall par exemple).
3. Notre **espace tri-dimensionnel** est modélisé par l'espace euclidien E^3 avec une excellente précision¹². Le produit scalaire euclidien fournit donc (i) **règle** permettant de mesurer les longueurs (1.1.21) et (ii) **goniomètre** permettant la mesure des angles (1.1.7). Le produit vectoriel permet, quant à lui, de choisir une **orientation**¹³ de l'espace (1.1.12).
4. Etc.

11. L'intervalle entre deux dates t et $t + dt$ est donc $|dt| = \sqrt{dt^2}$.

12. Seule la *relativité générale* d'Einstein (1916) a recours à un espace “courbe”, différent de l'espace euclidien E^3 , pour décrire la physique en champ gravitationnel intense et/ou à grande échelle (cosmologie).

13. Deux orientations sont possibles, on passe de l'une à l'autre à travers un ... miroir !

Définition 1.1.23. On appelle **référentiel euclidien** de E^3 tout référentiel affine $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\}$ formé d'un point origine $O \in E^3$ et d'une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ orthonormée directe.

Remarquons que les définitions précédentes se généralisent immédiatement au cas de l'espace euclidien E^n de dimension $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

1.1.7 Coordonnées polaires planes

Il existe, comme nous l'avons mentionné, d'autres façons de paramétriser l'espace euclidien. Introduisons, pour l'instant, uniquement les coordonnées polaires planes de l'espace E^2 qui se révèlent très utiles, par exemple, pour le traitement du problème à deux corps interagissant via une force centrale.

Si $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y)\}$ est un référentiel euclidien du plan orienté E^2 , et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le rayon vecteur repérant le point M , désignons par $r := \|\vec{r}\| \in \mathbf{R}^+$ la norme de \vec{r} et $\theta \in [0, 2\pi]$ l'angle¹⁴ que fait \vec{r} avec \vec{e}_x . On a alors

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y \quad (1.1.23)$$

$$= r \vec{e}_r \quad (1.1.24)$$

si on définit le **vecteur unitaire radial** par

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y. \quad (1.1.25)$$

Le passage des **coordonnées polaires** (r, θ) aux coordonnées cartésiennes (x, y) est donné par le **changement de coordonnées**

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.1.26)$$

dont l'inverse (local) est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r = |x + iy| \\ \theta = \arg(x + iy) \end{pmatrix}. \quad (1.1.27)$$

Avec la définition

$$\vec{e}_\theta := \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (1.1.28)$$

on obtient une base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée à chaque point $\vec{r} \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$.

Voir la Fig. 1.5.

14. L'angle θ n'est, bien entendu, défini que si $r \neq 0$.

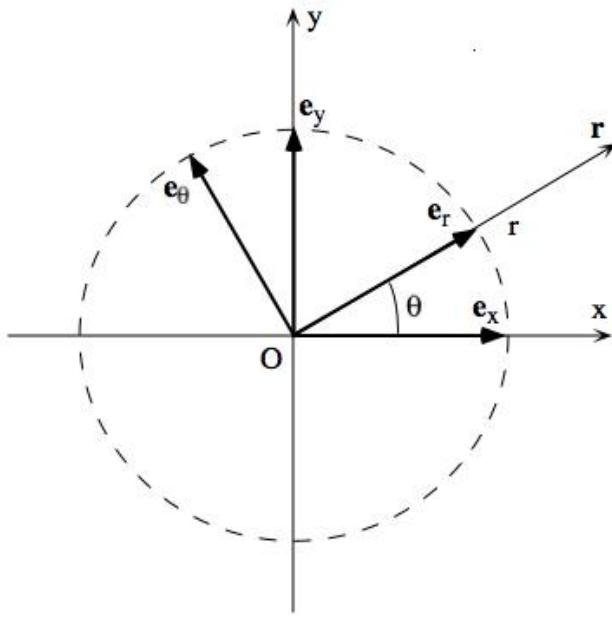


FIGURE 1.5 – Coordonnées polaires

1.2 Cinématique dans l'espace euclidien

1.2.1 Courbes de l'espace

Nous étudions maintenant les propriétés élémentaires des **courbes** (lisses) de E^3 , par exemple les **trajectoires** des particules soumises à des forces dans l'espace physique tridimensionnel.

Définition 1.2.1. Une **courbe** de l'espace affine A^3 est une fonction $I \subset \mathbf{R} \longrightarrow A^3$:

$$t \longmapsto M(t)$$

où I est un intervalle de \mathbf{R} .

Signalons que le **paramètre** t fait partie de la définition de la courbe (nous ne considérons ici que les courbes paramétrées). On utilise souvent un paramétrage par le *temps*, mais cela n'a rien de nécessaire¹⁵ comme nous le verrons.

Exemple 1.2.2. Voici quelques exemples de courbes (trajectoires de particules).

15. Certaines courbes ne peuvent pas être paramétrées par le temps, par exemple les trajectoires des rayons lumineux en optique géométrique qui accorde une vitesse infinie à la lumière (propagation à temps $t = \text{const.}$).

- DROITE. La courbe de A^3 définie par

$$M(t) = \vec{v}_0 t + M_0 \quad (1.2.1)$$

est une **droite** de vecteur directeur $\vec{v}_0 \in \mathbf{R}^3$ passant par le point $M_0 \in A^3$. C'est la trajectoire d'une particule **libre** (mouvement rectiligne uniforme) de vitesse \vec{v}_0 et de position initiale M_0 au temps $t = 0$. Les droites sont les **géodésiques** de l'espace euclidien E^3 , c'est-à-dire les courbes qui minimisent la distance entre deux points.

- HÉLICE CIRCULAIRE À PAS CONSTANT. Cette courbe (cf. Fig. 1.6) est définie, après le choix d'une origine $O \in E^3$, par

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ \hbar \omega t \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

avec $r \geq 0$ (le rayon), $\omega \in \mathbf{R}$ (la pulsation), $\hbar := h/(2\pi)$ et $h \in \mathbf{R}$ (le pas).

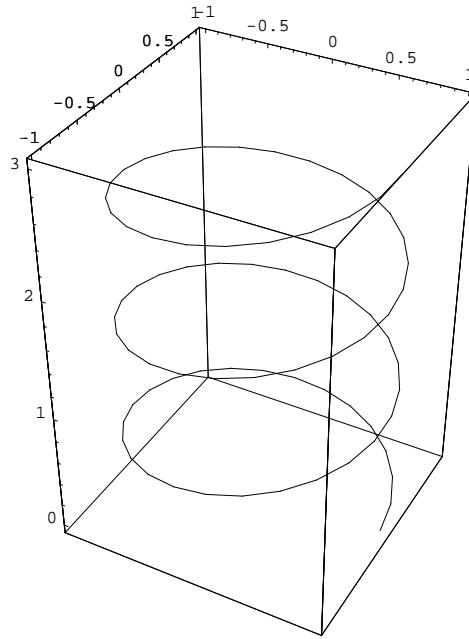


FIGURE 1.6 – Helice circulaire à pas constant

Elle représente, par exemple, la trajectoire d'une particule électriquement chargée et plongée dans un **champ magnétique** constant.

- PARABOLE. Voici l'équation paramétrique de cette courbe de E^3 :

$$M(t) = \frac{1}{2}\vec{g}[t - t_0]^2 + \vec{v}_0[t - t_0] + M_0 \quad (1.2.3)$$

avec $\vec{g} \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$, $\vec{v}_0 \in \mathbf{R}^3$ et $M_0 \in E^3$. Cette courbe (cf. Fig. 1.7) est contenue dans le plan engendré par les vecteurs constants \vec{g} et \vec{v}_0 si $\vec{g} \times \vec{v}_0 \neq \vec{0}$; elle est portée par la droite engendrée par \vec{g} si $\vec{g} \times \vec{v}_0 = \vec{0}$. C'est la trajectoire d'un point matériel en **chute libre** (dans le champ de gravitation \vec{g} constant), de vitesse initiale \vec{v}_0 et de position initiale $M_0 = M(t_0)$ à l'instant $t = t_0$.

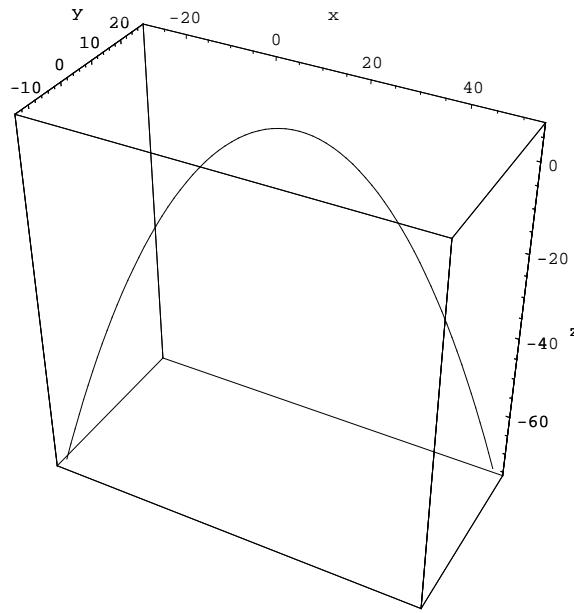


FIGURE 1.7 – Parabole

- ELLIPSE. Cette courbe de E^2 (cf. Fig. 1.8) a pour équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

où les constantes $a > 0$ et $b > 0$ représentent respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe (si l'on choisit $a \geq b$); le paramètre $\varphi \in \mathbf{R}$ s'appelle **anomalie excentrique** dans la terminologie des astronomes. Bien sûr, les ellipses pour lesquelles $a = b$ sont des **cercles**.

L'**ellipse** constitue (avec une bonne précision) la trajectoire des planètes du système solaire. Elle modélise aussi la trajectoire d'un oscillateur harmonique isotrope.

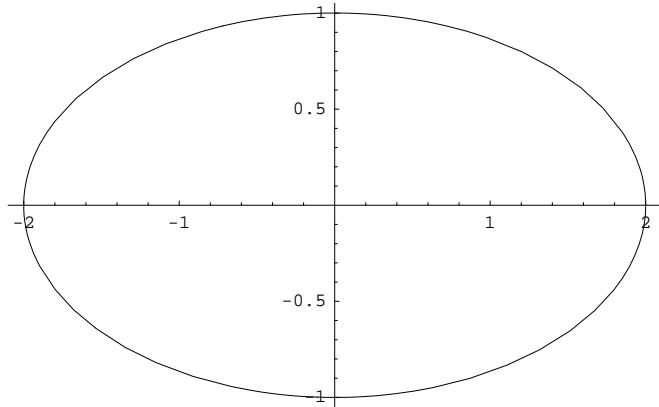


FIGURE 1.8 – Ellipse

- CYCLOÏDE. C'est la courbe (cf. Fig. 1.9), découverte par Galilée, d'équation paramétrique dans E^2 :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = R \begin{pmatrix} \theta - \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

représentant la **trajectoire d'un gravillon** sur une roue de rayon R roulant sans glisser ; ici le paramètre $\theta \in \mathbf{R}$ est l'angle que fait la direction du gravillon avec la "verticale".

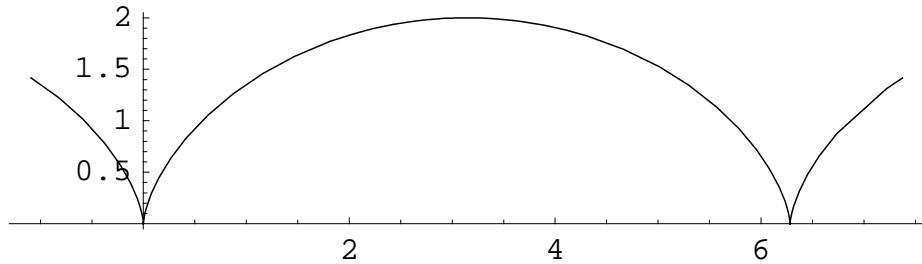


FIGURE 1.9 – Cycloïde

La **cycloïde** est encore une des trajectoires possibles d'une particule chargée plongée dans un **champ électromagnétique** (\vec{E}, \vec{B}) constant et **croisé**, c'est-à-dire tel que $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

Vitesse

Définition 1.2.3. Étant donné une courbe $t \mapsto M(t)$ de A^3 , on appelle **vitesse** au point $M(t)$ le vecteur

$$\vec{v}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \right]. \quad (1.2.6)$$

La courbe est dite 1 fois différentiable en ses points où l'expression (1.2.6) existe. La vitesse (1.2.6) est, par construction, **tangente** à la courbe.

Écrivons l'expression du **rayon vecteur** à chaque instant :

$$\vec{r}(t) := \overrightarrow{OM}(t) \quad (1.2.7)$$

dépendant du choix d'une origine $O \in A^3$. La définition (1.2.6) entraîne alors l'expression équivalente

$$\boxed{\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \right]} \quad (1.2.8)$$

qui est, bien sûr, indépendante du choix de l'origine.

Donnons enfin l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes. Posons

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad (1.2.9)$$

dans une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ quelconque. L'expression (1.2.8) entraîne immédiatement

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad (1.2.10)$$

où $dx/dt \equiv x'(t)$ désigne la dérivée¹⁶ ordinaire de la fonction $x(t)$, etc.

Accélération

Définition 1.2.4. Étant donné une courbe (1 fois différentiable) $t \mapsto M(t)$ de A^3 , on appelle maintenant **accélération** au point $M(t)$ le vecteur

$$\boxed{\vec{a}(t) := \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} \right]} \quad (1.2.11)$$

16. Si t est le “temps”, on note traditionnellement $\dot{x}(t)$ cette même dérivée.

La courbe est dite 2 fois différentiable aux points où l'expression (1.2.11) existe.¹⁷

Comme plus haut, l'accélération en coordonnées cartésiennes prend la forme

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \quad (1.2.12)$$

où $d^2x/dt^2 \equiv x''(t)$ désigne la dérivée seconde¹⁸ de la fonction $x(t)$, etc.

La formule (1.2.11) introduit la notion de dérivée vectorielle dont nous énonçons les propriétés élémentaires.

Proposition 1.2.5. *Si $f(t)$ est une fonction scalaire (à valeurs dans \mathbf{R}) lisse et $\vec{v}(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t)$ des fonctions vectorielles (à valeurs dans \mathbf{R}^3) lisses, alors*

1. $\frac{d}{dt} (f \vec{v}) = \frac{df}{dt} \vec{v} + f \frac{d\vec{v}}{dt},$
2. $\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}_2}{dt},$
3. $\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt},$
4. $\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \frac{d\vec{v}_2}{dt}.$

Exemple 1.2.6. *Donnons explicitement le calcul de la vitesse et de l'accélération dans les exemples précédents ; cf. Exemple 1.2.2.*

- DROITE. *On trouve clairement*

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0, \quad \vec{a}(t) = \vec{0}, \quad (1.2.13)$$

*confirmant que le mouvement est bien à accélération nulle : on dit alors que le paramètre t est un **paramètre affine**.*

- HÉLICE CIRCULAIRE. *Un calcul élémentaire donne*

$$\vec{v}(t) = \omega \begin{pmatrix} -r \sin(\omega t) \\ r \cos(\omega t) \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = -\omega^2 r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

ce qui indique que le mouvement s'opère à accélération variable avec le temps.

- PARABOLE. *Dans ce cas familier, on trouve*

$$\vec{v}(t) = \vec{g}[t - t_0] + \vec{v}_0, \quad \vec{a}(t) = \vec{g}, \quad (1.2.15)$$

c'est-à-dire un mouvement uniformément accéléré.

17. On définit ainsi les courbes 3, 4, etc. fois différentiables. Les courbes *infiniment* différentiables sont dites **lisses** ; ce sont celles que l'on considérera par la suite.

18. Encore une fois, si t est le “temps”, on note traditionnellement $\ddot{x}(t)$ cette même dérivée.

- ELLIPSE. La “vitesse” et l’“accélération” sont respectivement

$$\vec{v}(\varphi) = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(\varphi) = - \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.2.16)$$

dans la paramétrisation par l’angle φ .

- CYCLOÏDE. Dans ce cas, on obtient “vitesse” et “accélération”

$$\vec{v}(\theta) = R \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(\theta) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.2.17)$$

paramétrées par l’angle θ .

Abscisse curviligne

Considérons une courbe lisse $t \mapsto M(t)$ de E^3 , par exemple, et donnons nous une fonction lisse monotone $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : t \mapsto s$ (c’est-à-dire telle que $ds/dt \neq 0$ pour tout t dans l’intervalle de “temps” considéré). Il est alors possible d’utiliser ce nouveau paramètre, s , à la place du temps, t , pour paramétriser notre trajectoire. On a ainsi¹⁹

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (1.2.18)$$

et la nouvelle vitesse $d\vec{r}/ds$ est encore parallèle à \vec{v} .

La loi de transformation de l’accélération est plus subtile ; on trouve²⁰

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (1.2.19)$$

Il existe, en géométrie euclidienne, une classe privilégiée de paramètres qui est associée à la longueur d’arc des courbes de l’espace (la distance parcourue par le mobile entre deux instants donnés). Ce paramétrage très utile est donné par la

19. Il s’agit ici de la dérivée d’une fonction composée. Par exemple, la première composante de la vitesse donnée par : $(x \circ s)'(t) = x'(s(t)) s'(t) = x'(s) s'(t)$ secrira désormais de manière équivalente

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt},$$

ce qui conduit à l’expression vectorielle (1.2.18).

20. On trouve, grâce à (1.2.18) et à la Proposition 1.2.5 :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \right] \frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2},$$

c’est-à-dire l’équation (1.2.19).

Définition 1.2.7. On appelle **abscisse curviligne** d'une courbe $t \mapsto M(t)$ de E^3 tout paramètre s tel que

$$\vec{T} := \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (1.2.20)$$

soit un vecteur **unitaire**, c'est-à-dire tel que

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\|^2 = 1. \quad (1.2.21)$$

On appelle \vec{T} **tangente unitaire**.

Proposition 1.2.8. L'abscisse curviline, s , est caractérisée, au signe près et à une constante additive près, par la condition (1.2.21); un choix traditionnel est

$$s = + \int v(t) dt \quad (1.2.22)$$

où $v(t) := \|\vec{v}(t)\|$ est la **vitesse scalaire**.

Démonstration. Grâce à la formule (1.2.18) on a $v(t) := \|\vec{v}(t)\| = \|d\vec{r}/ds\| |ds/dt|$, et, par la définition (1.2.21) de l'abscisse curviline, $v(t) = |ds/dt|$; il vient donc $ds/dt = \pm v(t)$. Le choix standard²¹

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \quad (1.2.23)$$

conduit immédiatement à (1.2.22). \square

Remarque 1.2.9. On écrit parfois la définition (1.2.21) de l'abscisse curviline sous une forme équivalente, à savoir²²

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2.24)$$

dans un repère euclidien.

L'expression (1.2.22) se réécrit, si on le désire, comme

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(u) du \quad (1.2.25)$$

avec $s(t_0) = 0$ (origine de l'abscisse curviline). Il est donc clair, qu'étant donné une courbe $t \mapsto M(t)$ de E^3 , l'expression (1.2.25) représente la **longueur d'arc** entre les deux points $M(t_0)$ et $M(t)$, c'est-à-dire la distance curviline effectivement parcourue par le point entre les instants t_0 et t .

21. Ici, on a pris la détermination “orthochrone” (dans le sens du temps !) car $ds/dt = v(t) > 0$; la constante additive n'est autre que la constante arbitraire figurant dans la primitive (1.2.22).

22. La formule (1.2.24) est un raccourci saisissant pour $(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$.

Exemple 1.2.10. Calculons l'abscisse curviligne dans un certain nombre de cas.

1. DROITE. Les expressions (1.2.1) et (1.2.13) donnent $v(t) = v_0 (= \|\vec{v}_0\|)$; nous aurons donc $s(t) = \int v_0 dt = v_0 t + s_0$ (avec $s_0 \in \mathbf{R}$). La distance parcourue pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est bien $L = s(t_2) - s(t_1) = v_0[t_2 - t_1]$.
2. CERCLE. L'équation paramétrique d'un cercle de rayon R dans le plan E^2 est

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.26)$$

avec $\theta \in \mathbf{R}$; la vitesse est donc

$$\vec{v}(\theta) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.27)$$

et $v(\theta) = R$. D'où $s(\theta) = \int v(\theta) d\theta = R\theta + s_0$ avec $s_0 \in \mathbf{R}$; enfin la longueur d'arc entre les angles θ_1 et θ_2 est $L = s(\theta_2) - s(\theta_1) = R[\theta_2 - \theta_1]$. Le périmètre du cercle est, bien sûr, $\oint ds = s(2\pi) - s(0) = 2\pi R$.

3. SPIRALE D'ARCHIMÈDE. Cette courbe (cf. Fig. 1.10) a pour équation en coordonnées polaires planes

$$r(\theta) = \ell \theta \quad (1.2.28)$$

avec $\theta \in [0, +\infty[$; la constante $\ell > 0$ représente une longueur caractéristique.

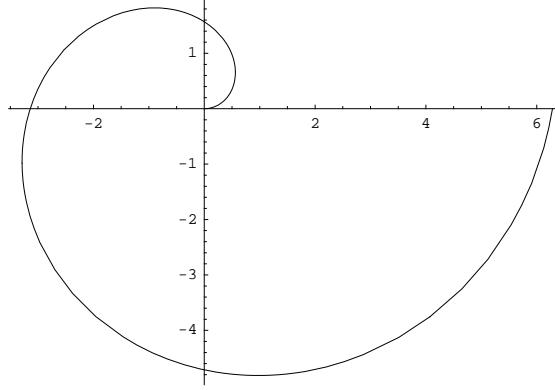


FIGURE 1.10 – Spirale d'Archimède

On a donc $\vec{r}(\theta) = \ell \theta \vec{e}_r$ (cf. (1.1.25)) et $\vec{v}(\theta) = \ell [\vec{e}_r + \theta \vec{e}_\theta]$ (cf. (1.1.28)); d'où $v(\theta) = \ell \sqrt{1 + \theta^2}$. Un calcul technique donne

$$s(\theta) = \int v(\theta) d\theta = \frac{\ell}{2} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right] \quad (1.2.29)$$

avec le choix $s(0) = 0$. La longueur d'arc entre $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 2\pi$ est donc $s(2\pi) \cong 21,2563 \ell$.

Courbure

Introduisons ici une grandeur géométrique importante, la courbure, associée à toute courbe de l'espace euclidien. Pour donner une idée intuitive de cette notion nouvelle, disons que la courbure mesure, en chaque point, la déviation de la courbe par rapport à la droite tangente ; elle met donc en jeu l'accélération de la courbe considérée. On montrera d'ailleurs qu'une courbe à courbure nulle est une droite.

Considérons une courbe $t \mapsto M(t)$ de E^3 (pour fixer les idées). Nous supposerons choisie une abscisse curviligne $t \mapsto s$; la tangente unitaire $\vec{T} = \overrightarrow{dM}/ds$ dépend donc de s (cf. (1.2.20)). On a alors

$$\frac{d}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

grâce à la Proposition 1.2.5 et à la symétrie du produit scalaire ; puisque $\|\vec{T}\|^2 = 1$, le membre de gauche ci-dessus est nul et on a trivialement

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0. \quad (1.2.30)$$

Le vecteur $d\vec{T}/ds$ est donc *orthogonal* à la vitesse (il est normal à la courbe) et dirigé dans le sens de la *concavité* (déterminé par l'accélération \vec{a}) de la courbe. En effet, la formule (1.2.19) s'écrit ici

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \dot{s}^2 + \vec{T} \ddot{s} \quad (1.2.31)$$

et donne, grâce à (1.2.30), l'inégalité $\vec{a} \cdot d\vec{T}/ds = \|d\vec{T}/ds\|^2 \dot{s}^2 \geq 0$; les vecteurs \vec{a} et $d\vec{T}/ds$ forment bien un angle aigu. L'assertion est prouvée.

Définition 1.2.11. *On appelle **courbure** de la courbe lisse $t \mapsto M(t)$ d'un espace euclidien E^3 la fonction positive*

$$\varrho := \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$$

(1.2.32)

et $R := 1/\varrho$ son **rayon de courbure**. La **normale unitaire** en $M(t)$ est le vecteur

$$\vec{N} := \frac{1}{\varrho} \frac{d\vec{T}}{ds}. \quad (1.2.33)$$

Les vecteurs (\vec{T}, \vec{N}) constituent une base euclidienne du **plan osculateur** (engendré par la vitesse et l'accélération²³) en chaque point de la courbe. Déterminons comment vitesse et accélération se décomposent de manière générale dans cette base locale (cf. Fig. 1.11).

Proposition 1.2.12. *La vitesse de toute courbe de E^3 admet l'expression générale :*

$$\vec{v} = v \vec{T} \quad (1.2.34)$$

et son accélération se décompose comme suit :

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{T} + \varrho v^2 \vec{N} \quad (1.2.35)$$

Démonstration. La formule (1.2.34) découle de (1.2.18) et de la définition (1.2.20) de la tangente unitaire. Pour prouver (1.2.35), utiliser la forme (1.2.31) de l'accélération et l'expression (1.2.23) de la vitesse scalaire ainsi que les définitions (1.2.20) de la tangente et (1.2.33) de la normale unitaires. \square

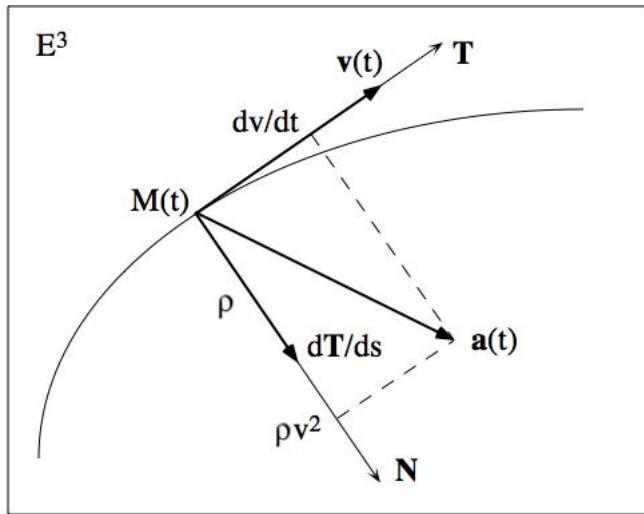


FIGURE 1.11 – Vitesse & accélération : décomposition locale

Proposition 1.2.13. *Toute courbe de courbure nulle est une droite.*

23. Le plan osculateur est, en fait, défini comme le plan engendré par les deux premières dérivées indépendantes de la courbe.

Démonstration. Si $\varrho = 0$, on a, grâce à (1.2.32), $d\vec{T}/ds = 0$: la tangente unitaire est constante, $\vec{T} = \vec{T}_0$. Mais (1.2.20) entraîne $d\vec{r}/ds = \vec{T}_0$, i.e., $\vec{r}(s) = \vec{T}_0 s + \vec{r}_0$ avec $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$: la courbe est une droite (le paramètre affine est l'abscisse curviligne). \square

Donnons une formule équivalente (et utile !) pour la courbure.

Proposition 1.2.14. *La courbure d'une courbe $t \mapsto M(t)$ de E^3 est donnée, au temps t , par*

$$\boxed{\varrho = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3}} \quad (1.2.36)$$

où \vec{v} et \vec{a} désignent respectivement la vitesse et l'accélération au même instant.

Démonstration. La vitesse est donnée par (1.2.34) et l'accélération par (1.2.35). Le produit vectoriel $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{T} \times \vec{N} \varrho v^3$ a donc pour norme $\|\vec{v} \times \vec{a}\| = \|\vec{T} \times \vec{N}\| \varrho v^3$. Mais $\vec{T} \times \vec{N}$ est unitaire puisque (\vec{T}, \vec{N}) est un système orthonormé (voir l'identité de Lagrange, Proposition (1.1.13)). D'où $\|\vec{v} \times \vec{a}\| = \varrho v^3$. \square

Exercice 1.2.15. *Prouver que l'expression (1.2.36) de la courbure est indépendante du paramétrage de la courbe.*

1.2.2 Exemple : courbure & torsion de l'hélice circulaire

Nous avons introduit dans les Exemples 1.2.2 l'hélice circulaire à pas constant ; rappelons son

Équation paramétrique

$$\mathbf{R} \ni t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ \hbar \omega t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

dans un référentiel euclidien de E^3 (ici $r \geq 0$, $\omega \neq 0$ et \hbar sont des constantes réelles).

Vitesse

De même, vitesse et accélération ont été calculées en (1.2.14). La vitesse

$$\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t) = \omega \begin{pmatrix} -r \sin(\omega t) \\ r \cos(\omega t) \\ \hbar \end{pmatrix}$$

a pour norme la vitesse scalaire (constante) :

$$v = |\omega| \sqrt{r^2 + \hbar^2}. \quad (1.2.37)$$

Accélération

Nous avons aussi trouvé

$$\vec{a}(t) := \ddot{\vec{v}}(t) = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{v}(t)$$

en posant $\vec{\omega} := \omega \vec{e}_z$. On remarque que la trajectoire considérée est solution de l'équation différentielle suivante²⁴

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.2.38)$$

régissant le mouvement d'une particule de masse m et de charge électrique q , plongée dans un champ magnétique \vec{B} constant, tel que $\vec{\omega} = -q\vec{B}/m$.

Abscisse curviligne

Un calcul immédiat utilisant (1.2.23) et (1.2.37) conduit à

$$s(t) = vt + s_0$$

avec $s_0 \in \mathbf{R}$.

Tangente unitaire

La définition (1.2.20) entraîne²⁵

$$\vec{T} := \frac{\vec{v}}{v} = \begin{pmatrix} -r \sin(\omega t) \\ r \cos(\omega t) \\ \hbar \end{pmatrix} \frac{\text{sign}(\omega)}{\sqrt{r^2 + \hbar^2}}.$$

24. C'est l'**équation de Lorentz** en présence d'un champ purement magnétique.

25. On désigne par $\text{sign}(\omega) := \omega/|\omega|$ le signe de $\omega \neq 0$.

Courbure

On trouve, grâce à (1.2.32), que la courbure

$$\varrho := \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{T}}{dt} \frac{1}{v} \right\| = \frac{r}{r^2 + \hbar^2}$$

est constante.

Vérifions ce résultat sur l'expression alternative (1.2.36) de la courbure. On a

$$\vec{v} \times \vec{a} = r\omega^3 \begin{pmatrix} \hbar \sin(\omega t) \\ -\hbar \cos(\omega t) \\ r \end{pmatrix}$$

donc $\|\vec{v} \times \vec{a}\| = r|\omega|^3 \sqrt{r^2 + \hbar^2}$; en utilisant l'expression (1.2.37) de la vitesse scalaire, il vient encore $\varrho = \|\vec{v} \times \vec{a}\|/v^3 = r/(r^2 + \hbar^2)$. CQFD.

Le rayon de courbure $R := 1/\varrho$ est la constante

$$R = r + \frac{\hbar^2}{r} \geq r.$$

A.N. Pour un brin d'ADN ($r \cong 10 \text{ \AA}$, $h \cong 34 \text{ \AA}$), on trouve

$$\varrho \cong 0,07735 \text{ \AA}^{-1} \quad (R \cong 12,928 \text{ \AA}).$$

Torsion

Il existe, pour les courbes de l'espace tri-dimensionnel E^3 , une autre caractéristique : la torsion. Intuitivement, la torsion mesure de combien la courbe considérée se "tord", c'est-à-dire s'écarte, en chacun de ses points, d'une courbe plane.²⁶

Définition 1.2.16. *On appelle **torsion** d'une courbe $t \mapsto M(t)$ de E^3 la fonction*

$$\tau := \frac{(\vec{v} \times \dot{\vec{v}}) \cdot \ddot{\vec{v}}}{\|\vec{v} \times \dot{\vec{v}}\|^2}$$

(1.2.39)

où \vec{v} désigne la vitesse, $\dot{\vec{v}}$ l'accélération et $\ddot{\vec{v}}$ la **suraccélération** de la courbe en chaque point.

Exercice 1.2.17. Vérifier que l'expression (1.2.39) de la torsion est indépendante du paramétrage.

26. Autrement dit, la torsion est une mesure de l'évolution du plan osculateur au cours du temps.

Pour l'hélice, le calcul précédent de $\vec{v} \times \vec{a}$ donne avec celui de

$$\dot{\vec{a}}(t) = r\omega^3 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

la torsion (constante) :

$$\tau = \frac{\hbar}{r^2 + \hbar^2}.$$

A.N. Pour un brin d'ADN, on trouve

$$\tau \cong 0,041856 \text{ \AA}^{-1}.$$

1.3 Cinématique dans l'espace-temps galiléen

Nous abordons maintenant la cinématique galiléenne, c'est-à-dire l'étude du mouvement des systèmes “classiques” dans leur habitat naturel, l'espace-temps à quatre dimensions imaginé par Galilée. L'espace-temps est cependant une notion ancienne ; il ne faut pas oublier qu'on peut la faire remonter à Aristote même si Einstein fut son plus récent et brillant promoteur.

1.3.1 L'espace-temps

L'**e**space-temps \mathcal{E} (ou **U**nivers) est l'ensemble de tous les événements possibles.²⁷

On caractérise un événement $M \in \mathcal{E}$ par un **lieu** $\vec{r} \in \mathbf{R}^3$ et une **date** $t \in \mathbf{R}$ dans un référentiel \mathcal{R} ; on écrit

$$M = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

en désignant par $\mathcal{R} : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}$ le référentiel considéré (bijection locale).

Si nous disposons de deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* pour repérer un même événement M , alors la transformation

$$(\mathcal{R}^*)^{-1} \circ \mathcal{R} : \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vec{r}^* \\ t^* \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

est appelée **changement de référentiel**.

27. On note quelquefois $\mathcal{E}^{3,1}$ pour préciser : 3 dimensions d'espace et 1 dimension de temps.

La structure de l'espace-temps galiléen, \mathcal{E} , est “presque” une structure produit de l'espace euclidien E^3 (l'espace) et de la droite euclidienne E^1 (le temps).²⁸

Pour Galilée, comme pour Newton, le **temps** est une notion **absolue** : tous les observateurs²⁹ sont d'accord sur l'intervalle de temps qui sépare deux événements.³⁰

Définition 1.3.1. *L'espace-temps galiléen, \mathcal{E} , est un espace affine A^4 tel que*

1. *Il existe une fonction **temps universel** $\mathcal{E} \rightarrow E^1$:*

$$M \mapsto t \quad (1.3.3)$$

*affine³¹ associant à tout événement son instant sur l'axe temporel **euclidien** E^1 .*

2. *L'espace à l'instant t :*

$$\mathcal{E}_t := \{M \in \mathcal{E} \mid t = \text{const.}\} \quad (1.3.4)$$

*est un espace **euclidien** E^3 .*

On remarque donc que la notion de *simultanéité* est *universelle* : en effet deux événements M et $M + \overrightarrow{dM}$ sont **simultanés** si $dt = 0$ (condition indépendante de tout référentiel grâce à la Définition 1.3.1).

Comme dans le cas euclidien, on a à sa disposition la notion de référentiel galiléen si importante en mécanique classique.

Définition 1.3.2. *On appelle **référentiel galiléen** (on dit aussi **inertielle**) tout référentiel affine $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_t)\}$ de l'espace-temps \mathcal{E} tel que*

1. $\{O, \vec{e}_t\}$ *est un référentiel euclidien de l'axe temporel E^1 ,*³²
2. $\{O, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)\}$ *est un référentiel euclidien de l'espace $\mathcal{E}_0 \cong E^3$.*

28. L'espace-temps aristotélicien est, quant à lui, le produit direct $\mathcal{E} = E^3 \times E^1$.

29. Ce sont des classes de référentiels à une rotation d'espace près.

30. La relativité restreinte (Einstein, 1905) fera perdre au temps son caractère absolu.

31. L'intervalle de temps $dt \in \mathbf{R}$ séparant deux événements M et $M + \overrightarrow{dM}$ est proportionnel à $\overrightarrow{dM} \in \mathbf{R}^4$; la correspondance “linéaire” $\overrightarrow{dM} \mapsto dt$ est donc une ...**horloge**.

32. le vecteur \vec{e}_t correspond à un intervalle de temps unité, $dt = 1$, et donne la direction du **futur**.

Tout événement se décompose comme suit dans un référentiel galiléen \mathcal{R} :

$$M = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \quad (1.3.5)$$

$$= O + x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z + t \vec{e}_t \quad (1.3.6)$$

où (cf. Fig. 1.12) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{-1}(M) \in \mathbf{R}^4 \quad (1.3.7)$$

désignent les coordonnées galiléennes de l'événement $M \in \mathcal{E}$ dans le référentiel \mathcal{R} .

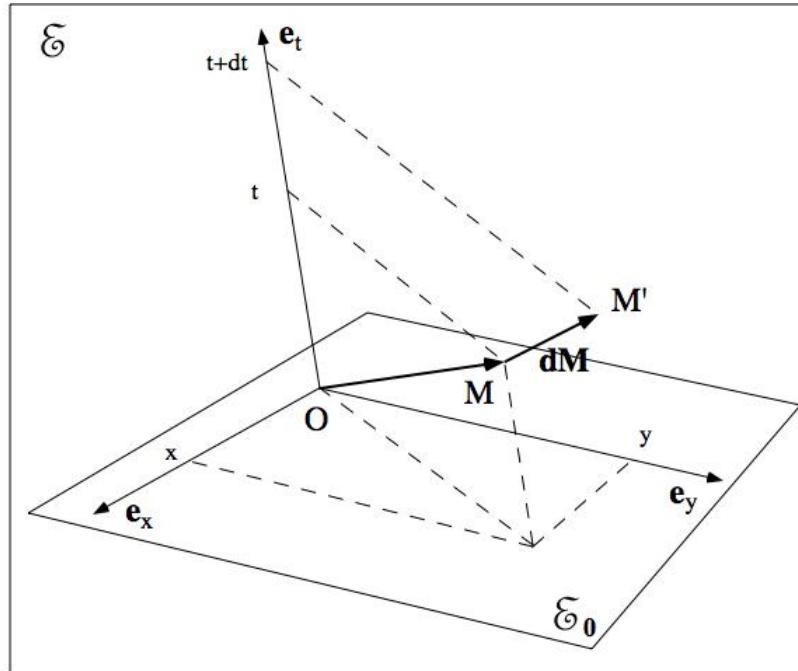


FIGURE 1.12 – Référentiel galiléen

1.3.2 Lignes d'univers

La trace d'une particule dans l'espace-temps, c'est-à-dire sa ligne de vie, est modélisée par une courbe de \mathcal{E} . Nous utiliserons les diagrammes d'espace-temps pour décrire les mouvements des systèmes de points matériels.

L'utilisation de la géométrie quadri-dimensionnelle de l'espace-temps permet, même en physique galiléenne, de bien visualiser certains phénomènes importants comme l'effet Doppler, les collisions et désintégrations de particules non relativistes, de même que les transformations de Galilée, etc.

Définition 1.3.3. *On appelle **ligne d'univers** toute courbe de l'espace-temps \mathcal{E} .*

Considérons pour le moment des courbes (lisses) du **genre temps**, c'est-à-dire des courbes $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}$ paramétrées par le temps ; dans un référentiel \mathcal{R} , elles prennent la forme

$$t \longmapsto M(t) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{r}(t) \\ t \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

Notons que des courbes du **genre espace** (ou lumière) sont des courbes contenues dans des espaces tri-dimensionnels \mathcal{E}_t à $t = \text{const.}$ Elles décrivent, par exemple, les trajectoires des rayons lumineux (optique géométrique) et se laissent paramétriser par l'abscisse curviline (pas par le temps !).

Définition 1.3.4. *On appelle **trajectoire** de la ligne d'univers (1.3.8) relativement³³ à un référentiel \mathcal{R} la courbe $t \mapsto \vec{r}(t)$ de E^3 .*

Attention, la trajectoire dépend du choix d'un référentiel, pas la notion de ligne d'univers ! Nous allons voir que vitesse et accélération dépendent également du choix d'un référentiel.

Donnons quelques exemples de ligne d'univers (en dimension 1+1 pour simplifier la présentation).

Dans la Fig. 1.13 (i) la ligne d'univers droite correspond à un **mouvement rectiligne uniforme** de vitesse v_0 et de position x_0 initiales. Dans la figure (ii), une ligne d'univers parabolique³⁴ représente un **mouvement uniformément accéléré** (d'accélération $a_0 = \text{const.}$) avec les mêmes conditions initiales.

La figure 1.14 (i) illustre, par ailleurs, une **désintégration** ; quant à la figure (ii), elle montre la trace spatio-temporelle d'une balle de ... **ping-pong**.

33. C'est là l'origine du terme "relativité".

34. C'est, bien entendu, la parabole de Galilée dans l'espace-temps.

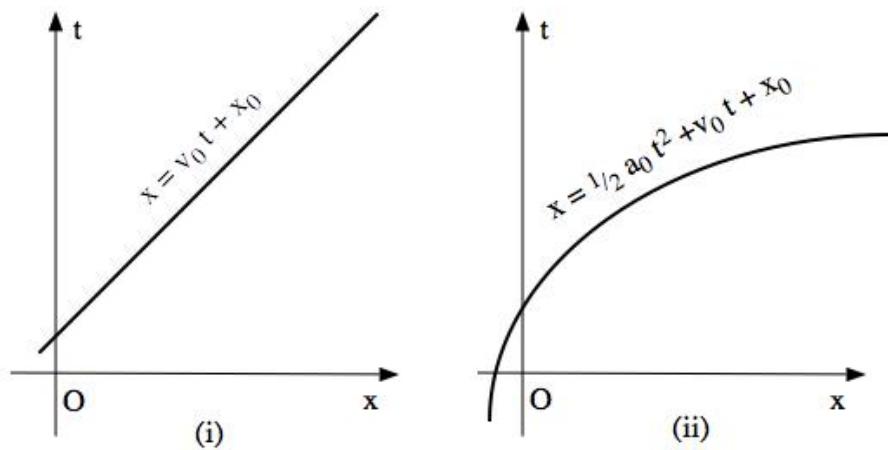


FIGURE 1.13 – Lignes d'univers

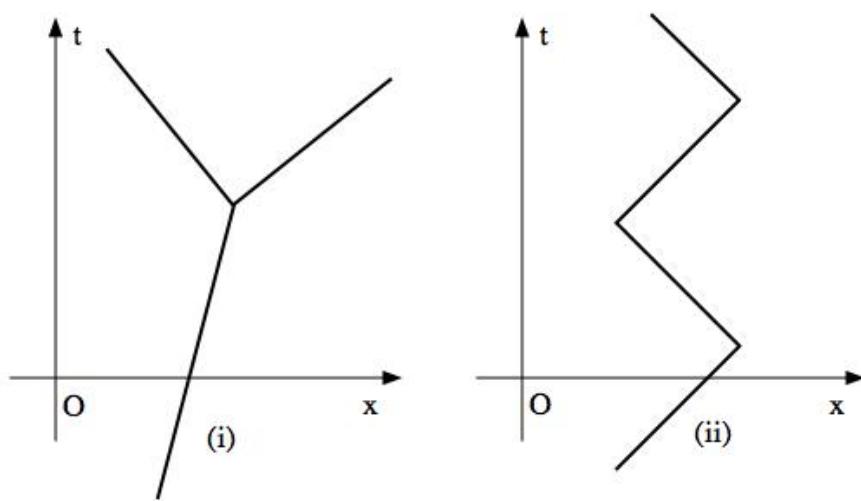


FIGURE 1.14 – Diagrammes d'espace-temps

Nous montrons aisément (grâce aux définitions (1.2.8) et (1.2.11) de la vitesse et de l'accélération) les deux propositions suivantes³⁵

Proposition 1.3.5. *La quadri-vitesse de la ligne d'univers (1.3.8) est le vecteur $\mathbf{V}(t) = dM/dt$; elle prend, dans le référentiel inertiel \mathcal{R} , la forme suivante³⁶*

$$\mathbf{V}(t) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{v}(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.3.9)$$

désigne la **vitesse** par rapport au référentiel considéré.

Remarque 1.3.6. *La quadri-vitesse $\mathbf{V}(t)$ (cf. Fig. 1.15) est un vecteur du genre temps-futur car sa composante temporelle est positive, $V_t = 1 > 0$.*

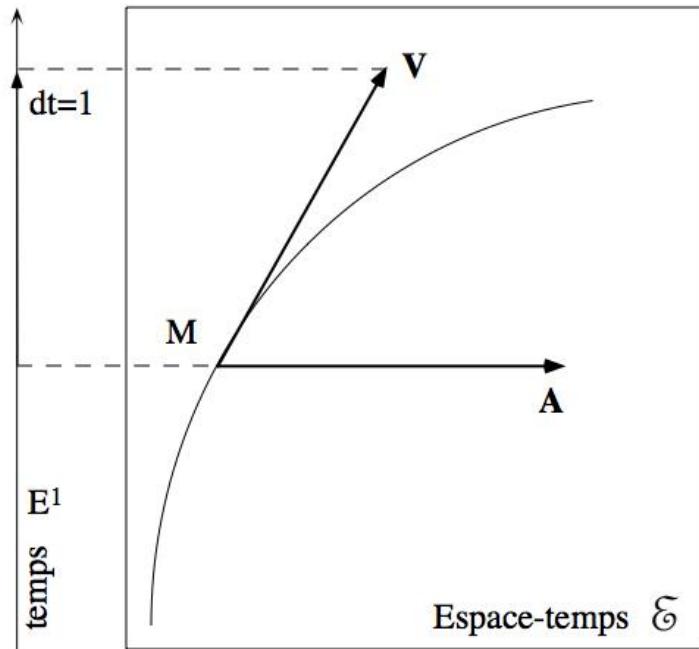


FIGURE 1.15 – Quadri-vitesse & quadri-accélération

35. Nous notons en gras les 4-vecteurs pour les différencier des 3-vecteurs et éviter ainsi toute confusion.

36. *N.B.* Dans les formules (1.3.9) et (1.3.10) l'origine O du référentiel \mathcal{R} n'intervient pas. Abus de notation !

Proposition 1.3.7. La **quadri-accélération** de la ligne d'univers (1.3.8) est le vecteur $\mathbf{A}(t) = d\mathbf{V}/dt$; elle prend, dans le référentiel \mathcal{R} , la forme suivante

$$\mathbf{A}(t) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{a}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.3.10)$$

désigne l'**accélération** par rapport au référentiel considéré.

Remarque 1.3.8. La quadri-accélération $\mathbf{A}(t)$ (cf. Fig. 1.15) est du genre espace puisque $A_t = 0$.

1.3.3 Groupe de Galilée

Avant de formuler le principe de l'inertie, illustrons par un exemple fondamental la notion de changement de référentiel galiléen.

Transformation de Galilée pure

Considérons un funiculaire de vitesse *constante* \vec{v}_0 par rapport à la gare, et donnons nous également un référentiel galiléen \mathcal{R} lié à cette dernière. Construisons maintenant un référentiel \mathcal{R}^* naturellement attaché au funiculaire.

Ce dernier quitte la gare à l'instant $t = 0$. A un instant $t > 0$, soit \vec{r} la position d'un point M par rapport à la gare et \vec{r}^* sa position par rapport au funiculaire. La relation de Chasles (cf. Fig. 1.16) $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*M} = \vec{v}_0 t + \vec{r}^*$ donne très simplement le changement de référentiel (1.3.2) :

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{r}^* = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t^* = t \end{pmatrix}$$

(1.3.11)

appelé **transformation de galilée pure**³⁷ de vitesse \vec{v}_0 .

Cette transformation fait sauter instantanément de la gare dans le funiculaire. Le changement de référentiel inverse (funiculaire-gare) est, bien entendu,

$$\begin{pmatrix} \vec{r}^* \\ t^* \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{r} = \vec{r}^* + \vec{v}_0 t^* \\ t = t^* \end{pmatrix}. \quad (1.3.12)$$

37. On dit aussi **boost** en franglais.

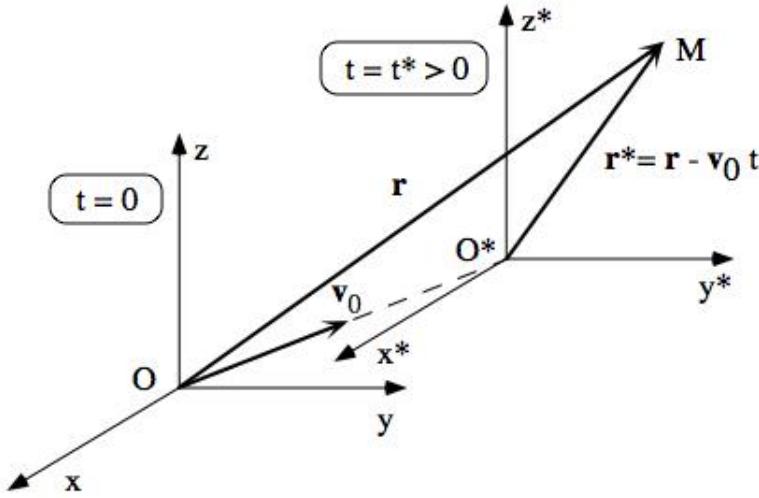


FIGURE 1.16 – Changement de référentiel gare-funiculaire

Loi de transformation de la vitesse

Soit $t \mapsto \vec{r}(t)$ la trajectoire et $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ la vitesse d'un point matériel dans le référentiel \mathcal{R} . Sa vitesse par rapport à \mathcal{R}^* sera

$$\vec{v}^* = \frac{d\vec{r}^*}{dt^*} = \frac{d}{dt} [\vec{r}(t) - \vec{v}_0 t] = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}_0$$

grâce à (1.3.11) ; on aura donc

$$\boxed{\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{v}_0} \quad (1.3.13)$$

ou encore³⁸ $\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_0$ (formule galiléenne d'**addition des vitesses**).

Loi de transformation de l'accélération

Quant à l'accélération, on aura de même, grâce à (1.3.13) :

$$\vec{a}^* = \frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = \frac{d}{dt} [\vec{v}(t) - \vec{v}_0] = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\vec{a}^* = \vec{a}} \quad (1.3.14)$$

confirmant que l'**accélération est invariante** sous tout boost galiléen.

³⁸ Dans la terminologie consacrée, \vec{v}^* est la **vitesse relative** et \vec{v}_0 la **vitesse d'entraînement**.

Proposition 1.3.9. *Si l'accélération d'un point matériel est nulle dans un référentiel, elle reste nulle dans tout référentiel déduit du précédent par une transformation de Galilée pure.*

Représentation géométrique

Donnons maintenant la représentation géométrique du changement de référentiel galiléen (1.3.11) que nous illustrerons ici par un diagramme d'espace-temps à 1 + 1 dimensions en décidant que la vitesse d'entraînement est dirigée selon l'axe des x .

Posons donc $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$; le **boost** (1.3.11) prend alors la forme

$$\boxed{\begin{cases} x^* = x - v_0 t \\ y^* = y \\ z^* = z \\ t^* = t \end{cases}} \quad (1.3.15)$$

et, grâce à (1.3.12), on a $x = x^* + v_0 t^*$, $y = y^*$, $z = z^*$ et $t = t^*$.

Mais un événement se décompose, cf. (1.3.6), dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* selon

$$\begin{aligned} M &= O + x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z + t \mathbf{e}_t \\ &= O^* + x^* \mathbf{e}_x^* + y^* \mathbf{e}_y^* + z^* \mathbf{e}_z^* + t^* \mathbf{e}_t^*. \end{aligned}$$

Après identification des différents termes de cette décomposition, on trouve finalement

$$O^* = O, \quad \mathbf{e}_x^* = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_y^* = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_z^* = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_t^* = \mathbf{e}_t + v_0 \mathbf{e}_x. \quad (1.3.16)$$

D'où le diagramme de la Fig. 1.17 géométrisant un boost galiléen.

Remarque 1.3.10. *Comparer les diagrammes représentant les rotations, Fig. 1.1, du plan euclidien E^2 et les boosts, Fig. 1.17 de l'espace-temps galiléen $\mathcal{E}^{1,1}$.*

Transformation de Galilée générale

La transformation (1.3.11) préserve bien la structure galiléenne de l'espace-temps car c'est une transformation *linéaire*³⁹ telle que

- l'intervalle de temps est préservé puisque $dt^* = dt$,

39. Les "nouvelles" coordonnées (x^*, y^*, z^*, t^*) sont des fonctions homogènes du premier degré des "anciennes" coordonnées (x, y, z, t) .

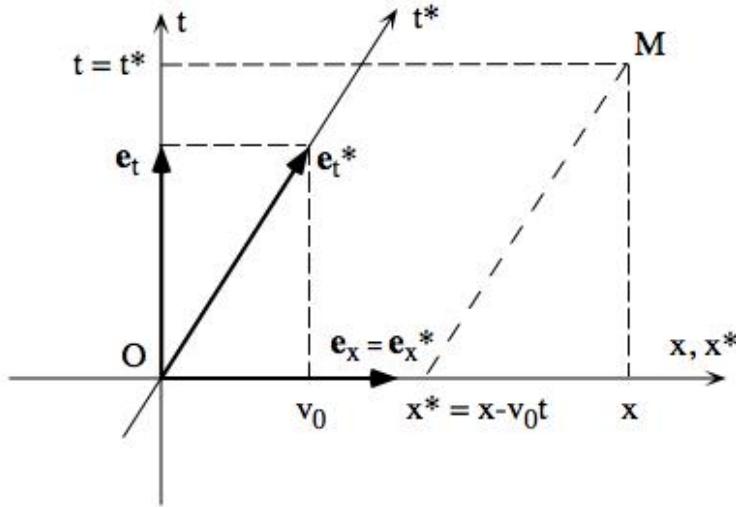


FIGURE 1.17 – Boost galiléen

- sur chaque espace instantané \mathcal{E}_t , c'est-à-dire si $dt (= dt^*) = 0$ on a clairement $d\vec{r}^* = d\vec{r}$ et donc $\|d\vec{r}^*\|^2 = \|d\vec{r}\|^2$; le produit scalaire euclidien de chaque \mathcal{E}_t est préservé.

Voici le résultat général que nous donnons sans preuve.

Théorème 1.3.11. *Toute transformation préservant la structure de l'espace-temps galiléen (Définition 1.3.1) et son orientation est de la forme*

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{r}^* = A\vec{r} + \vec{b}t + \vec{c} \\ t^* = t + e \end{pmatrix}} \quad (1.3.17)$$

où A est une **rotation spatiale**, \vec{b} un **boost**, \vec{c} une **translation spatiale**⁴⁰ et enfin e une **translation temporelle**.⁴¹ Ces transformations forment un groupe⁴² appelé **groupe de Galilée**.

Remarque 1.3.12. On retrouve bien le changement de référentiel (1.3.11) comme cas particulier de (1.3.17); il suffit de faire $A = 1$, $\vec{b} = -\vec{v}_0$, $\vec{c} = \vec{0}$ et $e = 0$.

40. Changement d'origine de l'espace.

41. Changement d'origine du temps.

42. La composée de deux telles transformations est une transformation du même type; chaque transformation possède aussi un inverse du même type.

1.3.4 Exemples de changements de référentiels

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le

Principe de l'inertie

Principe 1.3.13 (Galileo Galilei). *La ligne d'univers d'une particule **libre** (c'est-à-dire isolée du reste de l'univers) est une **droite** de l'espace-temps galiléen \mathcal{E} .*

Une telle ligne d'univers à quadri-accélération nulle, $\mathbf{A} = 0$, est donc de la forme

$$s \mapsto M(s) = \mathbf{V}s + M_0$$

avec $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^4$ un vecteur constant et $M_0 \in \mathcal{E}$.

Montrons que dans tout référentiel galiléen \mathcal{R} la trajectoire de cette particule est une droite. Nous avons grâce à (1.3.9)⁴³

$$M(s) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{v}s + \vec{r}_0 \\ s + t_0 \end{pmatrix}$$

et la trajectoire de notre particule est donnée par l'expression

$$\vec{r}(t) = \vec{v}[t - t_0] + \vec{r}_0$$

représentant bien un mouvement rectiligne uniforme de vitesse (constante) \vec{v} et de position initiale $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$. On a d'autre part vu (Proposition 1.3.9) que tout changement de référentiel galiléen transforme un mouvement à accélération nulle, $\vec{a} = 0$, en un autre mouvement à accélération nulle, $\vec{a}^* = \vec{0}$.

Nous venons ainsi de montrer que notre formulation du Principe de l'inertie revient à demander qu'il existe une classe privilégiée de référentiels pour laquelle tout mouvement libre (c'est-à-dire rectiligne uniforme) dans un référentiel reste un mouvement libre dans tel autre référentiel : ces référentiels sont en fait déduits les uns des autres par une transformation de Galilée (1.3.17).

Changements de référentiels non inertiels

Il existe, bien entendu, des changements de référentiels **non inertiels** qui possèdent en physique galiléenne la forme générale suivante

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vec{r}^* = A(t)\vec{r} + \vec{R}(t) \\ t^* = t + e \end{pmatrix} \quad (1.3.18)$$

43. Nous ignorons pour simplifier le cas des lignes d'univers de genre lumière.

où $A(t)$ désigne une rotation spatiale et $\vec{R}(t)$ une translation spatiale dépendant arbitrairement du temps ; la constante e est une translation temporelle.

1. Un exemple pour un tel changement de référentiel est donné par le passage

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{r}^* = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \\ t^* = t \end{pmatrix} \quad (1.3.19)$$

d'un référentiel inertiel à un référentiel d'accélération constante \vec{a}_0 . Si $\vec{a}_0 = \vec{g}$ représente l'accélération de la pesanteur (au voisinage du sol), le changement de référentiel (1.3.19) illustre le saut dans un ascenseur en chute libre!⁴⁴ En effet, dans le référentiel de l'ascenseur l'accélération est $\vec{a}^* = \vec{a} - \vec{g}$; quant à l'accélération de la pesanteur dans cet ascenseur tout à fait spécial, elle vaut donc $\dots \vec{g}^* = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$: on est en **apesanteur** dans un tel référentiel.

2. Un autre exemple est fourni par le passage

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^* = +\cos \theta(t) x + \sin \theta(t) y \\ y^* = -\sin \theta(t) x + \cos \theta(t) y \\ z^* = z \\ t^* = t \end{pmatrix} \quad (1.3.20)$$

à un référentiel en mouvement de rotation autour de l'axe des z , de vitesse angulaire $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$; cf. l'expression (1.1.6). On modélise par (1.3.20) le saut sur un manège (le cas “courant” $\omega = \text{const.}$ n'est qu'un cas simple et particulier).

Exercice 1.3.14. Calculer la vitesse \vec{v}^* et l'accélération \vec{a}^* par rapport au manège en fonction de la vitesse \vec{v} , de l'accélération \vec{a} relativement au sol ainsi que de l'angle de rotation $\theta(t)$ et de ses dérivées temporelles.

Exemple : effet Doppler

Une sirène (Source sonore) possède une vitesse v_S constante par rapport à l'air ; elle émet à la fréquence ν_S : le laps de temps qui sépare l'émission de deux phonons consécutifs est la période $T_S = 1/\nu_s$ de la Source. On appelle c la vitesse du son par rapport à l'air. Vous (le Récepteur) vous déplacez à vitesse constante v_R par rapport à l'air. Le diagramme d'espace-temps correspondant est présenté par la Fig. 1.18.

44. C'est le *Gedanken Experiment* de l'ascenseur d'Einstein.

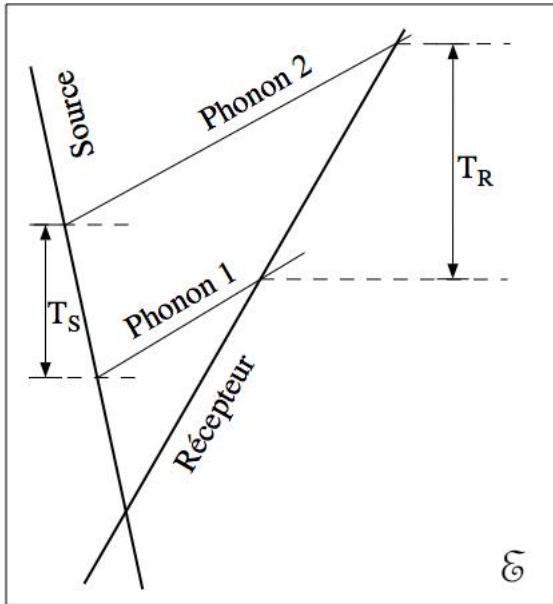


FIGURE 1.18 – Effet Doppler

La fréquence de réception ν_R est, phénomène bien connu, différente de ν_S ; la hauteur du son change pour un Récepteur en mouvement relatif par rapport à la Source : c'est l'**effet Doppler** pour le son.

Exercice 1.3.15. *Prouver, en s'aidant du diagramme donné par la Fig. 1.18 que le rapport des fréquences est donné par*

$$\frac{\nu_R}{\nu_S} = \frac{1 - \frac{v_R}{c}}{1 - \frac{v_S}{c}}. \quad (1.3.21)$$

Chapitre 2

Équations différentielles par l'exemple

On illustre, dans ce chapitre émaillé d'exemples, la méthode générale d'intégration des **équations différentielles affines du premier et second ordre à coefficients constants**. On traite aussi des équations avec second membre (constant pour l'instant). On en profite pour introduire certaines notions fondamentales en physique, mais pas seulement ... On insiste enfin sur le rôle des **conditions initiales** qui paramètrent les mouvements — solutions des équations différentielles du mouvement — et ont donc un statut physique fondamental.

2.1 Équations affines du premier ordre

On recherche la solution générale $t \mapsto x(t)$ de l'équation différentielle

$$a\dot{x} + bx = c \tag{2.1.1}$$

où a, b, c sont des constantes réelles et $a \neq 0$.

Remarque 2.1.1. *Dans le cas $b = 0$, la solution générale de (2.1.1) est immédiate :*

$$x(t) = \frac{c}{a}t + A, \quad (A = \text{const.})$$

2.1.1 Solution générale de l'équation homogène

Donnons d'abord la solution générale de l'équation différentielle sans second membre ($c = 0$) ou **équation homogène** :

$$a\dot{x} + bx = 0. \tag{2.1.2}$$

On a clairement $\dot{x}/x = -b/a$, ce que l'on peut réécrire formellement comme $d(\log x)/dt = -b/a$. On a ainsi $\log x = -(b/a)t + C$ avec $C = \text{const.}$ et, en posant $A = e^C$, on trouve

$$x(t) = A e^{-bt/a}, \quad (A = \text{const.}) \quad (2.1.3)$$

Remarque 2.1.2. *L'exponentielle $t \mapsto e^{rt}$ est bien solution de l'équation différentielle (2.1.2) si r est racine du polynôme caractéristique $P(r) = ar + b$. La solution générale $x(t) = A e^{rt}$ est alors donnée par cette exponentielle à une constante multiplicative A près.*

On remarque que la solution est complètement déterminée en fixant une condition initiale, par exemple en décidant que $x(0) = x_0$ au temps $t = 0$; la constante d'intégration est alors déterminée et on a

$$x(t) = x_0 e^{-bt/a} \quad (2.1.4)$$

Il s'agit là d'un résultat tout à fait général : *la loi horaire (ou loi du mouvement) régie par une équation différentielle ordinaire d'ordre n est entièrement déterminée par la donnée de n conditions initiales à un instant “zéro”.*

Exercice 2.1.3. *Donner la solution de (2.1.2) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ au temps $t = t_0$.*

Démonstration. Effectuer le changement de variable $t \mapsto t - t_0$ pour arriver au résultat

$$x(t) = x_0 e^{-b[t-t_0]/a}$$

qui se généralise aisément à toutes les équations différentielles ordinaires. \square

2.1.2 Solution générale de l'équation avec second membre

Traitons maintenant le cas général de l'équation avec second membre (2.1.1).

Nous pouvons supposer $b \neq 0$ grâce à la Remarque 2.1.1. Remarquons tout d'abord que $x = c/b$ est une solution *évidente* de (2.1.1). On pose donc $x = X + c/b$ pour résoudre l'équation en X qui prend la forme $a\dot{x} + bx = a\dot{X} + b(X + c/b) = c$ et se simplifie en l'équation homogène $a\dot{X} + bX = 0$ déjà étudiée !

*La solution générale d'une équation différentielle **affine** (c'est-à-dire linéaire avec second membre) est la somme d'une de ses solution particulières et de la solution générale de l'équation linéaire (sans second membre) associée, à savoir*

$$x(t) = \frac{c}{b} + A e^{-bt/a} \quad (A = \text{const.}) \quad (2.1.5)$$

Encore une fois, si on fixe une condition initiale $x(0) = x_0$, la solution de l'équation différentielle (2.1.1) est complètement déterminée :

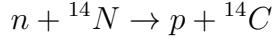
$$x(t) = x_0 e^{-bt/a} + \frac{c}{b} (1 - e^{-bt/a}) \quad (2.1.6)$$

Remarque 2.1.4. *Le cas où les constantes a, b, c sont **complexes**, et la solution recherchée $t \mapsto x(t)$ à **valeurs complexes**, conduit à la même formule (2.1.6) où x_0 est maintenant une constante complexe. Le paramètre t sera, par contre, toujours considéré comme paramètre réel : le temps, par exemple.*

2.1.3 Exemples

Radioactivité, datation au carbone 14

Le noyau de carbone 14 (comprenant 6 protons et 8 neutrons) est formé dans la haute atmosphère¹ selon des réactions du type



et entre donc dans le cycle du carbone ; il est présent dans tout organisme vivant au même titre que le ${}^{12}C$. La concentration relative est constante et faible chez tous les êtres vivants : $[{}^{14}C] / [{}^{12}C] = 1,3 \cdot 10^{-12}$. Voir [6].

Contrairement au carbone 12, le ${}^{14}C$ est (β^-)-radioactif : ${}^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^- + \bar{\nu}_e$ (on désigne par $\bar{\nu}_e$ l'anti-neutrino électronique). Ce phénomène permet la datation précise d'échantillons organiques remontant à la préhistoire (-40000 ans). En effet, le carbone 14 n'étant plus régénéré selon le cycle habituel après la mort d'un organisme, la concentration relative $[{}^{14}C] / [{}^{12}C]$ diminue au cours du temps, indiquant l'âge de l'échantillon (bois, restes calcinés).

1. Ces réactions sont déclenchées par les rayons cosmiques.

Si $N(t)$ est la densité de noyaux radioactifs à l'instant t , au temps $t + \Delta t$ on n'aura plus que $N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta N(t)$ noyaux où $\Delta N \propto N$ et $\Delta N \propto \Delta t$. Le nombre de noyaux disparus ($\Delta N < 0$) est clairement proportionnel à la densité de noyaux et au temps écoulé : on peut donc écrire $\Delta N = -N \Delta t / \tau$ où τ est une constante homogène à un temps. Donc $[N(t + \Delta t) - N(t)]/\Delta t = -N(t)/\tau$ et, en prenant la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient enfin la *loi de désintégration*

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau} \quad (\tau = \text{const.} > 0)$$

dont . . . l'intégration est immédiate (cf. (2.1.4)) :

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

si $N(0) = N_0$.

On appelle, en physique nucléaire, “période” ou “demi-vie” le temps T au bout duquel la concentration en noyaux radioactifs a diminué de moitié : $N(T) = \frac{1}{2}N_0$. On a trivialement $T = \tau \log 2$.

Exercice 2.1.5. Sachant que $T(^{14}\text{C}) = 5730$ ans, trouver l’âge d’un échantillon de bois présentant une concentration relative $[^{14}\text{C}] / [^{12}\text{C}] = 8 \cdot 10^{-13}$.

Démonstration. On a $\tau = 5730 / \log 2 \cong 8267$ ans. L’âge de l’échantillon est donné par $t = -\tau \log(N/N_0)$; si $N/N_0 = 8 \cdot 10^{-13} / 1,3 \cdot 10^{-12} \cong 0,615$ on obtient $t \cong 4014$ ans (avec une précision relative égale à celle avec laquelle est mesurée la concentration de carbone 14). \square

Expérience de Millikan (1868–1953)

On montre qu’une gouttelette (d’huile dans cette expérience) électriquement chargée, plongée dans un champ électrique constant, admet une vitesse limite grâce aux effets de viscosité dûs aux interactions avec le milieu ambiant, par exemple l’air.

Les forces agissant sur notre gouttelette de masse m , de charge électrique q et de vitesse \vec{v} sont :

1. la force de Coulomb constante : $\vec{F} = q\vec{E}$
2. la force de frottement : $\vec{f} = -\eta\vec{v}$

où $\eta = \text{const.} > 0$ est le coefficient de viscosité (connu) caractéristique du milieu et de la section de la gouttelette.

Les équations du mouvement (Newton II) s'écrivent

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f}.$$

Intéressons nous, pour simplifier, aux seuls mouvements dont la vitesse est dirigée dans la direction du champ électrique constant (par exemple orthogonalement aux plaques d'un condensateur).

Nous sommes donc ramenés à intégrer l'équation différentielle avec second membre

$$m\dot{v} + \eta v = qE.$$

On trouve, grâce à (2.1.6), la solution

$$v(t) = v_0 e^{-\eta t/m} + \frac{qE}{\eta} (1 - e^{-\eta t/m}) \quad (2.1.7)$$

avec vitesse initiale $v(0) = v_0$.

Remarquons que la **vitesse limite**

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{qE}{\eta} \quad (2.1.8)$$

est bien indépendante de la vitesse initiale v_0 . La mesure expérimentale de v_∞ a conduit Millikan à la détermination de la charge électrique q des gouttelettes et à la première preuve expérimentale de la **quantification de la charge électrique**²

$$q \in \mathbf{Z}e \quad (2.1.9)$$

où e désigne la charge électronique dont la valeur a été ainsi déterminée par Millikan.³

L'oscillateur harmonique

Intéressons nous maintenant aux mouvements d'un point matériel de masse m soumis à la force de rappel d'un ressort parfait, de longueur au repos nulle, et de raideur $k = \text{const.} > 0$. Intégrons donc l'équation différentielle de Newton-Hooke⁴

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.1.10)$$

où x représente l'abscisse du point matériel.

2. Il n'existe toujours pas d'argument théorique convaincant pour expliquer la règle (2.1.9).

3. Prix Nobel, 1923

4. La force de Hooke d'un ressort de longueur à vide ℓ est donnée par $F(x) = -k(x - \ell)$ dans le cas d'un seul degré de liberté.

La remarque cruciale est que l'équation différentielle du second ordre (2.1.10) se ramène à une équation différentielle linéaire du **premier ordre** pour la fonction **complexe**

$$z := x + i \frac{v}{\omega} \quad (2.1.11)$$

où $v = \dot{x}$ désigne la vitesse et $\omega := \sqrt{k/m}$ la *pulsation* du système.

On ramène facilement l'équation (2.1.10) à l'équation différentielle

$$\dot{z} + i\omega z = 0 \quad (2.1.12)$$

dont la solution générale est (cf. (2.1.4)) :

$$z(t) = z_0 e^{-i\omega t} \quad (2.1.13)$$

si $z(0) = z_0$, ou encore

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ v(t) &= v_0 \cos \omega t - \omega x_0 \sin \omega t. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Complexifier pour ... simplifier.

Remarque 2.1.6. On obtient une expression équivalente pour le mouvement en prenant $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ pour condition initiale ; on trouve alors

$$\begin{cases} x(t) &= r_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \\ v(t) &= -\omega r_0 \sin(\omega t - \varphi_0). \end{cases} \quad (2.1.15)$$

On appelle $r_0 \geq 0$ l'**amplitude** et φ_0 la **phase** initiale du mouvement.

2.2 Equations affines du second ordre

On recherche maintenant la solution générale $t \mapsto x(t)$ de l'équation différentielle

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$$

(2.2.1)

où a, b, c, d sont des constantes (éventuellement complexes) et $a \neq 0$.

Remarque 2.2.1. Si $c = 0$, on est ramené à l'équation (2.1.1) pour l'inconnue \dot{x} . La solution générale $\dot{x}(t)$ est donnée par (2.1.6) ; on trouve enfin $x(t) = \int \dot{x}(t) dt$ à une constante additive près.

2.2.1 Résolution générale de l'équation homogène

On étudie pour commencer le cas de l'équation homogène ($d = 0$, mais $a \neq 0$) :

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (2.2.2)$$

qui devient une *équation linéaire* ; en effet si x_1 et x_2 sont solutions de (2.2.2), il en est de même de $x_1 + x_2$ et de λx_1 quel que soit le nombre (complexe) λ . La preuve est immédiate !

On montre qu'il suffit donc de connaître deux solutions "indépendantes" particulières x_1 et x_2 pour avoir la solution générale

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t), \quad (A_1, A_2 = \text{const.})$$

Comme précédemment recherchons donc des solutions particulières de (2.2.2) de la forme $x(t) = e^{rt}$ avec $r \in \mathbf{C}$. On trouve immédiatement que r est nécessairement **racine** du polynôme caractéristique

$$P(r) = ar^2 + br + c. \quad (2.2.3)$$

La discussion implique maintenant la valeur du discriminant $\Delta := b^2 - 4ac$. On a les deux cas suivants :

$\Delta \neq 0$. Soient $r_{\pm} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ les deux racines distinctes du polynôme caractéristique (2.2.3).

1. Si $a, b, c \in \mathbf{C}$, la fonction à **valeurs complexes**

$$x(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}, \quad (A, B \in \mathbf{C})$$

(2.2.4)

est solution de l'équation homogène du second ordre (2.2.2). C'est en fait la **solution générale**⁵ dans ce cas.

5. Si $P(r) = 0$, par exemple $r = r_+$, recherchons la solution générale sous la forme $x(t) = A(t) e^{r_+ t}$, ce qui conduit à $a\ddot{A}(t) + (b + 2ar)\dot{A}(t) = 0$ et, puisque $b + 2ar = \sqrt{\Delta}$, à

$$a\ddot{A}(t) + \sqrt{\Delta}\dot{A}(t) = 0. \quad (2.2.5)$$

On obtient $\dot{A}(t) = \dot{A}_0 e^{-t\sqrt{\Delta}/a}$, avec $\dot{A}_0 \in \mathbf{C}$, grâce à (2.1.3) ; d'où $A(t) = B e^{-t\sqrt{\Delta}/a} + A$ avec $A, B \in \mathbf{C}$. Il vient enfin $x(t) = A(t) e^{r_+ t} = A e^{r_+ t} + B e^{r_+ t}$, c'est-à-dire l'expression (2.2.4). CQFD.

2. Si $a, b, c \in \mathbf{R}$, la fonction à **valeurs réelles**⁶

$$x(t) = \operatorname{Re} (A e^{r+t} + B e^{r-t}), \quad (A, B \in \mathbf{C}) \quad (2.2.6)$$

fournit la **solution générale** recherchée.

$\Delta = 0$. Dans ce cas, deux solution indépendantes sont e^{rt} et $t e^{rt}$ avec $r = -b/(2a)$. En effet, si l'on recherche la solution sous la forme $x(t) = A(t) e^{rt}$, il vient immédiatement $\ddot{A}(t) = 0$ (cf. (2.2.5)) et donc $A(t) = At + B$.

1. Si $a, b, c \in \mathbf{C}$, la fonction à **valeurs complexes**

$$x(t) = (At + B) e^{rt}, \quad (A, B \in \mathbf{C}) \quad (2.2.7)$$

constitue la **solution générale** dans ce cas dégénéré.

2. Si $a, b, c \in \mathbf{R}$, la fonction à **valeurs réelles**

$$x(t) = (At + B) e^{rt}, \quad (A, B \in \mathbf{R}) \quad (2.2.8)$$

représente, dans ce cas, la **solution générale**.

Encore une fois, les constantes d'intégration A & B sont entièrement déterminées par les **conditions initiales** $x_0 = x(0)$ & $v_0 = \dot{x}(0)$. Le **mouvement** $t \mapsto (x(t), v(t))$ est alors déterminé par la donnée d'une position x_0 et d'une vitesse v_0 initiales (base mathématique du déterminisme mécaniste).

2.2.2 Résolution générale de l'équation avec second membre

La solution générale de l'équation différentielle affine (2.2.1) avec $c \neq 0$ est donc la somme d'une de ses solutions particulières et de la solution générale (trouvée au chapitre 2.2.1) de l'équation linéaire associée. Elle est donnée, dans le cas complexe, par

$$x(t) = \frac{d}{c} + \begin{cases} A e^{r_+ t} + B e^{r_- t} & (\Delta \neq 0), \\ (At + B) e^{rt} & (\Delta = 0), \end{cases} \quad (A, B \in \mathbf{C}) \quad (2.2.9)$$

où r_{\pm} sont les deux racines du polynôme caractéristique (2.2.3) dans le cas générique ($\Delta \neq 0$), et r sa racine double dans le cas dégénéré ($\Delta = 0$).

6. Il s'agit simplement de la partie réelle du membre de droite de (2.2.4).

Remarque 2.2.2. La partie réelle de la solution complexe (2.2.9) donnera, bien sûr, la solution $x(t)$ recherchée dans le cas où cette dernière est à valeurs réelles et les coefficients a, b, c, d réels.

2.2.3 Exemples

L'oscillateur harmonique amorti

On étudie le mouvement d'un objet de masse m suspendu à un ressort de raideur k évoluant dans un milieu visqueux (problème à un degré de liberté).

L'équation du mouvement s'écrit (avec les notations précédemment utilisées dans les exercices "Millikan" et "Oscillateur harmonique") : $m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - kx$, ou encore

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2x = 0$$

avec les constantes positives $\alpha := \eta/(2m)$ et $\omega := \sqrt{k/m}$.

On a ici $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega^2)$. Trois cas sont à discuter.

1. $\boxed{\Delta < 0 \iff \alpha < \omega}$ Dans ce cas, le coefficient de frottement α est *faible* et on a $r_{\pm} = -\alpha \pm i\omega_0$ avec

$$\omega_0 := \sqrt{|\omega^2 - \alpha^2|}. \quad (2.2.10)$$

On a $x(t) = e^{-\alpha t} (A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t})$ ou, puisque la position $x(t)$ est à valeurs réelles, $x(t) = e^{-\alpha t} (C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t)$ avec $C, D \in \mathbf{R}$ (cf. (2.2.6) ci-dessus). En prenant pour conditions initiales $x_0 = x(0)$ et $v_0 = \dot{x}(0)$, on trouve un **mouvement pseudo-périodique amorti** (cf. Fig. 2.1) :

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t} \left[x_0 \cos \omega_0 t + (v_0 + \alpha x_0) \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right]} \quad (2.2.11)$$

On a clairement la position asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.2.12)$$

2. $\boxed{\Delta > 0 \iff \alpha > \omega}$ Dans ce cas, le coefficient de frottement α est *fort* et les deux racines sont $r_{\pm} = -\alpha \pm \omega_0$ où ω_0 a été défini en (2.2.10). On a maintenant un **régime amorti** dans le temps $x(t) = e^{-\alpha t} (A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t})$ avec $A, B \in \mathbf{R}$.

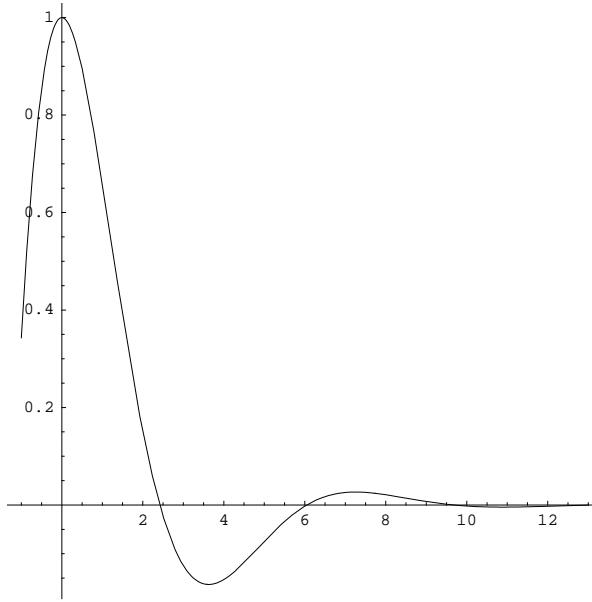


FIGURE 2.1 – Oscillations amorties

Puisque $\alpha > \omega > \omega_0$, on vérifie que la limite (2.2.12) donne encore la position asymptotique dans ce cas.

On a de même, avec les conditions initiales précédentes, la loi horaire⁷

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left[x_0 \operatorname{ch} \omega_0 t + (v_0 + \alpha x_0) \frac{\operatorname{sh} \omega_0 t}{\omega_0} \right] \quad (2.2.13)$$

illustrée par la Fig. 2.2.

3. $\boxed{\Delta = 0 \iff \alpha = \omega}$ C'est le **régime critique** conduisant à un amortissement $x(t) = e^{-\alpha t}(At + B)$ avec $A, B \in \mathbf{R}$ ou, avec les conditions initiales précédentes,

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t} [x_0 + (v_0 + \alpha x_0) t]} \quad (2.2.14)$$

conduisant à un amortissement très rapide comme le montre la Fig. 2.3.

On a, ici encore, la limite (2.2.12).

L'oscillateur harmonique soumis au champ de pesanteur terrestre

Intégrons complètement les équations du mouvement suivantes

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \vec{g} \quad (2.2.15)$$

où $\vec{g} = \overrightarrow{\text{const.}}$ désigne l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol.

7. Rappelons que $\operatorname{ch} x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ et $\operatorname{sh} x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$.

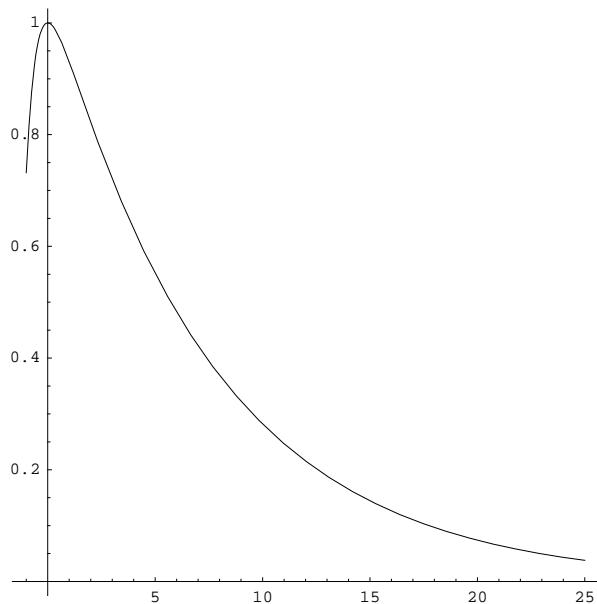


FIGURE 2.2 – Phénomène d'amortissement

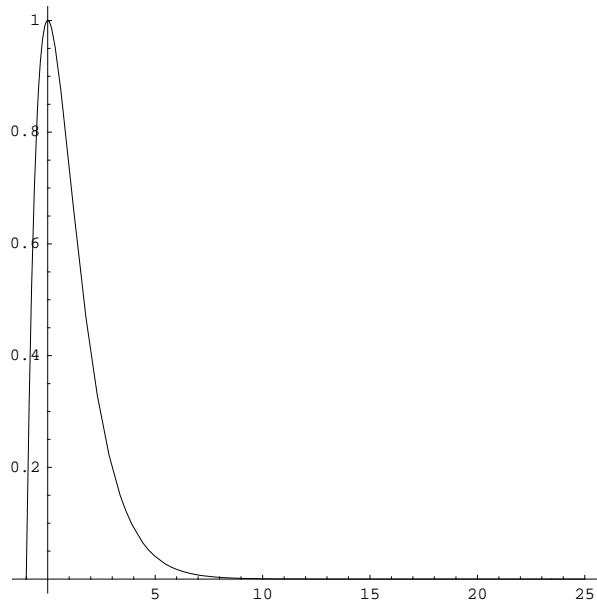


FIGURE 2.3 – Amortissement critique

On a ainsi trois équations découplées (en coordonnées cartésiennes) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = g_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = g_y \\ \ddot{z} + \omega^2 z = g_z \end{cases}$$

qui sont toutes de la forme (2.2.1) avec $b = 0$. Elles s'intègrent immédiatement grâce à (2.2.9) :

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos \omega t + B_x \sin \omega t + g_x / \omega^2 \\ y(t) = A_y \cos \omega t + B_y \sin \omega t + g_y / \omega^2 \\ z(t) = A_z \cos \omega t + B_z \sin \omega t + g_z / \omega^2 \end{cases}$$

où A_x, A_y, \dots, B_z sont six constantes d'intégration réelles. On écrit donc la solution générale de l'équation différentielle vectorielle (2.2.15) comme

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t + \frac{\vec{g}}{\omega^2}, \quad \vec{A}, \vec{B} \in \mathbf{R}^3. \quad (2.2.16)$$

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique constant

Il s'agit de résoudre le système (équation de Lorentz) :

$$m\ddot{\vec{r}} + q\vec{B} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0} \quad (2.2.17)$$

régissant le mouvement d'une particule de masse m et de charge électrique q plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = \overrightarrow{\text{const}}$.

Choisissons $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et posons $\omega := -qB/m$; alors, l'équation différentielle vectorielle (2.2.17) prend la forme suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \dot{v}_x + \omega v_y = 0 \\ \dot{v}_y - \omega v_x = 0 \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{cases} \quad (2.2.18)$$

qui entraîne immédiatement

$$z(t) = v_z(0)t + z(0). \quad (2.2.19)$$

Pour trouver la projection de la trajectoire de la particule chargée sur le plan $z = 0$, posons judicieusement

$$Z := x + iy \quad (2.2.20)$$

pour réécrire les deux premières lignes de (2.2.18) comme

$$\dot{V} - i\omega V = 0 \quad \& \quad \dot{Z} = V. \quad (2.2.21)$$

On tire de (2.1.4) : $V(t) = V(0) e^{i\omega t}$ et, finalement,

$$Z(t) = \frac{V(0)}{i\omega} [e^{i\omega t} - 1] + Z(0). \quad (2.2.22)$$

La trajectoire de la particule est une **hélice circulaire à pas constant** s'enroulant autour du champ magnétique.

Exercice 2.2.3. Montrer que l'hélice est centrée au point $Z(0) + iV(0)/\omega$ du plan complexe et qu'elle a pour rayon $r = |V(0)/\omega|$ (cf. (1.2.2)). La pulsation étant la **pulsation cyclotron** $\omega = -qB/m$, prouver que le pas de l'hélice est $\hbar = v_z(0)/\omega$.

Figures de Lissajous

L'intégration du système d'équations différentielles découplées

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_2 \end{cases} \quad (2.2.23)$$

s'opère aisément. Il s'agit des équations régissant les mouvements d'un oscillateur harmonique bi-dimensionnel de pulsations propres ω_1 et ω_2 . On parle d'oscillateur **isotrope** si $\omega_1 = \omega_2$, et **anisotrope** dans le cas $\omega_1 \neq \omega_2$. On trouve, grâce à (2.1.15), la solution générale du système (2.2.23) sous la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = r_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \\ x_2(t) = r_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \quad (2.2.24)$$

avec $r_1, r_2 \in \mathbf{R}^+$ (les amplitudes) et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}$ (les phases).

La nature géométrique des trajectoires dépend du rapport ω_1/ω_2 des pulsations (ou des fréquences) propres. Voir les Fig. 2.4 et Fig. 2.5 illustrant certaines **figures de Lissajous** que l'on peut observer sur l'écran d'un **oscilloscope**.

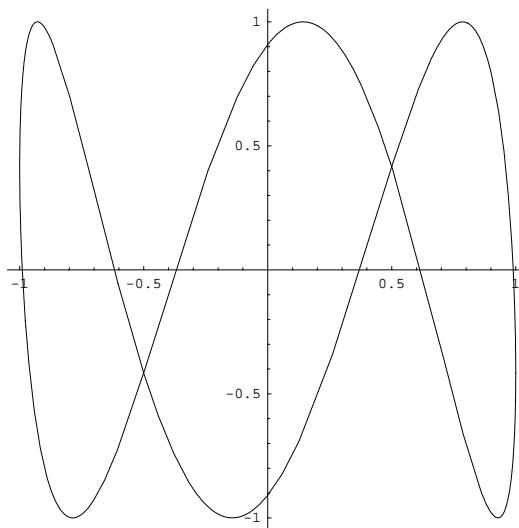


FIGURE 2.4 – Figure de Lissajous $\left[\frac{\omega_1}{\omega_2} = 3 \right]$

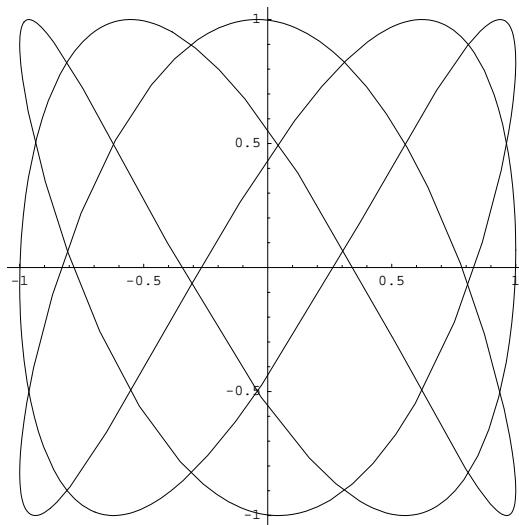


FIGURE 2.5 – Figure de Lissajous $\left[\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{5}{3} \right]$

Chapitre 3

Principes de la dynamique newtonienne

L’objet de la **dynamique** est donc la description de l’ensemble des mouvements des systèmes matériels à travers les causes — c’est-à-dire les **forces** — qui les produisent.

Nous présenterons ici la formulation newtonienne de la mécanique classique des systèmes originellement proposée par **Isaac Newton** dans ses ouvrages fondateurs : *De Motu Corporum* (1684) & *Principia Mathematica* (1687). Il s’agit, en l’occurrence, d’un édifice mathématique cohérent qui utilise le calcul différentiel (élaboré par Leibniz (1646–1716) et …Newton lui même) pour jeter les bases de l’une des toutes premières théories de la physique, à savoir la **mécanique** (céleste).

Cette théorie reste d’une extraordinaire précision et possède un remarquable pouvoir prédictif dans le cadre d’une physique “non relativiste” (qui met en jeu des vitesses faibles par rapport à la vitesse de la lumière¹) et “non quantique” (excluant toute description des phénomènes atomiques et nucléaires). L’étude du système solaire, par exemple, reste encore parfaitement envisageable dans le cadre newtonien, 300 ans après les “Principia” (si l’on écarte celle de certains phénomènes fins comme la précession du périhélie de Mercure).

La notion de **point matériel** joue ici un rôle fondamental : objet idéal au temps de Newton, mais réalité physique aujourd’hui (particules élémentaires) et objet mathématique bien défini au XXème siècle (théorie des “distributions”).

Il existe encore de nombreuses autres formulations de la mécanique classique

1. Pour Galilée, la vitesse de la lumière est infinie!

(formulation lagrangienne, hamiltonienne, (pré)symplectique, etc.) élaborées depuis Newton, qui se situent aussi à l'interface de la physique et des mathématiques. Nous ne les aborderons pas ici.

3.1 Les trois lois de Newton

3.1.1 N_I : Principe de l'inertie

Principe 3.1.1. *Tout corps soumis à une force nulle est animé d'un mouvement rectiligne uniforme :*

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \iff \quad \vec{a} = \vec{0}. \quad (3.1.1)$$

3.1.2 N_{II} : Principe fondamental de la dynamique

Principe 3.1.2. *La **force totale** \vec{F} agissant sur un corps et l'**accélération** \vec{a} de celui-ci sont proportionnelles :*

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.1.2)$$

*et le coefficient m est une constante positive appelée **masse inertie** du corps.*

3.1.3 N_{III} : Loi de l'action & de la réaction

Principe 3.1.3. *Si deux corps M_1 et M_2 interagissent, la force \vec{F}_{12} exercée par M_2 sur M_1 est **opposée** à la force \vec{F}_{21} exercée par M_1 sur M_2 :*

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \quad (3.1.3)$$

et portée par $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

3.1.4 Analyse des lois de Newton

Première loi

Ce premier principe reprend, en le formulant différemment, le principe galiléen de l'inertie garantissant l'existence de **référentiels inertiels**.

Deuxième loi

- Le choix d'un référentiel \mathcal{R} est ici implicite ; on désigne dans (3.1.2) par \vec{a} l'accélération du point matériel relativement à \mathcal{R} et par \vec{F} la “force” (totale) dans ce même référentiel — non nécessairement inertiel.
- La deuxième loi de Newton ainsi formulée concerne un objet idéal : le point matériel occupant un volume nul dans l'espace mais néanmoins doué de “masse”. La masse est d'ailleurs une caractéristique physique du point matériel ; elle ne dépend pas (contrairement à la force et à l'accélération) du référentiel choisi. La masse est une grandeur **positive**

$$m \geq 0 \quad (3.1.4)$$

et **additive** en mécanique non relativiste : la masse d'un système formé de deux corps de masse m_1 et m_2 est

$$m = m_1 + m_2. \quad (3.1.5)$$

Troisième loi

- Il découle de cette dernière loi de Newton que pour N points matériels, la force \vec{F}_{ij} appliquée au point M_i due à l'action de M_j est égale et opposée à \vec{F}_{ji} et portée par $\overrightarrow{M_i M_j}$, en d'autres termes que

$$\vec{F}_{ij} = g_{ij} \overrightarrow{M_j M_i} \quad \text{avec} \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (3.1.6)$$

où $i, j = 1, 2, \dots, N$ avec $i \neq j$. Les g_{ij} sont des fonctions scalaires qui dépendent, a priori, de M_1, M_2, \dots, M_N .

- Pour Newton, l'interaction **à distance** entre deux corps est **instantanée**.

Les forces en jeu dans les lois de Newton

Nous avons vu que le choix d'un référentiel dans lequel on formule le principe fondamental de la dynamique (3.1.2) est libre mais crucial.

On attribue cependant à certaines forces un caractère absolu : tous les observateurs tomberont d'accord sur leurs caractéristiques et leurs expressions ; par exemple la force (coulombienne) électrostatique entre deux particules électriquement chargées, la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps célestes, etc.

La théorie newtonienne fait appel (via N_I) à la structure affine de l'espace-temps (galiléen), notamment à sa classe de référentiels inertiels : elle stipule donc que ce sont les **forces absolues** \vec{F}_{abs} qui interviennent dans le principe fondamental de la dynamique (N_{II}) si l'on choisit de travailler dans un **référentiel inertiel** \mathcal{R} .

Par contre, rien ne nous empêche de formuler le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non inertiel \mathcal{R}^* ; les équations du mouvement (3.1.2) doivent alors se lire

$$m\vec{a}^* = \vec{F}^* \quad \text{avec} \quad \vec{F}^* = \vec{F}_{\text{abs}}^* + \vec{F}_{\text{inert}}^* \quad (3.1.7)$$

où \vec{F}_{inert}^* désigne la **force inertuelle**² additionnelle que l'on doit rajouter à la force absolue \vec{F}_{abs}^* dans un **référentiel non inertiel** \mathcal{R}^* . Nous traiterons, plus bas, un exemple particulier exhibant des forces inertielles.

Notons que la formulation de la deuxième loi de Newton (3.1.2) semble bien “circulaire” car on rencontre souvent le raisonnement suivant : “si un corps est accéléré c'est qu'une force agit sur lui, cette force étant elle-même définie comme le produit de son accélération et de sa masse”. En fait, rien de cela : pour Newton, la force a des propriétés indépendantes des mouvements qu'elle engendre et la loi $m\vec{a} = \vec{F}$ reste une loi incomplète si on ne précise pas la nature de \vec{F} . La force a une origine physique, matérielle, et son statut est phénoménologique.³ Le membre de gauche de l'équation fondamentale (3.1.2) est **géométrique**, quant au membre de droite, il est incontestablement de nature **physique**.

“If you insist upon a precise definition of force, you will never get it!”

Richard P. Feynman, Lectures on Physics I, p. 12-2.

3.2 Exemples

3.2.1 Force de gravitation

Gravitation au voisinage du sol

La force de gravitation newtonienne agissant sur un point matériel de masse (inertielle) m au voisinage de la surface terrestre est appelée **poids** et est donnée

2. Un exemple est fourni par la **force centrifuge** que tout enfant ressent sur un manège.

3. On signifie par là que cette notion est basée sur une étude particulière des phénomènes physiques en jeu.

par

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}} \quad (3.2.1)$$

où le champ de vecteurs $\vec{g} = \overrightarrow{\text{const.}}$ est le **champ d'accélération de la pesanteur** (de direction constante : la **verticale**, et d'intensité $g = \|\vec{g}\| \cong 9,81 \text{ m s}^{-2}$).

Remarquons que la masse gravitationnelle figurant dans le membre de droite de (3.2.1) est identifiée à la masse inertielle m de la particule : c'est le **Principe d'équivalence** de la masse inerte, m_i , et de la masse gravitationnelle, m_g .⁴

Les équations du mouvement (3.1.2) données, dans un référentiel galiléen, par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

s'intègrent immédiatement. La trajectoire de notre particule en **chute libre** est

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}[t - t_0]^2 + \vec{v}_0[t - t_0] + \vec{r}_0 \quad (3.2.4)$$

si, à l'instant t_0 , la vitesse est : \vec{v}_0 et la position : \vec{r}_0 .

Remarque 3.2.1. *La trajectoire de la particule est bien, grâce à (3.2.2), indépendante de sa masse.*

Gravitation loin de la surface terrestre

Les équations de Newton (3.2.3) restent, en fait, valables pour décrire la chute libre dans un champ de pesanteur arbitraire $\vec{g}(\vec{r}, t)$ pouvant, éventuellement, dépendre du temps (champ de gravitation d'une étoile en effondrement gravitationnel).

4. Il s'agit là d'un principe fondateur de toute théorie de gravitation :

$$m_i \equiv m_g \quad (3.2.2)$$

(on note simplement m) ; sa justification expérimentale — entreprise par Eötvös (1890) — conduit actuellement à des résultats spectaculaires [Dicke & Brazinski] :

$$\frac{|m_i - m_g|}{m_g} \cong 10^{-12}.$$

Dans le cas de la terre, et en supposant (bonne approximation) que la distribution de masse à l'intérieur de la terre possède la symétrie sphérique, la théorie du champ de gravitation newtonien conduit à

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.2.5)$$

où r désigne la distance de la particule d'essai — et \vec{e}_r sa direction par rapport — au centre de la terre (ici M est la masse de la terre et G la constante de Newton).

L'intensité de la pesanteur a donc la forme exacte $g = \|\vec{g}\| = GM/r^2$. Si R désigne le rayon terrestre, on a au voisinage du sol $g \cong GM/R^2$.

3.2.2 Force de Lorentz

C'est la force à laquelle est soumise une particule de charge électrique q , et de vitesse $\vec{v}(t)$, plongée dans un champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et un champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ pouvant dépendre du temps.⁵ La **force de Lorentz** est donnée par

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right] \quad (3.2.6)$$

Cette expression est déduite d'un principe physique connu sous le nom de principe du *couplage minimal* à un champ électromagnétique extérieur.

Dans le cas où le champ magnétique est nul, $\vec{B} = \vec{0}$, la force (3.2.6) ne dépend pas de la vitesse et porte le nom de **force de Coulomb**.

L'intégration des équations du mouvement d'un tel système est, en général ardue, sauf dans un certain nombre de cas simples que nous décrivons brièvement.

- L'intégration des équations du mouvement (3.1.2) dans le cas de la force de Coulomb créée par un champ $\vec{E} = \overrightarrow{\text{const.}}$ conduit exactement à la trajectoire **parabolique** (3.2.4) avec $\vec{g} = q\vec{E}/m$, où m désigne la masse de la particule.⁶
- Dans le cas d'un seul champ magnétique constant, $\vec{B} = \overrightarrow{\text{const.}}$, nous avons montré (cf. (2.2.19) et (2.2.22)) que la trajectoire est **hélicoïdale**.⁷

5. Le champ électromagnétique obéit aux **équations de Maxwell**, notamment aux équations homogènes :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}.$$

6. Remarquer que la trajectoire dépend, ici, non seulement de la charge électrique q , mais aussi de la masse m .

7. C'est la trajectoire des protons cosmiques, piégés par le champ magnétique terrestre près des pôles magnétiques (aurores boréales/australes).

3.2.3 Forces de frottement visqueux

Loi de Stokes

Nous avons déjà rencontré ce type de force bien particulière qui tend à freiner le mouvement d'un corps plongé dans un fluide possédant de la viscosité ; le freinage qu'elle induit est proportionnel à la vitesse du corps selon la loi :

$$\vec{F} = -\eta \vec{v} \quad (3.2.7)$$

où $\eta = \text{const.} > 0$ est le **coefficent de frottement de Stokes**. La loi phénoménologique (3.2.7) s'applique dans le cas des vitesses "faibles".

Loi de Newton

Dans le cas de vitesses relativement importantes, la loi de frottement prend plutôt la forme suivante :

$$\vec{F} = -\kappa \|\vec{v}\| \vec{v} \quad (3.2.8)$$

où $\kappa = \text{const.} > 0$ est le **coefficent de frottement de Newton**. Elle dépend quadratiquement de la vitesse et conduit à des équations du mouvement non linéaires en la vitesse.

3.2.4 Forces de frottement solide-solide

Ces forces sont dues aux phénomènes de rugosité apparaissant lors du contact de deux solides dont l'interface (la surface de contact) n'est pas parfaitement lisse [4].

Force de réaction

Considérons un corps au repos sur un support horizontal. Désignons par \vec{P} le poids de ce corps. A chaque instant la vitesse de ce corps étant nulle, son accélération sera donc identiquement nulle. La force totale \vec{F} agissant sur le corps est donc nulle, grâce à (3.1.2) : il existe nécessairement une force \vec{N} qui contrebalance \vec{P} , de sorte que l'on a bien $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$. On appelle

$$\vec{N} = -\vec{P} \quad (3.2.9)$$

la force de réaction appliquée au (barycentre du) corps, cf. Fig. 3.1.

Force de frottement statique

Si on applique maintenant au corps (au repos) une force \vec{F} de relativement faible intensité, comme indiqué sur la Fig. 3.1, il apparaît une force de frottement solide-solide \vec{f} s'opposant à \vec{F} pour maintenir le corps non accéléré, donc au repos.⁸

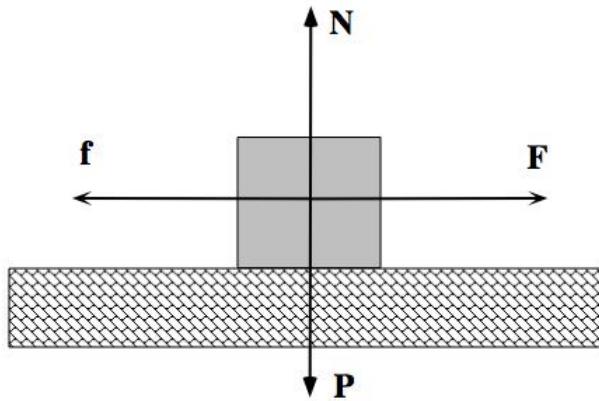


FIGURE 3.1 – Force de frottement solide-solide

La force totale agissant sur le corps est donc nulle : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$ et on a alors, grâce à (3.2.9) :

$$\vec{f} = -\vec{F} \quad (3.2.10)$$

pour peu que l'intensité $F := \|\vec{F}\|$ soit faible.

Si on augmente maintenant l'intensité F de la force de traction, la force de frottement \vec{f} pointe toujours vers $-\vec{F}$ mais son intensité, f , atteint un plateau de valeur pratiquement constante, proportionnelle à l'intensité N de la réaction (3.2.9) :

$$f = \mu N \quad (3.2.11)$$

pour les valeurs supérieures de F ; le coefficient μ est appelé **coefficient de frottement statique** et varie, typiquement, dans l'intervalle $[0, 1]$.

L'intensité de la force de frottement est décrite par la **loi phénoménologique** donnée par le graphe de la Fig. 3.2, acceptable en première approximation.

8. La force de traction est encore insuffisante pour vaincre les frottements.

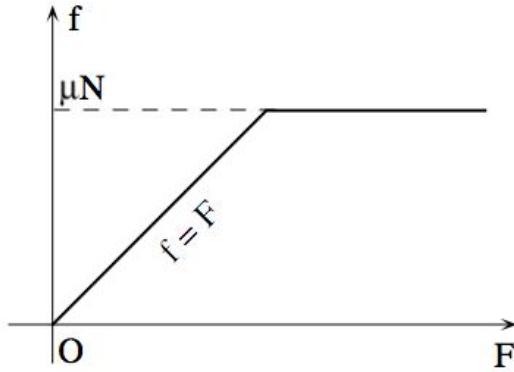


FIGURE 3.2 – Force de frottement statique

Exercice 3.2.2. *Un solide pesant est posé sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Prouver que, pour un coefficient de frottement statique μ , l'accélération du solide est⁹*

$$a = \begin{cases} g(\sin \theta - \mu \cos \theta) & \text{si } \tan \theta \geq \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

où g désigne l'accélération (constante) de la pesanteur.

3.2.5 Forces inertielles

Nous allons ici illustrer par un exemple particulier la notion de **force inertuelle** déjà mentionnée en (3.1.7) : force centrifuge, force d'entraînement, force de Coriolis.

Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Supposons que notre point matériel M , de masse m , soit mobile sur un rayon de manège tournant par rapport à un référentiel galiléen, \mathcal{R} , lié à la terre.

Utilisons le système de coordonnées le plus adapté au problème, c'est à dire celui des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du manège (avec origine sur l'axe de rotation du système). Notons, comme en Section 1.1.7, par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base locale orthonormée directe associée.

9. Remarquer que l'accélération (3.2.12) est indépendante de la masse du solide ; ce dispositif est à la base de la détermination expérimentale du coefficient μ .

Soit $t \mapsto \vec{r}(t)$ la trajectoire plane de notre mobile relativement à \mathcal{R} . On a

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r} \quad (3.2.13)$$

à chaque instant t . La vitesse angulaire du mobile (donc du manège) sera ainsi¹⁰

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z. \quad (3.2.14)$$

Quant à la **vitesse** (toujours par rapport à \mathcal{R}), on trouve :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

qui, en introduisant le vecteur $\vec{e}_\theta = d\vec{e}_r/d\theta$, prend la forme

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta} \quad (3.2.15)$$

L'expression générale de l'**accélération** se déduit aisément :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\dot{\theta} \right] + \left[\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} \right],$$

et, si l'on remarque¹¹ que $d\vec{e}_\theta/d\theta = -\vec{e}_r$, prend la forme finale

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta} \quad (3.2.16)$$

Forces inertielles par rapport au manège

Désignons par \mathcal{R}^* le référentiel tournant associé au manège. La position par rapport à \mathcal{R}^* est toujours $\vec{r}^* = r\vec{e}_r$. Par contre, la vitesse est simplement : $\vec{v}^* = \dot{r}\vec{e}_r$ et l'accélération : $\vec{a}^* = \ddot{r}\vec{e}_r$ puisque, dans l'exemple, le mobile est lié à l'axe \vec{e}_r .

On déduit de (3.2.14) et de (3.2.15) l'expression de la vitesse “absolue” :

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \quad (3.2.17)$$

en fonction de la **vitesse relative** \vec{v}^* et de la **vitesse d'entraînement**

$$\vec{v}_{\text{ent}}^* = -\vec{\omega} \times \vec{r}^*. \quad (3.2.18)$$

10. Rappelons que $\vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$.

11. Utiliser les expression (1.1.25) et (1.1.28).

De même, on déduit de (3.2.16), l'expression de l'accélération “absolue” :

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^*. \quad (3.2.19)$$

Les équations du mouvement de Newton (3.1.2) se lisent donc dans le référentiel “fixe”, \mathcal{R} , comme $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{abs}}$. Dans le référentiel du manège, \mathcal{R}^* , elles prennent, grâce à (3.2.19), la forme suivante : $m\vec{a}^* = \vec{F}_{\text{abs}}^* + \vec{F}_{\text{inert}}^*$ (cf. (3.1.7)), dans laquelle la force inertielle se décompose selon

$$\vec{F}_{\text{inert}}^* = \vec{F}_{\text{cent}}^* + \vec{F}_{\text{ent}}^* + \vec{F}_{\text{Cor}}^* \quad (3.2.20)$$

où la **force centrifuge**, la **force d'entrancement** et la **force de Coriolis** sont respectivement données par

$$\vec{F}_{\text{cent}}^* = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \quad (3.2.21)$$

$$\vec{F}_{\text{ent}}^* = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* \quad (3.2.22)$$

$$\vec{F}_{\text{Cor}}^* = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}^* \quad (3.2.23)$$

dans le référentiel **non inertiel** \mathcal{R}^* .

Remarque 3.2.3. *La force de Coriolis (1792–1843) est responsable de la rotation diurne du plan d'oscillation d'un pendule simple qui effectue un tour complet en*

$$T(\lambda) = \frac{24 \text{ h}}{\sin \lambda}$$

où λ est la latitude du pendule. L'expérience réalisée la première fois par Léon Foucault (1819–1868) au Panthéon (Paris, 1851) à la latitude $\lambda_{\text{Pantheon}} = 48^\circ 52'$ confirme bien la période $T_{\text{Pantheon}} \cong 31 \text{ h } 51 \text{ min}$.

Chapitre 4

Forces & lois de conservation

4.1 Calcul différentiel vectoriel

Avant d'introduire les exemples fondamentaux d'opérateurs différentiels vectoriels utiles, rappelons brièvement la notion de **dérivée partielle** d'une fonction de n variables (par exemple $n = 3$ pour fixer les idées) à valeurs réelles.

4.1.1 Rappel sur les dérivées

Une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ d'une variable réelle est dite 1-fois **différentiable** au point x si la limite suivante existe :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (4.1.1)$$

La fonction f est dite différentiable si elle est différentiable en tout point de son domaine de définition. On notera

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x) \quad (4.1.2)$$

et, désignant par dx la différentielle fondamentale (d'intégration par rapport à la variable x), on appelle

$$df = \frac{df}{dx} dx \quad (4.1.3)$$

la **difféentielle** de la fonction f que l'on intègre¹ sur un intervalle $[x_1, x_2]$ selon

$$\int_{x_1}^{x_2} df(x) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = f(x_2) - f(x_1).$$

1. On ne s'intéresse pas ici aux problèmes de convergence des intégrales en jeu.

4.1.2 Dérivées partielles

Considérons une fonction $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur un domaine (ouvert) $U \subset \mathbf{R}^3$. Nous appelons première dérivée partielle de la fonction f au point $(x, y, z) \in U$ la limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad (4.1.4)$$

si cette dernière existe. Nous aurons de même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h, z) - f(x, y, z)}{h} \quad (4.1.5)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h} \quad (4.1.6)$$

partout où ces limites existent.

Nous remarquons que $\partial f / \partial x$ n'est autre que la dérivée de f par rapport à la variable x en considérant (y, z) comme des paramètres fixes. Idem pour $\partial f / \partial y$ et $\partial f / \partial z$. En d'autre termes $\partial f / \partial x(x, y, z) = [t \mapsto f(t, y, z)]'(x)$, etc.

Exemple 4.1.1. Si $f(x, y, z) = xy^3e^{xz}$, on trouve aisément

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (1 + xz)y^3e^{xz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3xy^2e^{xz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2y^3e^{xz}.$$

Définition-Théorème 4.1.1. La fonction $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ est **différentiable** au point $\vec{r} \in U \subset \mathbf{R}^3$ s'il existe des fonctions f_x, f_y, f_z et g telles que

$$f(\vec{r} + \vec{h}) = f(\vec{r}) + f_x(\vec{r})h_x + f_y(\vec{r})h_y + f_z(\vec{r})h_z + \|\vec{h}\|g(\vec{r}, \vec{h}) \quad \text{et} \quad \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} g(\vec{r}, \vec{h}) = 0.$$

Alors

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (4.1.7)$$

Démonstration. Il suffit simplement de prendre $\vec{h} = h\vec{e}_x$, etc. pour retrouver la définition précédente (4.1.4)–(4.1.6) des dérivées partielles. \square

Quand les dérivées partielles de f admettent à leur tour des dérivées partielles, on dit que la fonction f est deux fois différentiable, etc.

Dans l'exemple ci-dessus, le calcul des dérivées partielles secondes donne le résultat remarquable : $\partial/\partial x (\partial f/\partial y) = 3(1 + xz)y^2e^{xz} = \partial/\partial y (\partial f/\partial x)$.

On a, en fait, le

Lemme 4.1.2 (de Schwarz, 1873). *Si la fonction f est deux fois continûment différentiable,² les dérivées partielles commutent*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}. \quad (4.1.8)$$

4.1.3 Gradient

Définition 4.1.3. *Si $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction (une fois) différentiable à valeurs réelles, on appelle **gradient** de cette fonction, le champ de vecteurs³ constitué des dérivées partielles*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.1.9)$$

On prouve aisément, grâce à la définition (4.1.9), la

Proposition 4.1.4. *Soient $f, g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ et $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions différentiables, alors*

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g, \quad (4.1.10)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = (\overrightarrow{\text{grad}} f)g + f \overrightarrow{\text{grad}} g, \quad (4.1.11)$$

2. Elle possède des dérivées partielles du second ordre continues.

3. Un **champ de vecteurs** de A^3 est la donnée d'une correspondance $\vec{V} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ qui associe à tout point $M \in U$ (partie de A^3), un vecteur $\vec{V}(M) \in \mathbf{R}^3$ en ce point. Par exemple le champ newtonien d'accélération gravitationnelle \vec{g} défini par

$$\vec{g}(M) = -Gm \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$$

créé par une masse m localisée au point O est un champ de vecteurs de $E^3 - \{O\}$.

Le gradient (4.1.9) est aussi un champ de vecteurs de A^3 qui associe au point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z)$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u \circ f) = (u' \circ f) \overrightarrow{\text{grad}} f. \quad (4.1.12)$$

Théorème 4.1.5 (Dérivée le long d'une courbe). *Soient $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable et $t \mapsto \vec{r}(t)$ une courbe de \mathbf{R}^3 ; on a la règle de dérivation :*

$$\frac{df}{dt}(\vec{r}(t)) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.1.13)$$

Démonstration. On a, grâce à (4.1.7) : $f(\vec{r}(t+h)) - f(\vec{r}(t)) = f(\vec{r}(t) + \vec{H}) - f(\vec{r}(t)) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{H} + \|\vec{H}\| g(\vec{r}, \vec{H})$, en posant $\vec{H} = \vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$. Donc $df(\vec{r}(t))/dt = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{H}/h \right\} + \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \|\vec{H}\|/h g(\vec{r}, \vec{H}) \right\} = \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t) + 0$. \square

Ce théorème permet donc de généraliser la notion de différentielle (4.1.3) d'une fonction d'une variable à celui d'une fonction de plusieurs variables : la **differentielle** de la fonction f est donc définie par l'expression

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4.1.14)$$

ou encore

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} \quad (4.1.15)$$

qui constitue, en fait, la **définition intrinsèque**⁴ du **gradient**.

Corollaire 4.1.6. *On a $df = 0$ ssi $f = \text{const.}$* ⁵

4.1.4 Rotationnel

Définition 4.1.7. *On appelle **rotationnel** du champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ (une fois) différentiable le nouveau champ de vecteurs*

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} := \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

4. Intrinsèque signifie “indépendant du système de coordonnées”.

5. On suppose le domaine de définition, $U \subset \mathbf{R}^3$, de f connexe. On dit que $U \subset \mathbf{R}^3$ est **connexe** si deux points quelconques de U sont joignables par un arc de courbe entièrement contenu dans U .

On a le théorème fondamental

Théorème 4.1.8. *i) Quelle que soit la fonction f (deux fois) différentiable, on a*

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{grad}} f) = \vec{0} \quad (4.1.17)$$

ii) Réciproquement, si \vec{V} est un champ de vecteurs différentiable irrotationnel, c'est-à-dire de rotationnel nul, il existe alors (localement) une fonction f différentiable dont il est le gradient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \quad \xrightleftharpoons[\text{loc}]{\iff} \quad \vec{V} = \vec{\text{grad}} f \quad (4.1.18)$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le lemme de Schwarz (4.1.8) pour prouver (i). Nous admettrons le “lemme de Poincaré” (ii) sans démonstration. \square

4.1.5 Divergence

Définition 4.1.9. *On appelle **divergence**⁶ du champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ (une fois) différentiable la fonction scalaire*

$$\text{div } \vec{V} := \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (4.1.19)$$

On vérifie aisément le théorème fondamental (ayant le même statut que (4.1.17)) :

Proposition 4.1.10. *Pour tout champ de vecteurs (deux fois différentiable) \vec{V} de \mathbf{R}^3 , on a*

$$\text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{V}) \equiv 0 \quad (4.1.20)$$

4.2 Travail & forces conservatives

4.2.1 Prélude : saut à la perche

Commençons par un exemple simple qui illustre de manière élémentaire la loi fondamentale de conservation de l'énergie que nous présenterons dans sa généralité plus loin.

6. On ne donnera, ici, que la définition de cet opérateur différentiel en coordonnées cartésiennes.

On considère le cas de la chute libre (à un seul degré de liberté) d'un objet de masse m dans le champ de pesanteur $g = \text{const.}$

Si $z(t)$ désigne la position de notre point matériel à l'instant t , les équations du mouvement bien connues : $dz/dt = v$ & $m dv/dt = F = -mg$ donnent la variation de son énergie cinétique $T = \frac{1}{2}mv^2$ au cours du temps.

On a $dT/dt = mv dv/dt = -mgv = -mg dz/dt = d(-mgz)/dt$ ou encore

$$E = T + V = \text{const.} \quad \text{avec} \quad V(z) = mgz.$$

L'énergie totale E , somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle⁷ gravitationnelle V est **constante au cours du temps** !

Notons la relation entre force $F(z) = -mg$ (ici, le poids) et énergie potentielle $V(z) = mgz + \text{const.}$, à savoir

$$F = -\frac{dV}{dz}$$

qui admettra une généralisation ultérieure.

A titre d'exemple, un sauteur à la perche prend son élan à l'altitude $z = 0$ avec une vitesse v_0 , son énergie est donc $E = \frac{1}{2}mv_0^2$. Après l'appel et le choc de la perche dans le butoir, le sauteur s'élève et l'énergie E se décompose en énergie cinétique et énergie potentielle (de gravitation et élastique délivrée par la perche). Dans la dernière phase, le sauteur atteint la barre, située à la hauteur $z = h$, à vitesse pratiquement nulle, de sorte que $E = mgh$. On déduit de ce traitement très schématique la hauteur atteinte par le perchiste :

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Notons l'importance d'une vitesse de course initiale importante pour assurer de bons résultats sportifs.

AN. Si $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ et $g \cong 10 \text{ m s}^{-2}$, on trouve $h \cong 5 \text{ m}$.

4.2.2 Travail

La notion de travail d'une force \vec{F} constante le long d'un déplacement $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est bien connue ; ce travail est donné, cf. les Exemples 1.1.8, par le produit scalaire

$$W_{M_1 M_2} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}. \quad (4.2.1)$$

7. L'énergie potentielle V est définie à une constante additive près !

Définition 4.2.1. Soit $t \mapsto M(t)$ une courbe de l'espace euclidien E^3 , et $\vec{F}(t)$ une force⁸ appliquée au point $M(t)$ à tout instant t ; on appelle alors **travail**⁹ de cette force, le long de l'arc M_1M_2 , l'intégrale

$$W_{M_1M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.2.2)$$

où $\vec{v}(t) = \overrightarrow{dM}/dt$ est la vitesse, $M_1 = M(t_1)$ et $M_2 = M(t_2)$ désignant les extrémités de l'arc (voir Fig 4.1).

L'expression (4.2.2) est bien indépendante du paramétrage, on note donc

$$W_{M_1M_2} = \int_{M_1M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.2.3)$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ avec un choix d'origine O qui sera désormais implicite.

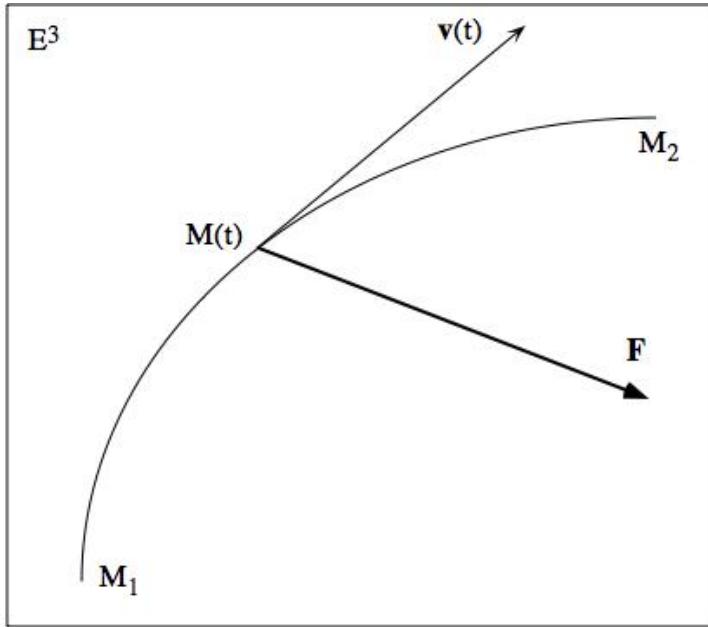


FIGURE 4.1 – Travail d'une force

On retrouve bien, comme cas particulier, la notion élémentaire (4.2.1) du travail d'une force \vec{F} constante le long d'un déplacement vectoriel $\overrightarrow{M_1M_2}$; on a, en effet, $W_{M_1M_2} = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.

8. Cette force dépend de $M(t)$ et, éventuellement, de la vitesse $\vec{v}(t)$ en ce point.

9. On parle aussi de **circulation** d'un champ de vecteurs.

Définition 4.2.2. La quantité

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.2.4)$$

figurant dans l'expression (4.2.2) du travail est appelée **puissance** de la force \vec{F} à l'instant considéré.

Exercice 4.2.3. Calculer la circulation du champ de vecteurs (cf. Fig 4.2) :

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) \quad (4.2.5)$$

le long du circuit plan $OABCO$ où $\overrightarrow{OA} = a \vec{e}_x$, $\overrightarrow{OB} = a \vec{e}_x + b \vec{e}_y$ et $\overrightarrow{OC} = b \vec{e}_y$.

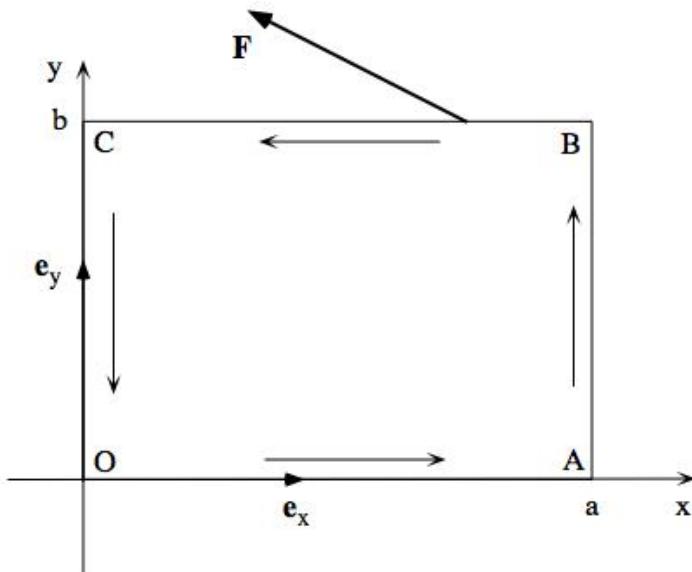


FIGURE 4.2 – Circulation d'un champ de vecteurs

Démonstration. Grâce à (4.2.3), on a

$$W_{M_1 M_2} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy = \frac{1}{2} \int_{M_1 M_2} x dy - y dx.$$

On trouve alors $W_{OA} = W_{CO} = 0$ et $W_{AB} = W_{BC} = ab/2$. La circulation totale est alors $W_{OABCO} = W_{OA} + W_{AB} + W_{BC} + W_{CO} = ab$. La circulation de \vec{F} le long du périmètre (orienté) d'un rectangle est égale à la **surface** de ce rectangle! \square

Exercice 4.2.4. Trouver le travail de la force de gravitation entre deux points M_1 et M_2 de la trajectoire d'un point matériel de masse m au voisinage du sol.¹⁰

10. L'accélération de la pesanteur est presque constante à faible altitude.

Démonstration. On a vu en (4.2.1) que $W_{M_1 M_2} = m\vec{g} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$. Cette expression ne dépend clairement que des extrémités M_1 et M_2 du chemin considéré lors de la chute libre du corps : il est indépendant des conditions initiales, donc du mouvement particulier du point matériel. Ce champ de force (ici le poids $\vec{F} = m\vec{g}$) est dit **conservatif**. Notons que le travail précédent prend la forme remarquable

$$W_{M_1 M_2} = V(M_1) - V(M_2) \quad \text{où} \quad V(M) = -m\vec{g} \cdot \vec{r} \quad (4.2.6)$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Dans un référentiel adapté où le poids est donnée par $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ avec $g = \text{const.} > 0$ et $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, on trouve l'expression familière

$$W_{M_1 M_2} = mg(z_1 - z_2) \quad (4.2.7)$$

pour le travail du poids entre les points M_1 et M_2 . \square

Après ces préparations, donnons la preuve du théorème de l'énergie cinétique.

Définition 4.2.5. *On appelle **énergie cinétique** d'un point matériel de masse m et de vitesse \vec{v} dans un référentiel donné la quantité*

$$T = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \quad (4.2.8)$$

Théorème 4.2.6 (de l'énergie cinétique). *Si un point matériel est soumis à une force \vec{F} , la différence des énergies cinétiques entre deux points M_1 et M_2 est reliée au travail de la force le long de la trajectoire reliant ces deux points comme suit :*

$$T_2 - T_1 = W_{M_1 M_2} \quad (4.2.9)$$

Démonstration. On a $W_{M_1 M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m d\vec{v}/dt \cdot \vec{v} dt$ grâce au principe fondamental de la dynamique (Newton II) et, puisque $d\|\vec{v}\|^2/dt = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt$, on a donc $W_{M_1 M_2} = \int_{t_1}^{t_2} (dT/dt) dt = \int_{M_1 M_2} dT = T_2 - T_1$. \square

Exemple 4.2.7. Voici deux illustrations du théorème de l'énergie cinétique.

- La différence d'énergie cinétique entre deux points de faible altitude z_1 et z_2 pour une particule pesante de masse m est donc

$$T_2 - T_1 = mg(z_1 - z_2)$$

puisque $W_{M_1 M_2}$ est donné par (4.2.7) ; si $z_1 < z_2$, on a bien $T_1 > T_2$.

- L'énergie cinétique T d'une particule électriquement chargée plongée dans un champ magnétique \vec{B} est une constante du mouvement

$$T = \text{const.}$$

En effet le travail de la force de Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ entre deux instants quelconques est nul, la force étant toujours orthogonale à la vitesse (cf. Eq. (4.2.2)).

Définition 4.2.8. Un champ de force \vec{F} de l'espace euclidien E^3 est dit **conservatif** si son travail $W_{M_1 M_2}$ ne dépend que des extrémités M_1 et M_2 et non de la forme du chemin entre ces deux points.

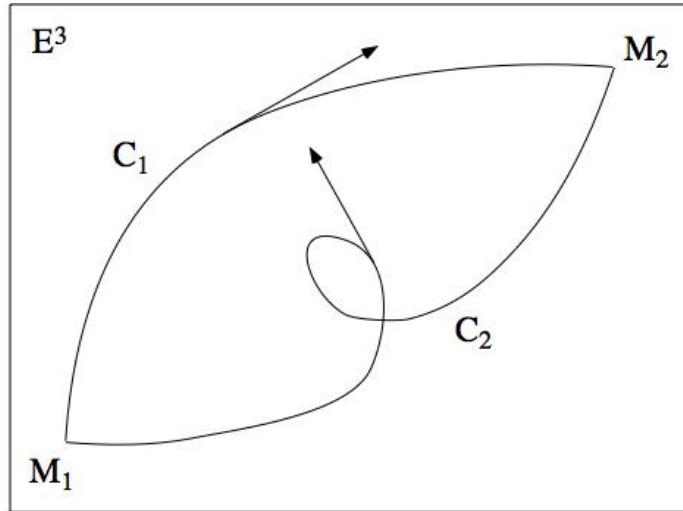


FIGURE 4.3 – Champ conservatif

On a donc le

Théorème 4.2.9. Si un champ de force \vec{F} est conservatif, la quantité¹¹

$$\begin{aligned} V(M) &= -W_{OM} \\ &= - \int_{OM} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

est bien définie,¹² c'est le **potentiel**¹³ dont dérive \vec{F} ; on a

$$W_{M_1 M_2} = V(M_1) - V(M_2). \tag{4.2.11}$$

Corollaire 4.2.10. Une force est conservativessi son travail est nul sur toute courbe fermée.

Démonstration. Puisque \Rightarrow est trivial, montrons \Leftarrow . Si C est une courbe fermée, choisissons deux points M_1 et M_2 sur cette courbe. Reportons nous à la Fig. 4.3 : on a $W_C = W_{M_1 M_2} + W_{M_2 M_1} = W_{C_1} - W_{C_2}$. Par hypothèse $W_C = 0$, donc $W_{C_1} = W_{C_2}$. \square

Eu égard à (4.2.10), il vient $dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ et, grâce à (4.1.15), on a le

Corollaire 4.2.11. Tout champ de force \vec{F} **conservatif** est de la forme

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V} \tag{4.2.12}$$

où le **potentiel** V est défini à une constante additive près.

Grâce au théorème 4.1.8 (formule (4.1.17)) on a enfin la

Proposition 4.2.12. Pour qu'un champ de force \vec{F} soit conservatif, il est nécessaire que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$.

Donnons deux exemples de forces **non conservatives**.

Exercice 4.2.13. La force de frottement visqueux exercée par un milieu sur un corps animé d'une vitesse \vec{v} est modélisée par $\vec{F} = -\eta \vec{v}$ où $\eta \cong \text{const.} > 0$ est le coefficient de frottement. Montrer que cette force est non conservative.

11. On a ici choisi la constante additive de telle sorte $V(O) = 0$.

12. Elle ne dépend, grâce à la Définition 4.2.8, que de M et non du chemin OM .

13. On dit aussi **énergie potentielle**.

Démonstration. Calculons le travail de cette force sur un cercle C_R de rayon R , paramétré par $\theta \in [0, 2\pi]$: on obtient $W_{C_R} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \vec{v} d\theta = -\eta \int_0^{2\pi} v(\theta)^2 d\theta$ avec $v(\theta) = \|\vec{v}\| = R$, donc $W_{C_R} = -2\pi R^2 \eta \neq 0$. \square

Exercice 4.2.14. Prouver que la force \vec{F} définie en (4.2.5) est non conservative.

Démonstration. On trouve $\text{rot } \vec{F} = \vec{e}_z \neq \vec{0}$: la force \vec{F} est non conservative. \square

Exemple 4.2.15. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ désigne la norme du rayon vecteur $\vec{r} \in \mathbf{R}^3$, le vecteur unitaire radial est $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ (non défini à l'origine). Le calcul donne

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} r = \vec{e}_r} \quad (4.2.13)$$

en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Exemple 4.2.16. Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un corps de masse m soumis au champ constant $\vec{g} \in \mathbf{R}^3$ de pesanteur dérive d'un potentiel (voir (4.2.6)) :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{avec} \quad V(\vec{r}) = -m\vec{g} \cdot \vec{r} + \text{const.} \quad (4.2.14)$$

Exemple 4.2.17. On obtient à partir de (4.1.12) et (4.2.13) l'expression utile :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = f'(r) \vec{e}_r. \quad (4.2.15)$$

4.3 Loi de conservation de l'énergie

Les développements ci-dessus nous permettent de prouver une loi fondamentale de la physique — la **conservation de l'énergie totale** — sous des conditions que nous détaillons dans le

Définition-Théorème 4.3.1. Si une particule est plongée dans un champ de forces $(\vec{r}, t) \mapsto \vec{F}$ dérivant du potentiel V , on appelle **énergie totale** du système la quantité

$$\boxed{E = T + V} \quad (4.3.1)$$

où T désigne l'énergie cinétique (4.2.8). Si ce potentiel est indépendant du temps, $\partial V / \partial t = 0$, l'énergie est une **constante du mouvement**

$$\boxed{E = \text{const.}} \quad (4.3.2)$$

Démonstration. On trouve facilement

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \right] + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

grâce à (4.1.13). Puisque $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, si V ne dépend pas explicitement du temps t , il vient $dE/dt = \vec{v} \cdot [m d\vec{v}/dt - \vec{F}]$, c'est-à-dire $dE/dt = 0$ grâce à Newton II. \square

Remarquons que ce résultat découle également du théorème de l'énergie cinétique (4.2.9) et de l'expression (4.2.11) du travail dans le cas d'une force dérivant d'un potentiel indépendant du temps :

$$T_2 - T_1 = W_{M_1 M_2} = V_1 - V_2 \quad \Rightarrow \quad E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Signalons le résultat utile :

Proposition 4.3.1. *Dans un problème à un degré de liberté, toute force $F(x)$ est conservative et dérive du potentiel¹⁴*

$$V(x) = - \int F(x) dx. \quad (4.3.3)$$

Dans ces conditions, l'énergie totale est

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \text{const.} \quad (4.3.4)$$

Exemple 4.3.2 (Pendule simple). *On trouve aisément l'équation (non linéaire!) du mouvement d'un pendule simple de longueur ℓ (le paramètre est l'angle polaire θ avec la verticale donnée par l'accélération constante de la pesanteur \vec{g} ; la liaison est supposée parfaite : pas de forces de frottements). En écrivant que la dérivée temporelle de $E = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 - m\vec{g} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell \cos\theta$ est nulle, on trouve*

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0. \quad (4.3.5)$$

Exercice 4.3.3 (Pendule parabolique). *Etablir, en utilisant la Proposition 4.3.1, l'équation du mouvement, $\ddot{x} = a(x)$, d'un point matériel astreint à se déplacer sur une parabole : $y = x^2/(2\ell)$ (avec $\ell = \text{const.} > 0$) dans le champ de pesanteur constant $\vec{g} = -g\vec{e}_y$.*

14. On écrira plus précisément $V(x) = - \int_{x_0}^x F(u) du$.

4.4 Loi de conservation du moment angulaire

Il existe, parallèlement à la loi de conservation de l'énergie totale, une loi supplémentaire de conservation dans le cas où les forces en jeu possèdent des symétries (par exemple des forces invariantes par rotation, comme c'est le cas pour la force d'attraction gravitationnelle que nous allons bientôt étudier).

4.4.1 Champ de forces central

Définition 4.4.1. On appelle **champ central** par rapport à une origine O tout champ de vecteurs \vec{F} de la forme¹⁵

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (4.4.1)$$

pour une certaine fonction (différentiable) $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$.

Un champ central est donc **invariant par rotation** autour de l'origine, O , puisque sa (seule) composante radiale, $f(r)$, ne dépend que de la distance, r , de cette origine au point où s'applique la force. Voir Fig. 4.4.

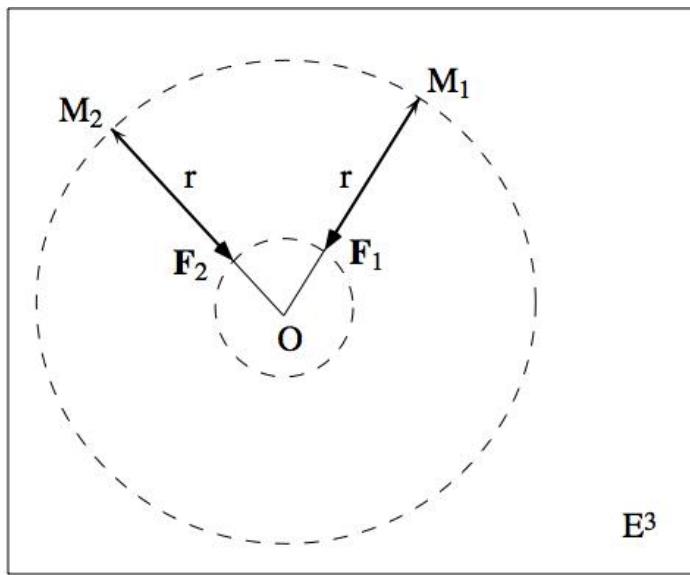


FIGURE 4.4 – Champ central

15. L'origine, O , est le point $\vec{r} = \vec{0}$; de même $r := \|\vec{r}\|$. On pourrait éventuellement considérer la forme plus générale $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(r, t) \vec{r}/r$ de forces centrales non statiques.

Proposition 4.4.2. *Un champ central est conservatif.*

Démonstration. On pourrait montrer directement que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ dans $E^3 - \{O\}$, mais on sait (cf. (4.2.15)) que $\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = V'(r) \vec{e}_r$; un potentiel de la force (4.4.1) est donc donné par une primitive $V(r) = - \int f(r) dr$ (à une constante additive près). \square

Exemple 4.4.3. *Donnons deux exemples fondamentaux de champs centraux conduisant ainsi automatiquement à des énergies conservées.*

- Le **champ de force de Hooke** (force de rappel élastique) régissant le mouvement de l'**oscillateur harmonique isotrope** est donné par :

$$\vec{F}_{\text{Hooke}} = - \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{k}{2} r^2 \right] = -k \vec{r} \quad (4.4.2)$$

où $k = \text{const.} > 0$ est le coefficient de rappel.¹⁶

- Le champ d'**interaction gravitationnelle** entre deux masses m et M est donné par le **champ newtonien** :

$$\vec{F}_{\text{Newton}} = - \overrightarrow{\text{grad}} \left[-\frac{GMm}{r} \right] = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \quad (4.4.3)$$

où $G = \text{const.}$ désigne la constante de Newton.

Nous avons vu comment l'invariance du potentiel sous translation temporelle conduit naturellement à la loi de conservation de l'énergie. Illustrons maintenant une autre grande loi de conservation associée, cette fois ci, à l'invariance par rotation des champs de force étudiés. Nous mettrons ainsi l'accent sur la loi de **conservation du moment angulaire** d'un particule soumise à l'action d'un champ central extérieur.

4.4.2 Vitesse aréolaire

Considérons une trajectoire $t \mapsto M(t)$ de l'espace euclidien E^3 ; soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le rayon vecteur relatif à une origine O . Appelons maintenant $\Delta \vec{S}$ la surface (orientée) balayée par le rayon vecteur entre deux instants t et $t + \Delta t$ proches (cf. Fig. 4.5).

16. S'agissant de la **tension**, \vec{F} , due à un ressort dans l'approximation des petites élongations, on dit aussi que k représente la **raideur** dudit ressort.

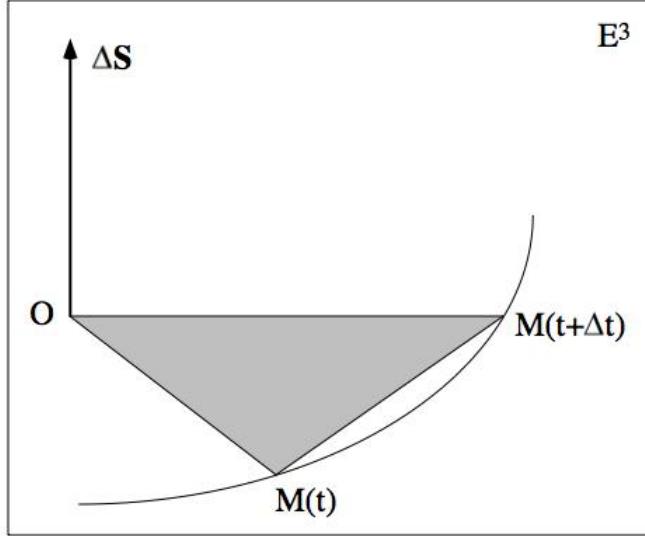


FIGURE 4.5 – Vitesse aréolaire

La Proposition 1.1.16 nous apprend que cette surface est donnée par le produit vectoriel $\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t) \equiv \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]$. On a donc

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Définition-Théorème 4.4.1. *On appelle **vitesse aréolaire** de la courbe $t \mapsto \vec{r}(t)$ la quantité*

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \vec{v}(t). \quad (4.4.4)$$

Si l'on paramétrise le plan engendré par le rayon vecteur, \vec{r} , et la vitesse, \vec{v} , par les coordonnées polaires (r, θ) ; on a alors $d\vec{S}/dt = dS/dt \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$ avec

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

(4.4.5)

Démonstration. Dans la base locale orthonormée des coordonnées polaires (du plan $z = 0$) on a $\vec{r} = r \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$. Donc $\vec{r} \times \vec{v} = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$. \square

La surface balayée par le rayon vecteur issu de O entre deux points M_1 et M_2 de la trajectoire est donc

$$S_{M_1 OM_2} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta.$$

Lemme 4.4.4. *Dans le cas des courbes planes, on a (cf. Exercice 4.2.3) :*

$$S_{M_1OM_2} = \frac{1}{2} \int_{M_1M_2} xdy - ydx. \quad (4.4.6)$$

Démonstration. Puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ en coordonnées polaires, on a $dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta$ et $dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$. Il s'ensuit que $xdy - ydx = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = r^2 d\theta$. \square

Exercice 4.4.5. *Utiliser ce lemme (4.4.6) pour montrer que la surface d'une ellipse de demi-grand axe a et demi-petit axe b est $S = \pi ab$.*¹⁷

On remarque que l'on a bien $S_{M_1OM_2} = W_{M_1M_2}$ — la surface (4.4.6) est égale à la circulation du champ de vecteurs (4.2.5).

4.4.3 Loi des aires

Commençons par la

Définition 4.4.6. *Considérons un point matériel de masse m dont la trajectoire relativement à un référentiel donné est la courbe (lisse) $t \mapsto \vec{r}(t)$ de vitesse $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. On appelle **moment angulaire** de ce point matériel la quantité*

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} \quad (4.4.7)$$

Signalons l'expression utile :

$$\vec{L} = 2m \frac{d\vec{S}}{dt}. \quad (4.4.8)$$

Remarque 4.4.7. *Remarquons que le moment angulaire ainsi défini dépend bien sûr du choix du référentiel, mais contrairement au **moment linéaire***

$$\vec{P} = m \vec{v} \quad (4.4.9)$$

il dépend du choix d'une origine du référentiel selon :

$$\vec{L}_{O_1} = \overrightarrow{O_1 O_2} \times \vec{P} + \vec{L}_{O_2}. \quad (4.4.10)$$

On a enfin le résultat général suivant :

17. Indication : paramétriser l'ellipse selon $(x(\theta) = a \cos \theta, y(\theta) = b \sin \theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ comme dans l'Exercice 1.2.2.

Théorème 4.4.8. *Le moment angulaire d'un point matériel plongé dans un champ de force central est une constante du mouvement*

$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (4.4.11)$$

Démonstration. On a $d\vec{L}/dt = m d\vec{r}/dt \times \vec{v} + \vec{r} \times m d\vec{v}/dt$; grâce aux équations du mouvement (Newton II) et à l'expression générale (4.4.1) d'une force centrale (pouvant dépendre du temps), on trouve $d\vec{L}/dt = m \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times f(r, t) \vec{r}/r = \vec{0}$. \square

Corollaire 4.4.9 (Loi des aires (Kepler II)). *Un point matériel plongé dans un champ de force central a une trajectoire plane et une vitesse aréolaire constante :*

$$\vec{r}(t) \perp \vec{L} \quad \text{et} \quad \frac{dS}{dt} = \text{const.} \quad (4.4.12)$$

Démonstration. Grâce à (4.4.11) la direction du moment angulaire, \vec{L} , reste fixe au cours du temps. Le plan orthogonal, \vec{L}^\perp , reste donc fixe au cours du temps. La définition (4.4.7) du moment angulaire entraîne que la position $\vec{r}(t)$ est à chaque instant contenue dans ce plan \vec{L}^\perp . On déduit enfin de (4.4.8) que $dS/dt = \text{const.}$ \square

Les planètes sont, dans une première approximation, soumises au seul champ central (4.4.3) dû au soleil. Le mouvement des planètes de notre système solaire s'effectue dans un plan voisin du plan de l'écliptique.

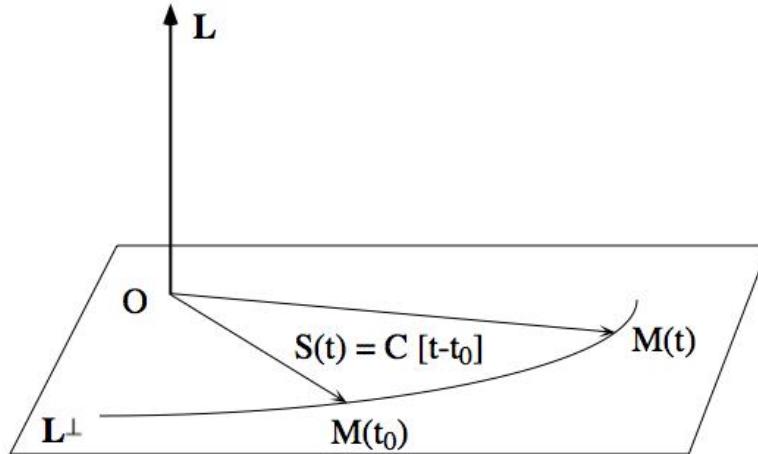


FIGURE 4.6 – Loi des aires (Kepler II)

Grâce à la Proposition 4.4.9, et en intégrant (4.4.12), on prouve que ces dernières balayent bien —comme l'avait découvert Kepler— des aires égales en des temps égaux

$$S(t) = C[t - t_0]$$

où $C = L/(2m) = \text{const.}$ est la **constante des aires** qui s'exprime en fonction du moment angulaire L et de la masse m de la planète. Voir la Fig. 4.6.

Chapitre 5

Analyse dimensionnelle

5.1 Unités fondamentales

Les grandeurs physiques (on dit aussi observables) sont caractérisées par leurs valeurs numériques dans un système d'unités — par exemple, le système international (SI) dont les d'unités de base sont le mètre, le kilogramme et la seconde. Mais il nous est loisible de changer de système d'unités, par exemple de passer du système SI au système cgs, etc.

Ces grandeurs sont donc, plus fondamentalement, munies d'une **dimension physique** qui s'exprime de manière tout à fait générale à l'aide des **unités de base indépendantes**

$$\begin{aligned} M &= [\text{Masse}] \\ L &= [\text{Longueur}] \\ T &= [\text{Temps}] \end{aligned}$$

Ainsi, une grandeur physique¹ Z aura-t-elle comme *dimension physique* une expression de la forme

$$[Z] = M^\alpha L^\beta T^\gamma \quad (5.1.1)$$

où α, β, γ sont des exposants rationnels.

En effet, les observables sont des quantités construites à partir de grandeurs homogènes à une masse M (et ses puissances), à des longueurs L , des surfaces L^2 , etc., au temps T , aux dérivées successives de ces grandeurs par rapport au temps (par exemple la vitesse scalaire est homogène à LT^{-1}), etc.

1. Par exemple, une des composantes de l'impulsion, l'énergie d'une particule élémentaire sont des observables ; on ignorera ici les grandeurs physiques associées spécifiquement à l'électromagnétisme.

N'apparaissent ainsi, dans la dimension physique d'une observable, que des puissances rationnelles des unités de base.²

A titre d'exemple, l'énergie d'une particule libre de masse m et de vitesse v , i.e.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.1.2)$$

a pour dimension

$$[E] = ML^2T^{-2} \quad (5.1.3)$$

car on a bien $[E] = [m][v]^2$ avec $[m] = M$ et $[v] = LT^{-1}$.

La dimension (5.1.3) est universelle, en ce sens qu'elle est indépendante de la théorie physique sous-jacente ; elle restera encore valable en mécanique relativiste bien que l'expression explicite de l'énergie change sensiblement.³

5.2 Exercices

- Quelles sont les dimensions physiques des composantes v_x de la vitesse, P_y de l'impulsion et $L_z = xP_y - yP_x$ du moment angulaire d'une particule de masse m ?

Réponse : $[v_x] = LT^{-1}$, $[P_y] = MLT^{-1}$, $[L_z] = ML^2T^{-1}$.

- Trouver la dimension physique de la constante de Planck.

L'énergie E d'un photon est reliée à la fréquence ν de l'onde électromagnétique associée par la formule d'Einstein (explication de l'effet photoélectrique (1905)) :

$$E = h\nu$$

2. Une grandeur physique est, en fait, un élément d'un espace vectoriel ; un choix de base, au sens de l'algèbre linéaire, correspondant précisément à un choix d'unité physique. Par exemple, le temps sera modélisé par un espace T à une dimension ; on pourra écrire $t = 1,5\text{ s}$ pour désigner un (intervalle de) temps d'une seconde et demie : 1,5 est la composante de $t \in T$ dans la base s . On note donc $[t] = T$ pour signifier $t \in T$. Autre exemple, la vitesse \vec{v} (dans un référentiel donné) est un vecteur de \mathbf{R}^3 à valeurs "vitesse" LT^{-1} , c'est à dire $\vec{v} \in \mathbf{R}^3 \otimes LT^{-1}$. Plus généralement, les grandeurs physiques appartiennent à des produits (cartésiens et tensoriels) d'espaces M, L, T et de leurs duals respectifs notés M^{-1}, L^{-1}, T^{-1} .

3. L'énergie relativiste d'une particule libre de masse m et de vitesse v est donnée non par (5.1.2) mais par l'expression suivante due à Einstein :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

où h désigne la constante de Planck (1900). On a donc $[E] = [h][\nu]$ avec $[\nu] = T^{-1}$ et le résultat (5.1.3), d'où

$$[h] = A := ML^2T^{-1} \quad (5.2.1)$$

où A est appelée *unité d'action*.

3. Un étudiant trouve que l'énergie potentielle au point x d'une particule dans un champ de force F constant est $V(x) = -\frac{1}{2}Fx^2$. Le résultat vous semble-t-il correct ?

Réponse : Non ! $[Fx^2] = MLT^{-2}L^2 = ML^3T^{-2}$ n'est pas une énergie (voir (5.1.3)).

4. Montrer que la période du pendule simple de longueur ℓ dans le champ de pesanteur terrestre g est $T \propto \sqrt{\ell/g}$.
5. Trouver une longueur caractéristique du champ de gravitation créé par une étoile de masse M en relativité générale.

Réponse : La quantité suivante

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

a bien pour dimension L si G est la constante de Newton et c la vitesse de la lumière dans le vide. On appelle cette quantité le **rayon de Schwarzschild** ou horizon du trou noir. (Voir le Paragraphe 7.3.3.)

6. Vérifier que $\mathcal{L}_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ est homogène à une longueur (appelée **longueur de Planck**) ; quelle est la dimension de la quantité $\sqrt{\hbar c/G}$?

Réponse : $\mathcal{M}_P = \sqrt{\hbar c/G}$ est la masse de Planck.

7. Expansion de l'univers. La loi de Hubble $\vec{v} = H\vec{r}$ relie la vitesse de fuite \vec{v} des galaxies et leur position \vec{r} spatiale, le **paramètre de Hubble** H dépendant du temps. Déterminer la dimension $[H]$.

Réponse : Évidemment $[H] = T^{-1}$. Les données astrophysiques récentes donnent : $H \cong h_0 (0,97781 \cdot 10^{10} \text{ yr})^{-1}$ & $0,4 < h_0 < 1$ pour la valeur actuelle de la “constante” de Hubble.

8. Justifier qualitativement que le métabolisme ou dépense énergétique de base⁴ d'un organisme vivant, de masse M , puisse être donné par la loi de puissance suivante [6] :

$$P \propto M^{3/4}. \quad (5.2.2)$$

9. Longévité des mammifères [6]. Justifier que la longévité d'un mammifère est de la forme :

$$T = kM^{1/4} \quad (5.2.3)$$

avec $k = \text{const.}$

Réponse : Le métabolisme étant proportionnel à la fréquence cardiaque ν et à la masse de sang M , on déduit de la formule précédente (5.2.2) de la puissance P que $\nu \propto M^{-1/4}$; le nombre total de pulsations cardiaques étant de l'ordre de 10^9 (pour une vie de mammifère), on en déduit la longévité T donnée par l'Eq. (5.2.3) avec une valeur expérimentale $k \cong 10 \text{ an} \times \text{kg}^{-1/4}$. Exception : l'homme moderne !

4. Il s'agit de déterminer la loi de puissance $P = kM^n$ donnant la dépense énergétique de base d'un organisme en fonction de sa masse M . Interprétation (Lin) : la puissance développée par un muscle de longueur L est $P = F\dot{L}$ où la force de contraction musculaire est $F \propto S$, i.e. proportionnelle à la section du muscle (au nombre de fibres); la vitesse de contraction musculaire \dot{L} étant identique pour tous les mammifères (c'est une caractéristique du tissu musculaire), $P \propto S \propto d^2$ où d est le diamètre du muscle. Finalement la masse d'un animal modélisé par un cylindre étant proportionnelle à son volume $M \propto Ld^2$, et $L \propto d^{2/3}$ (loi d'échelle garantissant que l'animal peut supporter son poids), on obtient $P \propto M^{3/4}$.

Chapitre 6

Théorèmes généraux et lois de conservation galiléennes

6.1 Théorèmes généraux

Nous considérons dans le présent chapitre le cas, tout à fait général, d'un **système de N corps** en interaction, éventuellement soumis à l'action de forces extérieures additionnelles. Il s'agira, par exemple, du cas d'un système de particules chargées (avec interactions électromagnétiques mutuelles) plongé dans un champ électromagnétique extérieur (dont on ne cherche pas à décrire les sources).

Nous appellerons désormais **système isolé**¹ tout système dont les constituants interagissent mutuellement, mais qui reste non influencé par le reste l'Univers dans son ensemble : les **forces extérieures** sont réputées nulles.

Un autre exemple, traité plus particulièrement ci-dessous, concerne le système fermé de N corps célestes en interactions mutuelles gravitationnelles ; ce dernier servira de modèle au système solaire (soleil, planètes et astéroïdes) si l'on néglige la “perturbation” due au reste de notre galaxie.

6.1.1 Forces intérieures & forces extérieures

Considérons un système de N -points matériels de masses fixes m_1, m_2, \dots, m_N dont on repère la position — dans un référentiel galiléen, pour simplifier, — par les rayons vecteurs $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$ associés aux points M_i (avec $i = 1, 2, \dots, N$) fixant la configuration dans l'espace euclidien E^3 à chaque instant t .

1. On dit aussi **système fermé**.

Le principe fondamental de la dynamique (loi de Newton II (3.1.2)) se lit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \end{array} \right. \quad (6.1.1)$$

où \vec{F}_i représente la force totale exercée sur le point M_i (pour $i = 1, \dots, N$).

L'interaction entre deux points M_i et M_j (tels que $i \neq j$) est décrite par la **force intérieure** \vec{F}_{ij} exercée sur M_i par M_j et qui est reliée à la force \vec{F}_{ji} (exercée sur M_j par M_i) par la loi de Newton III (3.1.3) selon laquelle

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{ij} = g_{ij} [\vec{r}_i - \vec{r}_j] \quad (6.1.2)$$

où les $g_{ij} = g_{ji}$ sont fonctions des N -points $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ (et, éventuellement, de leurs vitesses $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$). (Voir également (3.1.6).) La **force interne totale** à laquelle est soumis le point M_i est donc

$$\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}. \quad (6.1.3)$$

Mais, si on ne peut considérer le système isolé du reste de l'Univers, il nous faut tenir compte des forces extérieures dues à l'action de sources extérieures au système étudié : nous noterons par \vec{F}_i^{ext} la **force extérieure**² agissant sur M_i ; la force totale figurant dans le membre de droite de (6.1.1) sera donc

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (6.1.4)$$

pour tout $i = 1, \dots, N$.

6.1.2 Théorèmes généraux

Nous donnons, dans cette section, la formulation des théorèmes extrêmement généraux régissant l'évolution temporelle de l'impulsion totale ainsi que du moment angulaire total d'un système de N corps en interactions mutuelles et également soumis à l'influence de force extérieures.

2. Cette force est déterminée phénoménologiquement par l'étude des sources extérieures ; par exemple, une force gravitationnelle d'origine extérieure au système solaire devra être modélisée en tenant compte, aussi précisément que possible, de la répartition des masses voisines à ce système.

Impulsion, moment angulaire, barycentre et masse totale

Définition 6.1.1. On appelle **impulsion** du point matériel M_i , de masse m_i , et de vitesse \vec{v}_i dans le référentiel considéré, la quantité

$$\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i. \quad (6.1.5)$$

On appellera donc **impulsion totale** du système de N -points matériels la quantité

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i. \quad (6.1.6)$$

Une autre notion importante concerne une quantité physique reliée aux mouvements de rotation du système considéré.

Définition 6.1.2. Le **moment angulaire** du point matériel M_i , d'impulsion \vec{P}_i , est défini par

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (6.1.7)$$

où $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$ désigne la position de M_i dans le référentiel considéré, d'origine O . On appellera **moment angulaire total** du système de N -points matériels la quantité

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i. \quad (6.1.8)$$

Deux quantités physiques supplémentaires sont utilement introduites par la

Définition 6.1.3. On appelle **barycentre**³ du système de N corps, dans le référentiel choisi, la quantité

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (6.1.9)$$

où

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (6.1.10)$$

désigne la **masse totale** du système.

Nous prouvons aisément la

3. On dit aussi **centre de masse**.

Proposition 6.1.4. *Si l'on effectue un changement de référentiel galiléen (1.3.17) correspondant à un changement d'origine $\overrightarrow{O^*O} = \vec{c}$, on a*

$$\vec{P}^* = \vec{P}, \quad (6.1.11)$$

$$\vec{L}^* = \vec{L} + \vec{c} \times \vec{P}, \quad (6.1.12)$$

$$\vec{R}^* = \vec{R} + \vec{c}, \quad (6.1.13)$$

$$M^* = M. \quad (6.1.14)$$

Démonstration. Utiliser la relation de Chasles : $\vec{r}_i^* = \overrightarrow{O^*M_i} = \overrightarrow{O^*O} + \overrightarrow{OM_i} = \vec{r}_i + \vec{c}$ (pour tout $i = 1, \dots, N$) dans (6.1.7), (6.1.8) et (6.1.9). \square

Exercice 6.1.5. *Prouver que le **centre de gravité** G du système, défini par la relation $\overrightarrow{OG} = \vec{R}$, ne dépend pas de l'origine, O , du référentiel.*

Démonstration. Grâce (6.1.13), on a $\vec{R}^* = \overrightarrow{O^*G^*} = \vec{c} + \vec{R} = \overrightarrow{O^*O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O^*G}$; d'où $G^* = G$. \square

Formulation des théorèmes généraux

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier théorème général; formulons, pour ce faire, un lemme utile.

Lemme 6.1.6. *Si $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$ pour tous $i \neq j$, on a alors*

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0}. \quad (6.1.15)$$

Démonstration. En sous-entendant les sommations de 1 à N , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} &= \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i > j} \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} + \sum_{j > i} \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_{i < j} [\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}] \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

En utilisant la forme (6.1.3) des forces intérieures, on obtient immédiatement le

Corollaire 6.1.7. *La somme des forces intérieures (6.1.3) est nulle :*

$$\vec{F}^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int}} = \vec{0}. \quad (6.1.16)$$

Théorème 6.1.8 (Théorème général I). *L'impulsion totale du système à N corps vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} := \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}} \quad (6.1.17)$$

Démonstration. On trouve, en utilisant (6.1.1), (6.1.6), (6.1.5) et (6.1.4),

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left[\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \right] = \vec{0} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

grâce à (6.1.16). \square

Théorème 6.1.9 (Théorème général II). *Le moment angulaire total du système à N corps vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}^{\text{ext}} := \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}} \quad (6.1.18)$$

donc le membre de droite est le **moment total des forces extérieures**.

Démonstration. On trouve, en utilisant (6.1.1), (6.1.8) et (6.1.7)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left[\vec{v}_i \times \vec{P}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right].$$

Mais, puisque $\vec{v}_i \times \vec{P}_i = \vec{0}$ grâce à (6.1.5), l'équation (6.1.4) entraîne

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{int}} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ &= \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{\mathcal{M}}^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Montrons que le premier terme du membre de droite précédent s'annule. En ayant recours à (6.1.2), on a $\sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times g_{ij} [\vec{r}_i - \vec{r}_j] = -\sum_{i \neq j} g_{ij} \vec{r}_i \times \vec{r}_j$. Mais $\sum_{i \neq j} g_{ij} \vec{r}_i \times \vec{r}_j = \vec{0}$ grâce au fait que la quantité sommée est antisymétrique en (i, j) et au lemme (6.1.15). \square

Remarque 6.1.10. Notons bien que les forces intérieures — aussi intenses soient-elles — ne gouvernent pas l'évolution temporelle de l'impulsion totale \vec{P} ainsi que du moment angulaire total \vec{L} du système. Seules comptent les forces extérieures dans les théorèmes généraux (6.1.8) et (6.1.9).

Donnons enfin un résultat simple relatif au barycentre.

Proposition 6.1.11. Le barycentre, \vec{R} , d'un système à N corps évolue au cours du temps comme si toutes les masses y étaient concentrées et toutes les forces (extérieures) appliquées en lui :

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}}. \quad (6.1.19)$$

Démonstration. Puisque, grâce à la définition (6.1.9), on a $M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$, il vient aisément $M\ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\text{ext}}$, en utilisant (6.1.17). \square

Forces intérieures centrales

Portons, enfin, une attention particulière au cas de forces intérieures qui dérivent d'un potentiel. Ce cas spécial de forces intérieures conduira, comme nous le verrons bientôt, à la conservation de l'énergie totale pour une classe importante de systèmes à N corps, les systèmes dits "conservatifs".

Proposition 6.1.12. Considérons des forces intérieures centrales, c'est-à-dire de la forme particulière⁴

$$\vec{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (6.1.20)$$

avec $r_{ij} := \|\vec{r}_{ij}\|$ où $\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$ désigne la position de M_i relativement à M_j pour tous $i \neq j$ et $i, j = 1, \dots, N$. Ces forces dérivent d'un potentiel $V_{ij}(r_{ij})$ donné par

$$V_{ij}(r) = - \int f_{ij}(r) dr. \quad (6.1.21)$$

Démonstration. Désignons par $\overrightarrow{\text{grad}}_i f$ le gradient de la fonction $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ par rapport à la variable \vec{r}_i (pour tout $i = 1, \dots, N$).

4. On a, bien sûr, $f_{ij} = f_{ji}$.

On a, par exemple (cf. (4.2.13)), $\overrightarrow{\text{grad}}_i \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)/r_{ij}$ car \vec{r}_j est “fixe” pour \vec{r}_i , c'est-à-dire

$$\overrightarrow{\text{grad}}_i r_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}.$$

Nous avons enfin : $-\overrightarrow{\text{grad}}_i V_{ij}(r_{ij}) = -V'_{ij}(r_{ij}) \overrightarrow{\text{grad}}_i r_{ij} = -V'(r_{ij}) \vec{r}_{ij}/r_{ij} = \vec{F}_{ij}$ en posant $f_{ij}(r) = -V'_{ij}(r)$. D'où l'expression (6.1.21) pour les potentiels centraux. \square

6.2 Onze moments galiléens des systèmes isolés

Nous pouvons maintenant donner la liste complète des grandeurs galiléennes conservées au cours du mouvement des **systèmes isolés** (du reste de l'Univers !) de N -points matériels en interaction. Ce sont, on le sait, des systèmes pour lesquels les *forces extérieures sont nulles* : $\vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$ pour tous $i = 1, \dots, N$.

Remarque 6.2.1. *Ces lois de conservation sont, en fait, étroitement liées à la symétrie galiléenne des systèmes isolés :*

<i>conservation du moment angulaire</i>	\longleftrightarrow	<i>symétrie de rotation</i>
<i>conservation du passage</i>	\longleftrightarrow	<i>symétrie de boost galiléen</i>
<i>Conservation de l'impulsion</i>	\longleftrightarrow	<i>symétrie de translation spatiale</i>
<i>conservation de l'énergie</i>	\longleftrightarrow	<i>symétrie de translation temporelle</i>

mais nous ne discuterons pas plus avant cette dualité symétries-lois de conservation tout à fait fondamentale en mécanique et théorie des champs.

6.2.1 Conservation de l'impulsion

Proposition 6.2.2. *L'impulsion totale d'un système isolé est une constante du mouvement :*

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (6.2.1)$$

Démonstration. Si \vec{F}_i^{ext} pour $i = 1, \dots, N$, on déduit de (6.1.17) que $d\vec{P}/dt = \vec{0}$. \square

Nous illustrerons, plus bas, cette loi de conservation fondamentale par certains exemples empruntés à la physique des collisions élastiques et inélastiques.

6.2.2 Conservation du moment angulaire

Proposition 6.2.3. *Le moment angulaire d'un système isolé est une constante du mouvement :*

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (6.2.2)$$

Démonstration. Trivial grâce à (6.1.18). \square

Remarque 6.2.4. Pour avoir la loi de conservation (6.2.2) du moment angulaire, il suffit que le moment, \vec{M}^{ext} , des forces extérieures soit nul sans que ces forces soient nécessairement nulles. Un exemple important nous est fourni par le problème à un corps, $N = 1$, plongé dans un champ de forces central $\vec{F}^{\text{ext}} = f(r)\vec{r}/r$ dont le moment par rapport à l'origine est nul. Nous avons vu que la loi de conservation du moment angulaire implique la deuxième loi de Kepler.

6.2.3 Conservation du passage

Proposition 6.2.5. *Le passage d'un système isolé est une constante du mouvement :*

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{v}_i t) = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (6.2.3)$$

Démonstration. On trouve $d\vec{G}/dt = \sum_i (m_i d\vec{r}_i/dt - m_i \vec{v}_i - \vec{F}_i t) = -t \sum_i \vec{F}_i$, grâce à (6.1.1). Mais (6.1.16) implique : $d\vec{G}/dt = -t \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ pour tout système isolé. \square

On a immédiatement le

Corollaire 6.2.6. *Le barycentre, \vec{R} , d'un système isolé possède un mouvement rectiligne uniforme ; sa vitesse est*

$$\vec{V} := \frac{\vec{P}}{M} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (6.2.4)$$

et sa position initiale

$$\vec{R}_0 := \frac{\vec{G}}{M} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (6.2.5)$$

Démonstration. On a, grâce à (6.1.9) et (6.1.6) :

$$\vec{G} = M\vec{R} - \vec{P}t \quad (6.2.6)$$

et donc $\vec{R} = (\vec{P}/M)t + \vec{G}/M$. On obtient donc

$$\vec{R} = \vec{V}t + \vec{R}_0 \quad (6.2.7)$$

où la vitesse \vec{V} du barycentre est donnée par (6.2.4) et sa position \vec{R}_0 à l'instant $t = 0$, par (6.2.5). \square

6.2.4 Conservation de l'énergie

Voici un résultat général qui s'applique même au cas de systèmes non isolés.

Théorème 6.2.7. *Si les forces intérieures sont centrales, cf. (6.1.21), et si les forces extérieures dérivent de potentiels indépendants du temps, c'est-à-dire si*

$$\vec{F}_{ij} = -\overrightarrow{\text{grad}}_i V_{ij} \quad \text{et} \quad \vec{F}_i^{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}_i V_i^{\text{ext}} \quad (6.2.8)$$

l'énergie totale du système des N corps

$$\begin{aligned} E &= T + V^{\text{int}} + V^{\text{ext}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{v}_i\|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N V_{ij} + \sum_{i=1}^N V_i^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

est une **constante du mouvement** :

$$E = \text{const.} \quad (6.2.10)$$

Démonstration. Calculons la dérivée temporelle de l'énergie (6.2.9). On trouve, en utilisant les équations du mouvement (6.1.1) :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i < j} \overrightarrow{\text{grad}}_i V_{ij} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i < j} \overrightarrow{\text{grad}}_j V_{ij} \cdot \vec{v}_j + \sum_i \overrightarrow{\text{grad}}_i V_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i - \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i - \sum_{i < j} \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_j - \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_i \left[\vec{F}_i - \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} - \vec{F}_i^{\text{ext}} \right] \cdot \vec{v}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

grâce à (6.1.4). \square

Corollaire 6.2.8. *L'énergie totale d'un système isolé est une constante du mouvement :*

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{v}_i\|^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \text{const.} \quad (6.2.11)$$

où

$$V = \sum_{i < j} V_{ij} \quad (6.2.12)$$

est le **potentiel** des forces intérieures.

Démonstration. Utiliser (6.2.9) et (6.2.10) en prenant $V^{\text{ext}} = 0$ pour potentiel des forces extérieures. \square

Exemple 6.2.9. *L'énergie totale du problème des trois corps⁵ newtonien est*

$$E = \frac{1}{2} m_1 \|\vec{v}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\vec{v}_2\|^2 + \frac{1}{2} m_3 \|\vec{v}_3\|^2 - \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \quad (6.2.13)$$

où G désigne la constante de Newton.

6.2.5 Conservation de la masse

La masse n'étant sujette à aucune équation du mouvement en théorie newtonienne, la **masse totale** d'un système de N -points matériels est certainement une constante du mouvement ; c'est, en fait, un **invariant galiléen** :

$$M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{inv.} \quad (6.2.14)$$

indépendant du référentiel choisi et qui possède donc un statut tout à fait particulier en mécanique galiléenne.⁶

Dans la littérature, la conservation de la masse est souvent “implicite” lors de la formulation des lois des collisions et désintégrations. Nous soulignerons, ici, son rôle d'invariant fondamental qui ne peut être éludé. (Voir, par exemple, l'intervention “explicite” de la masse totale dans les lois de transformation des moments galiléens données ci-dessous.)

5. On peut penser au système “isolé” Soleil-Terre-Lune.

6. Notons que ce statut particulier disparaît en mécanique relativiste qui, à la différence de la mécanique galiléenne, fusionne masse et énergie.

6.2.6 Loi de transformation des moments galiléens

Les moments galiléens des systèmes isolés dépendent fortement du choix du référentiel (galiléen) dans lequel ils ont été définis. Ces onze quantités physiques $\{\vec{L}, \vec{G}, \vec{P}, E, M\}$ sont bien des constantes du mouvement définies par les $2N$ conditions initiales $(\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0), \vec{v}_1(0), \dots, \vec{v}_N(0))$ du système isolé à N corps. Mais ce ne sont pas (toutes) des invariants galiléens : elles se transforment, en fait, de manière spécifique par changement de référentiel galiléen. La proposition suivante traite du cas particulier des boosts.

Théorème 6.2.10. *Un boost galiléen (1.3.11) de vitesse \vec{v}_0 , c'est-à-dire le changement de référentiel*

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vec{r}^* = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t^* = t \end{pmatrix}$$

transforme le moment selon

$$\{\vec{L}, \vec{G}, \vec{P}, E, M\} \longmapsto \{\vec{L}^*, \vec{G}^*, \vec{P}^*, E^*, M^*\}$$

où

$$\vec{L}^* = \vec{L} - \vec{G} \times \vec{v}_0 \quad (6.2.15)$$

$$\vec{G}^* = \vec{G} \quad (6.2.16)$$

$$\vec{P}^* = \vec{P} - M \vec{v}_0 \quad (6.2.17)$$

$$E^* = E - \vec{P} \cdot \vec{v}_0 + \frac{1}{2} M \|\vec{v}_0\|^2 \quad (6.2.18)$$

$$M^* = M. \quad (6.2.19)$$

Démonstration. Exercice sans mystère. □

Remarque 6.2.11. *Quelques observations immédiates sont cependant utiles.*

- Le “passage” \vec{G} (ou la position initiale du barycentre) est invariant sous tout boost.
- La masse M est, en fait, invariante par tout changement de référentiel.

- On peut annuler l’impulsion totale dans le référentiel \mathcal{R}^* , i.e.,

$$\vec{P}^* = \vec{0} \quad (6.2.20)$$

pour peu que l’on passe du laboratoire, \mathcal{R} , au **référentiel du centre de masse**⁷ \mathcal{R}^* par un boost de vitesse

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{P}}{M} \quad (6.2.21)$$

qui n’est rien d’autre que la vitesse (6.2.4) du . . . barycentre.

6.3 Exemples

6.3.1 Feu d’artifice

Lors du tir d’un feu d’artifice, le barycentre, \vec{R} , de l’obus initial possède une trajectoire parabolique puisque, grâce à (6.1.19), on a

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{g}$$

dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = \text{const.}$

A un instant donné, en plein vol, des forces intérieures chimiques sont à l’œuvre et font exploser l’obus en plusieurs débris multicolores, eux-mêmes explosant en cascade en plusieurs débris. Chaque débris a sa propre trajectoire (grossièrement parabolique) déterminée par les conditions initiales (sa vitesse et sa position au moment de l’explosion qui lui a donné naissance).

Malgré tout, la Proposition 6.1.11 nous assure que le barycentre, \vec{R} , du système des (très nombreux) débris se déplace sur la trajectoire parabolique originelle.

6.3.2 Ballistocardiographe

Cet exemple issu des sciences médicales [4, 8] illustre la loi de conservation du passage donnée en (6.2.3).

Une boîte de masse M se déplace sans frottement sur un socle parfaitement lisse. A l’intérieur, un ressort relie une masse m à la paroi de l’enceinte. Désignons par X

7. On dit aussi **référentiel barycentrique**.

l'abscisse du milieu de la boîte et par x celle du corps (voir la Fig. 6.1). Le corps oscille relativement à la boîte avec une fréquence ν selon la loi horaire

$$x(t) - X(t) = a \cos(\omega t) \quad (6.3.1)$$

où $\omega = 2\pi\nu$ représente la pulsation et $a > 0$ l'amplitude du mouvement ; il s'agit alors de déterminer la position $X(t)$ de la boîte à chaque instant t .

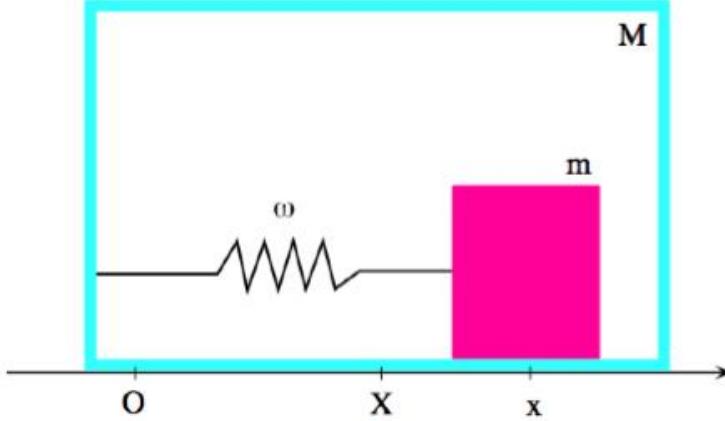


FIGURE 6.1 – Le ballistocardiographe

Si le système oscillant modélise la masse sanguine ($m \cong 65$ g) contenue dans le cœur d'un patient, le sang oscillant grâce aux contractions cardiaques avec une amplitude $a \cong 7$ cm, déterminons l'amplitude A , la pulsation Ω et le déphasage Φ des oscillations induites de la boîte — appelée **ballistocardiographe** — pour une masse totale $M + m \cong 75$ kg (boîte & patient!).

Le Corollaire 6.2.6 nous apprend que la conservation du passage pour un système isolé (ici le ballistocardiographe & patient) est équivalente au fait que le barycentre R du système est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. La vitesse d'ensemble (la vitesse $V = \text{const.}$ du barycentre) est nulle car nulle avant l'expérience, donc tout au long de cette dernière. Grâce à (6.2.7) on a tout simplement $R(t) = R_0$ ou encore, cf. (6.1.9),

$$M X(t) + m x(t) = \text{const.} \quad (6.3.2)$$

Il vient finalement, en utilisant (6.3.1), $X(t) = -m a \cos(\omega t)/(M + m) + \text{const.}$, i.e.

$$X(t) = A \cos(\Omega t + \Phi) + \text{const.} \quad \text{avec} \quad A = \frac{m a}{M + m}, \quad \Omega = \omega, \quad \Phi = \pi. \quad (6.3.3)$$

Le mouvement du ballistocardiographe est le mouvement d'un oscillateur harmonique de même pulsation mais en opposition de phase par rapport à celui du sang.

A.N. L'amplitude des oscillations du ballistocardiographe est donnée par (6.3.3) et vaut donc $A \cong 0,06$ mm, ce qui s'avère suffisant pour déterminer l'amplitude des oscillations sanguines du patient.

6.3.3 Fission de l'uranium 235

Nous traitons ici du cas de réactions inélastiques de certains systèmes physiques. Une réaction est dite **inélastique** si les composants "in" du système (avant réaction) ne se retrouvent pas intégralement dans l'état "out" (après réaction). En voici un exemple.

Un noyau N_0 se désintègre lors d'un processus inélastique de fission nucléaire

$$N_0 \rightarrow N_1 + N_2$$

en deux sous-noyaux N_1 et N_2 respectivement de masses m_1 et m_2 et de vitesses constantes \vec{v}_1 et \vec{v}_2 par rapport au référentiel \mathcal{R} du laboratoire. On appelle \vec{v}_0 la vitesse de N_0 dans le laboratoire.

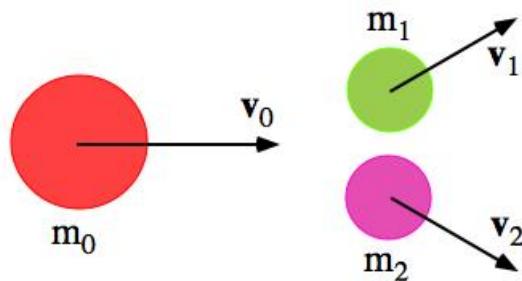


FIGURE 6.2 – Fission de l'Uranium

Les forces nucléaires (que l'on renonce à décrire ici) sont à l'origine du processus de fission. On sait que, quelle que soit la nature précise de ces forces intérieures, l'impulsion totale (6.2.1) du système est conservée au cours du temps, tout comme l'est la masse totale (6.2.14) de ce système. Nous ne pouvons, par contre, pas garantir la conservation de l'énergie (6.2.11) pour un système sujet à des forces intérieures a priori non conservatives. Nous pouvons donc énoncer la

Proposition 6.3.1. *Lors de tout processus de collision ou de désintégration, la masse totale est conservée (règle d'or “zéro”) :*

$$\boxed{M_{\text{in}} = M_{\text{out}}} \quad (6.3.4)$$

et l'**impulsion totale est conservée** (règle d'or “un”) :

$$\boxed{\vec{P}_{\text{in}} = \vec{P}_{\text{out}}} \quad (6.3.5)$$

Grâce à (6.3.4), on sait que

$$m_0 = m_1 + m_2. \quad (6.3.6)$$

Ce résultat, combiné à (6.3.5), donne immédiatement la relation suivante

$$\vec{v}_0 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.3.7)$$

L'énergie cinétique totale avant désintégration est, trivialement, $T_{\text{in}} = \frac{1}{2}m_0\|\vec{v}_0\|^2$; l'énergie cinétique totale après désintégration est : $T_{\text{out}} = \frac{1}{2}m_1\|\vec{v}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{v}_2\|^2$.

Il suit de (6.3.6) et (6.3.7) que $\Delta T := T_{\text{out}} - T_{\text{in}} = \frac{1}{2}m_1m_2/(m_1 + m_2)\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|^2$ ou, encore,⁸

$$\Delta E = E_{\text{out}} - E_{\text{in}} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 > 0 \quad (6.3.8)$$

en définissant la **masse réduite**

$$m := \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.3.9)$$

et en posant

$$\vec{v} := \vec{v}_1 - \vec{v}_2. \quad (6.3.10)$$

pour la **vitesse relative** des deux noyaux N_1 et N_2 .

Remarque 6.3.2. *La réaction de fission est exoénergétique (cf. (6.3.8)) ; c'est ce qui fonde le principe de fonctionnement des centrales nucléaires.*

8. On a, asymptotiquement, $E_{\text{in}} \cong T_{\text{in}}$ (longtemps avant la réaction) et $E_{\text{out}} \cong T_{\text{out}}$ (longtemps après la réaction). Les composants sont asymptotiquement libres car les forces nucléaires sont de courte portée.

Exercice 6.3.3. Appelons \mathcal{R}^* le référentiel du barycentre, cf. (6.2.20).

1. Montrer que la vitesse relative de \mathcal{R}^* et de \vec{R} est bien \vec{v}_0 .
2. Calculer les vitesses \vec{v}_1^* et \vec{v}_2^* de N_1 et N_2 dans ce référentiel.
3. En déduire les impulsions \vec{p}_1^* et \vec{p}_2^* en fonction de m et \vec{v} .
4. Justifier que le **défaut d'énergie** (6.3.8) est un **invariant** : $\Delta E = \Delta E^*$.

Démonstration. On a $\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ et $\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_0$, donc $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* = m\vec{v}$. Mais, puisque $\vec{v}_0^* = \vec{0}$ dans \vec{R}^* , on a $T_{\text{in}}^* = 0$. Or $T_{\text{out}}^* = \|\vec{p}_1^*\|^2/(2m_1) + \|\vec{p}_2^*\|^2/(2m_2)$ et donc $\Delta T^* = T_{\text{out}}^* - T_{\text{in}}^* = \frac{1}{2}m^2v^2(1/m_1 + 1/m_2) = \frac{1}{2}mv^2 = \Delta T$. Enfin, le défaut d'énergie $\Delta E = \Delta T$ est bien un invariant galiléen. \square

Exercice 6.3.4. Lors d'une fission de $N_0 = {}^{235}\text{U}$ en deux sous-noyaux de masses voisines, $m_1 = m_2$, on mesure $v = c\sqrt{\frac{2}{275}}$ où c représente la vitesse de la lumière dans le vide. Prendre $m_0 = 220 \text{ GeV}/c^2$ pour trouver la valeur de ΔE en GeV.

Démonstration. La masse réduite (6.3.9) est $m = \frac{1}{4}m_0$. On trouve, grâce à (6.3.8), $\Delta E = \frac{1}{2}mc^2(v/c)^2 = \frac{1}{8}m_0c^2(v/c)^2$, donc $\Delta E = \frac{1}{8}220 \text{ GeV} \frac{2}{275} = 0,2 \text{ GeV}$. \square

6.3.4 Jeu de billard

Nous étudions maintenant le cas de **collisions élastiques** pour lesquelles l'énergie totale est conservée à cause de **forces internes conservatives**. Outre les lois de conservation générales de la masse et de l'impulsion totales, nous aurons donc une loi de conservation supplémentaire donnée par la

Proposition 6.3.5. Lors de tout processus de collision élastique, les règles de conservation de la masse totale (6.3.4) et de l'impulsion totale (6.3.5), l'**énergie totale est conservée** (règle d'or “deux”) :

$$\boxed{E_{\text{in}} = E_{\text{out}}} \quad (6.3.11)$$

Donnons, pour illustrer ce cas, l'exemple typique du billard mettant en jeu des forces internes conservatives (forces de déformation élastique).

Point de vue du laboratoire

Une boule de billard, de vitesse \vec{v}_1 et de masse m_1 dans un référentiel \mathcal{R} (référentiel du “laboratoire”⁹) entre en collision avec une boule de masse m_2 , au repos.

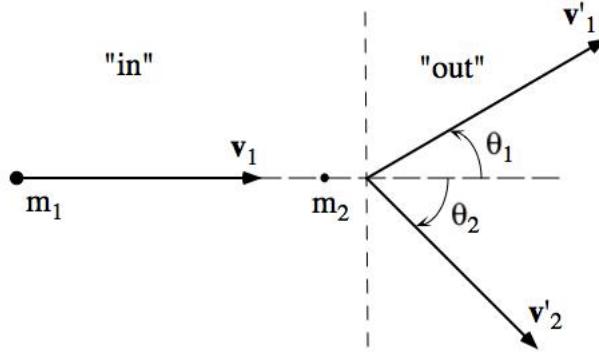


FIGURE 6.3 – Collision élastique vue du “laboratoire”

Nous nous proposons de déterminer les valeurs possibles des vitesses d’éjection \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 des deux boules après collision (voir Fig. 6.3). Nous discuterons, en particulier, les valeurs permises pour les angles de diffusion θ_1 et θ_2 selon le rapport des masses m_1/m_2 des deux boules de billard.

L’expérience apprend que la collision se décrit très simplement dans le référentiel \mathcal{R}^* du barycentre, déduit du référentiel \mathcal{R} du laboratoire par un boost de vitesse

$$\vec{v}_0 = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (6.3.12)$$

En effet, la vitesse (6.2.21) du barycentre est $\vec{v}_0 = \vec{P}/M = \vec{P}_1/(m_1 + m_2)$, car $\vec{P}_2 = \vec{0}$.

Point de vue du barycentre

Grâce à la loi (1.3.13) de transformation des vitesses sous un boost galiléen, on trouve dans le cas (6.3.12) :

$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (6.3.13)$$

$$\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_0 = \frac{-m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (6.3.14)$$

et on vérifie que l’on a bien $\vec{P}_1^* + \vec{P}_2^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0}$, en accord avec (6.2.20).

9. Il faudrait plutôt parler de la salle de jeu.

Notons par $P_i^* = \|\vec{P}_i^*\|$ et par $P_i'^* = \|\vec{P}_i'^*\|$ les normes des impulsions avant et après le choc, $i = 1, 2$.

Proposition 6.3.6. *Les normes des impulsions sont égales dans le barycentre :*

$$P_1^* = P_2^* = P_1'^* = P_2'^* (= P^*). \quad (6.3.15)$$

Démonstration. La règle d'or (6.3.4) est trivialement vérifiée, la loi (6.3.5) de conservation de l'impulsion s'écrit ici

$$\vec{P}_1^* + \vec{P}_2^* = \vec{P}_1'^* + \vec{P}_2'^* = \vec{0}. \quad (6.3.16)$$

On a, dans l'état “in”, $\vec{P}_1^* = -\vec{P}_2^*$ et donc, en norme, $P_1^* = P_2^*$. Dans l'état “out”, on aura de même $\vec{P}_1'^* = -\vec{P}_2'^*$, et donc $P_1'^* = P_2'^*$.

Mais, la règle d'or (6.3.11) livre une information supplémentaire :

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= \frac{(P_1^*)^2}{2m_1} + \frac{(P_2^*)^2}{2m_2} = \frac{(P_1^*)^2}{2m} \\ &\parallel \\ E_{\text{out}} &= \frac{(\vec{P}_1'^*)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{P}_2'^*)^2}{2m_2} = \frac{(\vec{P}_1'^*)^2}{2m} \end{aligned}$$

où m désigne la masse réduite (6.3.9). On en déduit $P_1^* = P_1'^*$, ce qui achève la démonstration. \square

Nous avons donc la figure de diffusion suivante (cf. Fig. 6.4) dans le référentiel du “barycentre” (ou du “centre de masse”) dans laquelle l'**angle de diffusion** θ_1^* dans le centre de masse reste **arbitraire**.

Retour au laboratoire

Nous donnons maintenant (cf. les formules (6.3.13) et (6.3.14)) les vitesses des particules, après le choc, dans le référentiel, \mathcal{R} , du laboratoire. Nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \vec{v}'_1^* + \vec{v}_0 \\ \vec{v}'_2 &= \vec{v}'_2^* + \vec{v}_0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\vec{P}'_1 = \vec{P}'_1^* + m_1 \vec{v}_0 \quad (6.3.17)$$

$$\vec{P}'_2 = \vec{P}'_2^* + m_2 \vec{v}_0. \quad (6.3.18)$$

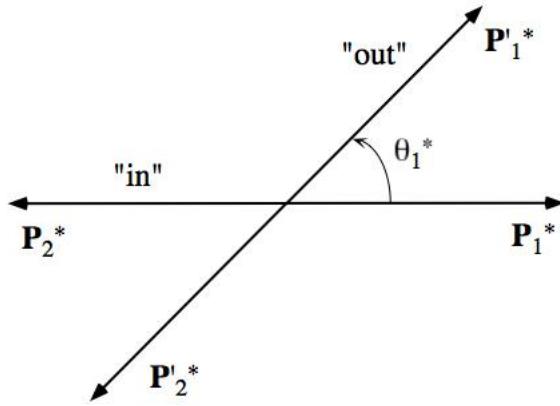


FIGURE 6.4 – Collision élastique vue du “centre de masse”

Grâce à (6.3.13), on a trivialement $P^* = m v_1$ où m est la masse réduite (6.3.9) du système et v_1 la norme de la vitesse

$$\vec{v}_1 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la boule incidente.

Connaissant la vitesse \vec{v}_0 du centre de masse donnée par (6.3.12), nous obtenons

$$\vec{P}'_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_2 \cos \theta_1^* + m_1 \\ m_2 \sin \theta_1^* \end{pmatrix} \quad (6.3.19)$$

$$\vec{P}'_2 = m v_1 \begin{pmatrix} -\cos \theta_1^* + 1 \\ -\sin \theta_1^* \end{pmatrix} \quad (6.3.20)$$

avec

$$\theta_1^* \in [0, \pi]. \quad (6.3.21)$$

Exercice 6.3.7. Quelles sont les valeurs des masses m_1 et m_2 qui permettent d'avoir un “carreau” ? Quelle est l’impulsion de la boule “cible” après un carreau ?

Démonstration. Dans un carreau, la particule incidente se retrouve à l’arrêt après collision : $\vec{P}'_1 = \vec{0}$. On tire de (6.3.19) : (i) $m_2 \cos \theta_1^* + m_1 = 0$ et (ii) $\sin \theta_1^* = 0$, c’est-à-dire $\theta_1^* = 0 \pmod{\pi}$. La solution $\theta_1^* = 0$ est inadmissible car cela conduirait à $m_1 + m_2 = 0$. Il ne reste que la solution $\theta_1^* = \pi$, complétée par $m_1 - m_2 = 0$. Le carreau n’est possible qu’avec des boules de même masse : $m_1 = m_2$.

On aura, alors, grâce à (6.3.20) :

$$\vec{P}'_2 = \vec{P}_1$$

conformément la règle d'or (6.3.5). \square

Proposition 6.3.8. *L'angle de diffusion θ_1 (voir Fig. (6.3)) de la boule incidente, dans le laboratoire, prend les valeurs suivantes :*

- $m_1 < m_2$: on a, dans ce cas, toutes les valeurs $0 \leq \theta_1 \leq \pi$,
- $m_1 = m_2$: seules sont permises les valeurs $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$,
- $m_1 > m_2$: on a, dans ce cas, $0 \leq \theta_1 \leq \theta_1^{\max}$ où

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (6.3.22)$$

est l'**angle limite** de diffusion dans le laboratoire.

Démonstration. La preuve utilise les expressions (6.3.17) et (6.3.18) dans les trois diagrammes représentés dans les Fig. 6.5, 6.6, 6.7.

On remarque que l'angle limite θ_1^{\max} est bien atteint (uniquement si $m_1 > m_2$!) quand l'impulsion \vec{P}'_1 est tangente au cercle de rayon P^* . On a alors, dans ce cas, $\sin \theta_1^{\max} = P^*/(m_1 v_0) = m_1 m_2 v_1 / (m_1^2 v_1) = m_2 / m_1$. \square

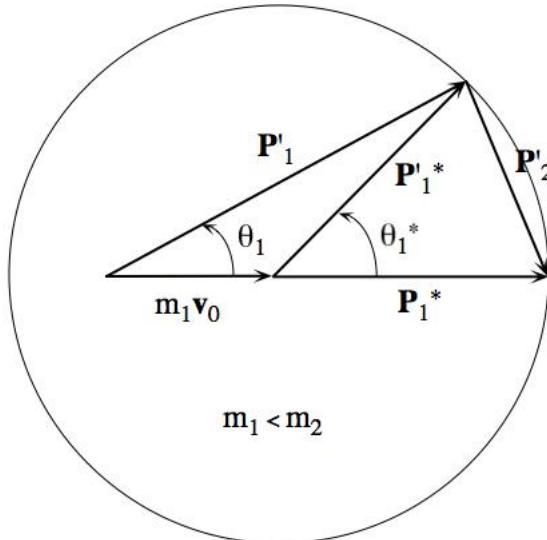


FIGURE 6.5 – Boule cible plus massive

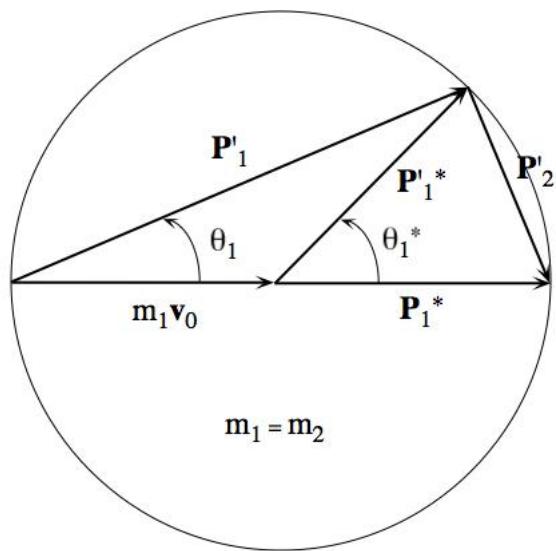


FIGURE 6.6 – Boules de même masse

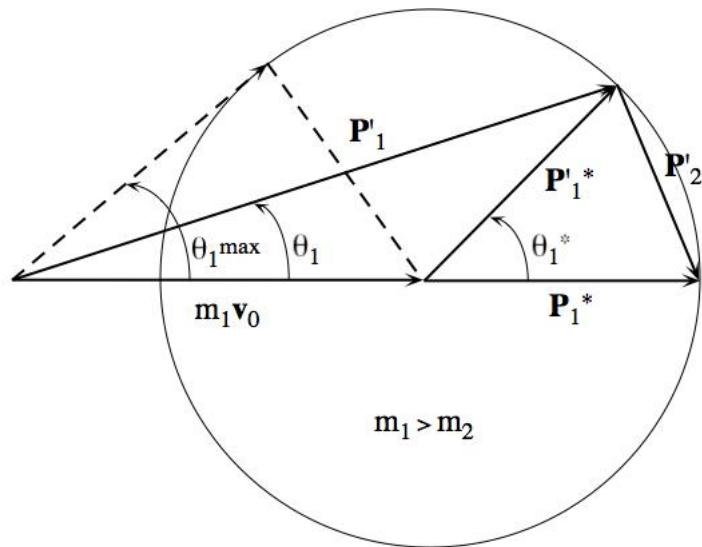


FIGURE 6.7 – Boule incidente plus massive

Chapitre 7

La gravitation

7.1 Le champ newtonien

7.1.1 Le triomphe de la mécanique céleste

Nous présenterons dans ce chapitre la théorie du champ gravitationnel due à Isaac Newton (voir la Section 7.1.2) dans un langage adapté au formalisme moderne de la théorie des champs.

Nous traiterons ensuite, en assez grand détail, du mouvement des **deux** corps (le système Terre-Soleil par exemple) en **interaction gravitationnelle** mutuelle : problème complètement résoluble de manière élémentaire.¹ Deux méthodes (parmi d'autres) seront présentées :

1. l'intégration des équations du mouvement par intégration de l'équation radiale de Binet,
2. la mise en évidence d'une constante du mouvement “accidentelle” \vec{e} : vecteur de Lagrange-Laplace-Runge-Lenz.

La présence de cette constante du mouvement vectorielle supplémentaire, \vec{e} , (outre le moment angulaire, \vec{L} , que nous connaissons déjà, cf. (4.4.11)) dans le cas d'un champ invariant par rotations d'espace \mathbf{R}^3) sera systématiquement exploitée pour décrire les trajectoires des deux corps. Signalons que les deux constantes du

1. La détermination de l'ensemble des mouvements du système à trois corps, par exemple le système Soleil-Terre-Lune, est hautement non triviale. Seules quelques solutions exactes, très particulières, sont actuellement connues (planètes “troyennes” de Lagrange gravitant aux sommets d'un triangle équilatéral, . . . , solutions en poursuite sur des “courbes en huit” trouvées très récemment (C. Moore, A. Chenciner & R. Montgomery)). Dans le cas général, le calcul numérique s'impose !

mouvement \vec{L} & \vec{e} sont révélatrices d'une plus grande symétrie du problème à deux corps, à savoir l'invariance des équations du mouvement sous les rotations d'un espace \mathbf{R}^4 abstrait. Wolfgang Pauli² explique la dégénérescence spécifique des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène (proton et électron interagissant de manière coulombienne³) par cette symétrie accidentelle. Cette découverte est de première importance en chimie quantique car elle justifie la structure générale du tableau de Mendeleiev.

On sait que la découverte de Newton, à savoir la loi de la gravitation universelle, a permis de déterminer le mouvement des planètes avec une très grande précision dès le XVIII-ème siècle (calcul des éphémérides⁴ du système solaire). C'est avec la découverte *théorique*, par Urbain Le Verrier, d'une nouvelle planète (mémoire de l'Académie des Sciences du 31 août 1846) que fut confirmée de manière éclatante la théorie newtonienne : en effet, l'astronome J. G. Galle (Observatoire de Berlin) confirma immédiatement l'existence de *Neptune* à la position prédicta par Le Verrier.⁵

Actuellement on étudie, grâce à la puissance de calcul parallèle disponible pour les simulations numériques, la formation et l'évolution des galaxies et des amas de galaxies en ayant (toujours) recours à la théorie newtonienne.

Signalons enfin que c'est dans ce même cadre que fut introduite la notion de "trou noir" par Pierre-Simon Laplace dans son ouvrage "Exposition du Système du Monde", en ...1796. Nous rappellerons aussi cette découverte étonnante.

7.1.2 Repères historiques

"Newton dut son succès non au calcul infinitésimal et à la gravitation mais à la beauté de sa nièce [Catherine Barton]."

Voltaire (1720)

– Robert Hooke (1635-1703) : curateur à la Royal Society. Scientifique au savoir encyclopédique : découverte des anneaux de ...Newton, des cellules végétales,

2. Physicien suisse d'origine autrichienne (1900–1958), prix Nobel 1945.

3. Nous verrons que le champ électrique coulombien est du même type que le champ newtonien.

4. Ce sont les tables donnant la position des astres en un lieu et à une heure donnés ; par exemple, celles du Bureau des Longitudes (créé par la Convention, le 7 messidor an III (25 juin 1795)).

5. "Monsieur, la planète dont vous nous avez signalé la position réellement existe ..." "

des taches de Jupiter, de la loi de l'élasticité qui porte son nom, etc. Hooke suggère à Newton une loi de force gravitationnelle en $1/r^2$ dès 1679-80 (échange de courrier). Pas de preuve mathématique : estimations qualitatives et expériences numériques conduisant à des trajectoires planétaires “elliptoïdales”.

- Isaac Newton (1642-1727) rend public, après des années de calcul, le manuscrit des *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* le 28 avril 1686 lors d'une séance de la Royal Society. Newton ne fournit pas de citation de Hooke : Edmund Halley (1656-1742) intercède auprès de Newton ; il publiera (à son compte) les “Principia”. Newton prouve :

1. que les lois de Kepler : KI (trajectoires elliptiques des planètes), KII (loi des aires) et KIII ($a^3/T^2 = \text{const.}$) impliquent nécessairement une force centrale $F \propto 1/r^2$ en utilisant des résultats de géométrie élémentaires (propriétés des sections coniques d'Appolonius).
2. que, réciproquement, sa loi de force centrale redonne comme trajectoires particulières les ellipses képlériennes et, plus généralement, des branches de sections coniques (mouvements de diffusion des comètes). Genèse du calcul différentiel. La preuve du théorème d'unicité de la solution des équations de Newton : $\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}/r^3$ pour des conditions initiales fixées est due à Johann Bernoulli.

7.1.3 Equations de champ

Newton a déduit des lois de Kepler l'expression de la **force d'attraction gravitationnelle** exercée sur une masse d'épreuve m_1 localisée en \vec{r}_1 par une masse ponctuelle m_2 localisée en \vec{r}_2 :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} [\vec{r}_1 - \vec{r}_2] \quad (7.1.1)$$

où

$$G = 6,67259(85) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (7.1.2)$$

désigne la constante de couplage gravitationnel de Newton.

Supposons $m_2 \gg m_1$ et admettons, pour simplifier, que le centre attracteur puisse être pris pour origine “fixe”, $\vec{r}_2 = \vec{0}$, de telle sorte que si $M = m_2$ et $m = m_1$,

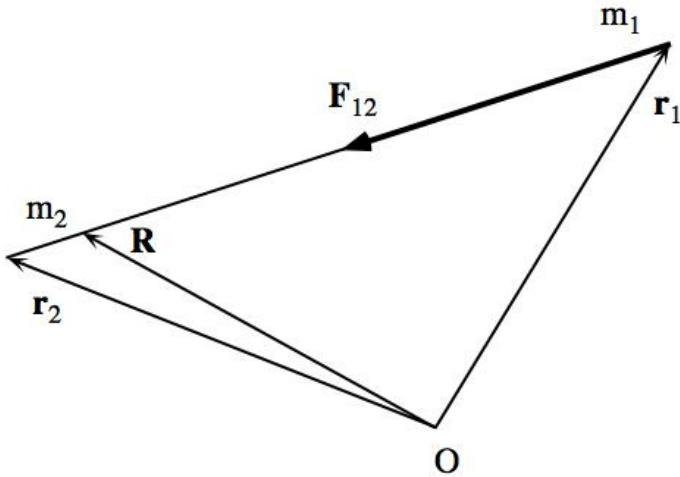


FIGURE 7.1 – Force newtonienne

la force exercée en $\vec{r} = \vec{r}_1$ prenne la forme

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}. \quad (7.1.3)$$

On dit que \vec{g} est le **champ d'accélération de la pesanteur**⁶ créé par la masse M située à l'origine. Il s'agit ici d'un champ de gravitation très particulier : celui créé par une source ponctuelle (toute la masse M est concentrée à l'origine). Par contre, le champ de gravitation engendré par une distribution de masse générale (par exemple les objets célestes du système solaire) est de nature beaucoup plus complexe. En fait, le champ de gravitation est lui-même gouverné par des équations (aux dérivées partielles) appelées **équations de champ de Newton** qui sont données par le⁷

Principe 7.1.1. *Le champ de gravitation \vec{g} engendré par une distribution de masse de densité ϱ est régi par les équations suivantes⁸*

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0} \quad \& \quad \operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G\varrho} \quad (7.1.4)$$

6. Ce champ de vecteurs $\vec{r} \mapsto \vec{g}$ est défini et différentiable dans $\mathbf{R}^3 - \{0\}$. Attention : l'accélération de la pesanteur n'est pas une quantité vectorielle de l'espace-temps ! On peut, en effet, l'annuler par passage à un référentiel (d'espace-temps) en chute libre, par exemple sur la station spatiale ISS ; ceci serait impossible pour le champ électro-magnétique qui est, lui, de nature "vectorielle".

7. Cf. la définition (4.1.16) du rotationnel et (4.1.19) de la divergence d'un champ de vecteurs.

8. On pourrait éventuellement rajouter la constante cosmologique, Λ , aux sources du champ de gravitation : $\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G\varrho + \Lambda$.

Notons que le champ de pesanteur \vec{g} peut parfaitement dépendre du temps par l'intermédiaire de la densité ϱ des sources figurant dans les équations de champ (7.1.4). C'est le cas, par exemple, du champ de gravitation créé par une étoile de masse variable dans le temps (explosion, accrétion, etc.).

Nous voyons, grâce au résultat fondamental (4.1.18) que la première équation de champ (7.1.4) entraîne que (localement)

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}} U \quad (7.1.5)$$

où la fonction $U(\vec{r}, t)$ est le **potentiel** d'accélération de la pesanteur (défini à une constante additive près).

Signalons, pour mémoire, que la deuxième équation de champ (7.1.4) entraîne l'*équation de Poisson* pour le potentiel de gravitation U , à savoir

$$\Delta U = 4\pi G \varrho \quad (7.1.6)$$

où $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$ est l'opérateur différentiel du second ordre appelé communément “laplacien”.⁹

Exercice 7.1.2. Vérifier que $\Delta(1/r) = 0$ pour tout $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$.

Champ newtonien à symétrie sphérique

On déduit immédiatement de l'exercice 7.1.2 que le **potentiel newtonien**

$$U = -\frac{GM}{r} \quad (7.1.7)$$

dont dérive, en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$, le champ de pesanteur (7.1.3) est bien solution de l'équation de Poisson (7.1.6) dans le vide (où $\varrho = 0$) qui entoure une masse ponctuelle M localisée à l'origine.

Remarque 7.1.3. On pourrait, réciproquement, montrer que le potentiel newtonien (7.1.7) constitue effectivement le **seul** potentiel de gravitation à symétrie sphérique dans le vide, nul à l'infini. Exercice !

9. La définition intrinsèque du laplacien est $\Delta = \text{div} \circ \overrightarrow{\text{grad}}$.

On vérifie que la dimension physique du potentiel U de la pesanteur (cf. (7.1.5)) est $[U] = L^2 T^{-2}$; la quantité suivante

$$V = mU \quad (7.1.8)$$

est donc homogène à une énergie : $[V] = ML^2 T^{-2}$; c'est l'**énergie potentielle** d'une particule de masse m plongée dans le champ de gravitation \vec{g} dérivant du potentiel U .

Dans le cas particulier du potentiel newtonien (7.1.7), cette énergie potentielle prend la forme célèbre

$$V = -\frac{GMm}{r} \quad (7.1.9)$$

Donnons maintenant un autre exemple de champ à symétrie sphérique contraint à s'annuler, cette fois-ci, à l'origine.

Exercice 7.1.4. Vérifier que

$$\vec{g} = \lambda \vec{r}, \quad \lambda = \text{const.} \quad (7.1.10)$$

est solution des équations de champ (7.1.4) dans un milieu de densité $\varrho = \text{const.}$ En déduire le champ de pesanteur à l'intérieur d'un nuage galactique sphérique de rayon R , de densité constante et de masse M .

Démonstration. On sait que $\operatorname{rot} \vec{r} = \vec{0}$, d'où $\operatorname{rot} \vec{g} = \vec{0}$. On a, de plus, $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ et donc $\operatorname{div}(\lambda \vec{r}) = 3\lambda = -4\pi G \varrho = \text{const.}$ Ainsi,

$$\lambda = -\frac{4}{3}\pi G \varrho = -\frac{GM}{R^3} \quad (7.1.11)$$

si on introduit la masse $M = (4/3)\pi R^3 \varrho$ du nuage galactique. \square

Nous venons donc — grâce à (7.1.3) ainsi que (7.1.10) et (7.1.11) — de déterminer, en tout point de l'espace, le champ de gravitation

$$\vec{g} = \begin{cases} -\frac{GM}{R^3} \vec{r} & (0 \leq r \leq R) \\ -\frac{GM}{r^3} \vec{r} & (r > R) \end{cases} \quad (7.1.12)$$

créé par une distribution matérielle sphérique, de rayon R , de densité constante et de masse M .

Remarque 7.1.5. La **solution intérieure** est bien définie partout ($0 \leq r \leq R$), en particulier à l'origine où . . . elle s'annule. Nous verrons au Chapitre 8.1.2 qu'elle correspond, en fait, à l'accélération d'un **oscillateur harmonique**.

Energie potentielle au voisinage de la surface d'un astre

Nous nous proposons de retrouver l'expression *bien connue*

$$V \cong mgz \quad (7.1.13)$$

de l'énergie potentielle d'une particule de masse m soumise au champ de pesanteur d'intensité g , à l'*altitude* z au **voisinage de la surface d'un astre** — à symétrie sphérique, de rayon R et de masse M . Montrons que cette formule constitue en fait une **approximation** de la formule “exacte” (7.1.9) pour les faibles altitudes $z \ll R$.

Nous trouvons d'abord grâce à (7.1.12) que l'intensité $g = \|\vec{g}\|$ de l'accélération de la pesanteur à la surface du corps céleste (où $r = R$) prend la forme exacte

$$g = \frac{GM}{R^2}. \quad (7.1.14)$$

La distance du point matériel au centre de l'astre étant $r = R + z$, nous déduisons de (7.1.9) que $V = -GMm/(R + z) = -(GMm/R)(1 + z/R)^{-1}$. L'approximation élémentaire $(1 + \varepsilon)^n \cong 1 + n\varepsilon$, au premier ordre en ε , entraîne $V \cong -GMm/R + GMmz/R^2$. Nous obtenons enfin $V \cong mgz - GMm/R$ grâce à (7.1.14), c'est-à-dire l'expression recherchée (7.1.13) à une constante additive près que l'on ignorera.

7.2 Le problème à 2-corps

7.2.1 La décomposition barycentrique

Le Principe fondamental de la dynamique (3.1.2), celui de l'action et de la réaction (3.1.3) et l'expression de la force de gravitation (7.1.3) entraînent les équations du mouvement suivantes pour deux corps de masses m_1 et m_2 localisés en $\vec{r}_1(t)$

et $\vec{r}_2(t)$ à chaque instant t :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} & = & \vec{F}_{12} = -\frac{K}{r^3} [\vec{r}_1 - \vec{r}_2] \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} & = & \vec{F}_{21} = -\frac{K}{r^3} [\vec{r}_2 - \vec{r}_1] \\ \frac{d\vec{r}_1}{dt} & = & \vec{v}_1 \\ \frac{d\vec{r}_2}{dt} & = & \vec{v}_2 \end{array} \right. \quad (7.2.1)$$

où l'on a posé

$$K := Gm_1m_2 \quad (7.2.2)$$

ainsi que

$$r := \|\vec{r}\| \quad \text{où} \quad \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (7.2.3)$$

Nous avons, d'autre part, déjà vu que pour tout problème à N -corps il est intéressant d'introduire le **barycentre** qui prend ici, pour $N = 2$, la forme

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad (7.2.4)$$

où l'on a introduit la **masse totale**

$$M = m_1 + m_2 \quad (7.2.5)$$

Notre système étant un système *isolé*, on sait (cf. le Corollaire 6.2.6 dans le chapitre concernant les systèmes isolés) que le barycentre \vec{R} est animé d'un mouvement rectiligne uniforme au cours du temps :

$$\vec{R}(t) = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0 \quad (7.2.6)$$

avec $\vec{R}_0 = \vec{R}(0)$ et $\vec{V}_0 = \dot{\vec{R}}(0)$.

En définissant comme en (7.2.3) la **position relative**, \vec{r} , des deux corps, on voit que la configuration du système est déterminée soit par leurs positions (\vec{r}_1, \vec{r}_2) , soit par le couple (\vec{R}, \vec{r}) . Les formules de passage sont données par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{R} & = & \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} & = & \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \right. \quad (7.2.7)$$

et les formules inverses par

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}. \end{cases} \quad (7.2.8)$$

Nous pouvons maintenant, grâce au résultat intéressant (7.2.6), simplifier le problème ; le mouvement des deux corps se décompose en le **mouvement rectiligne uniforme du barycentre**, $\vec{R}(t)$, et le **mouvement autour du barycentre** décrit par $\vec{r}(t)$.

On trouve alors, via (7.2.1) et (7.2.3), l'**accélération relative** des deux corps

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \frac{1}{m_1} \left(-\frac{K \vec{r}}{r^3} \right) - \frac{1}{m_2} \left(\frac{K \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{K \vec{r}}{r^3} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \\ &= -\frac{1}{m} \frac{K \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

avec la définition suivante

$$m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.2.9)$$

de la **masse réduite** du système.

Nous venons de prouver la

Proposition 7.2.1. *Les équations du mouvement des deux corps s'écrivent, après décomposition barycentrique, de la manière suivante*

$$\begin{cases} M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{0} \\ m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^3} \vec{r}. \end{cases} \quad (7.2.10)$$

Nous avons ainsi ramené l'étude du problème des deux corps à celle du mouvement d'**un** seul corps “fictif” de masse m (la masse réduite) plongé dans le champ gravitationnel extérieur créé par une masse M (la masse totale) localisée à l’“origine”, $r = 0$; on a en, effet,

$$K = Gm_1 m_2 = GMm. \quad (7.2.11)$$

Remarque 7.2.2. Dans le cas où $m_1 \ll m_2$ (par exemple si m_1 représente la masse de la Terre et m_2 celle du Soleil), on a les approximations suivantes (voir Fig. 7.1) :

$$M \cong m_2, \quad m \cong m_1 \quad \text{et} \quad \vec{R} \cong \vec{r}_2, \quad \vec{r} \cong \vec{r}_1 - \vec{R}. \quad (7.2.12)$$

7.2.2 Intégration par la méthode de Binet

Déterminons maintenant les trajectoires des deux corps, solutions des équations du mouvement (7.2.10).

Nous savons que le **moment angulaire** d'une particule dans un champ central est une **constante du mouvement** très utile (cf. (4.4.11)) :

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (7.2.13)$$

Le mouvement est donc plan, $\vec{r}(t) \perp \vec{L}$ à chaque instant t , si $\vec{L} \neq \vec{0}$ (ce que nous supposerons, sauf mention contraire). La trajectoire est toute entière contenue dans le plan \vec{L}^\perp (perpendiculaire à \vec{L} , cf. Fig. 7.2) choisi comme le plan $z = 0$, paramétré par les coordonnées polaires (r, θ) de sorte que

$$\vec{L} = L \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad L = mr^2\dot{\theta} = \text{const.} \quad (7.2.14)$$

Proposition 7.2.3 (Newton). *Dans tout mouvement plan, la loi des aires est satisfaite si et seulement si l'accélération est radiale, en particulier centrale.*

Démonstration. L'accélération en coordonnées polaires, dans le plan de l'orbite, est donnée par $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$ avec $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ (voir (3.2.16)). Enfin, puisque $a_\theta = r^{-1}d(r^2\dot{\theta})/dt$, l'accélération est radiale ($a_\theta = 0$) ssi $r^2\dot{\theta} = \text{const.}$ □

C'est cette proposition qui a mis Newton sur la voie de la loi (7.1.3) pour le champ de gravitation.

Nous avons maintenant $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (cf. (3.2.16)) et, grâce à la loi des aires $L = \text{const.}$ (7.2.14), l'accélération prend la forme

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right] \vec{e}_r. \quad (7.2.15)$$

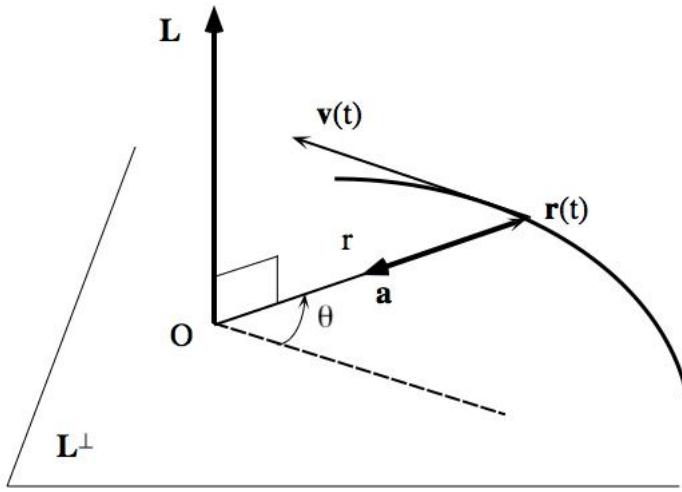


FIGURE 7.2 – Trajectoire newtonienne

Les équations de Newton (7.2.10) entraînent alors l'**équation radiale**

$$\boxed{\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} = -\frac{K}{mr^2}} \quad (7.2.16)$$

avec $K = GMm$, cf. page 121. C'est cette équation différentielle *non linéaire* que nous nous proposons d'intégrer.

Donnons d'abord un résultat élémentaire et ... utile.

Proposition 7.2.4. *Les équations du mouvement autour du barycentre admettent, si $L \neq 0$, des solutions particulières en **mouvements circulaires uniformes** :*

$$r(t) = a \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (7.2.17)$$

avec

$$L = ma^2\omega \quad \text{et} \quad \omega^2 a^3 = GM. \quad (7.2.18)$$

Démonstration. S'il existe bien des solutions en mouvements circulaires, de rayon $r(t) =: a$, la vitesse angulaire $\dot{\theta} = L/(ma^2) =: \omega$ est nécessairement constante grâce à la loi des aires. On a donc $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ où θ_0 est une constante d'intégration. Mais (7.2.16) entraine $L^2/(m^2 a^3) = K/(ma^2)$, i.e. $(ma^2\omega)^2/(m^2 a^3) = GMm/(ma^2)$; d'où la troisième loi de Kepler $\omega^2 a^3 = GM$ (spécialisée aux orbites circulaires) comme condition nécessaire et suffisante d'existence de ces solutions. \square

Traitons maintenant du cas général et prenons — judicieusement — comme nouveau paramètre l'angle θ plutôt que le temps t .¹⁰

Puisque $r \neq 0$, définissons avec Binet :

$$u := \frac{1}{r} \quad (7.2.19)$$

de sorte que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{dr^{-1}}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\theta}} = -\frac{m\dot{r}}{L}.$$

On a de même, grâce au résultat précédent, l'expression

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{m\dot{r}}{L} \right) \frac{dt}{d\theta} = -\frac{m\ddot{r}}{L\dot{\theta}} = -\frac{m^2 r^2 \ddot{r}}{L^2}. \quad (7.2.20)$$

Mais l'équation radiale (7.2.16) peut aussi s'écrire

$$-\frac{m^2 r^2 \ddot{r}}{L^2} + \frac{1}{r} = \frac{mK}{L^2}$$

et prend finalement, grâce à (7.2.20), la forme de l'**équation de Binet**

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mK}{L^2}} \quad (7.2.21)$$

c'est-à-dire d'une équation différentielle affine du second ordre à coefficients constants qui s'intègre de manière . . . élémentaire.

La solution générale de l'équation de Binet (7.2.21) est, voir (2.1.15), de la forme

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{mK}{L^2}$$

où $A \geq 0$ et θ_0 sont deux constantes d'intégration. On peut, pour alléger l'écriture sans restreindre la généralité, annuler la constante θ_0 par un changement d'origine des angles ; en posant

$$\boxed{p := \frac{L^2}{mK}} \quad (7.2.22)$$

on trouve $u = 1/r = 1/p + A \cos \theta$, c'est-à-dire $1/r = (1 + e \cos \theta)/p$ en ayant redéfini $A =: e/p$.

10. Nous savons que θ est une fonction monotone de t puisque $d\theta/dt = L/(mr^2) \neq 0$; il est donc permis de faire le changement de variable $t \mapsto \theta$ qui est bien inversible.

Proposition 7.2.5. *La trajectoire associée à toute solution de l'équation du mouvement newtonien autour du barycentre a pour équation paramétrique*

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec} \quad (p > 0, e \geq 0) \quad (7.2.23)$$

Cette trajectoire est une **conique**, à savoir une¹¹

- **ellipse** $(0 \leq e < 1)$
- **parabole** $(e = 1)$
- **branche d'hyperbole** $(e > 1)$

paramétrée par l'angle polaire θ et ayant pour centre, $r = 0$, l'un des foyers.¹²

La constante $p = r(\pi/2)$, homogène à une longueur, est appelée **paramètre** de la conique ; elle s'exprime en terme de grandeurs physiques comme le moment angulaire L et les masses m_1 et m_2 par la formule (7.2.22).

La deuxième constante $e \geq 0$ (sans dimension !) est l'**excentricité** de la conique ; nous allons voir dans la Section 7.2.6 qu'elle est, elle aussi, reliée à des quantités physiques, constantes du mouvement, notamment l'énergie du système.

Remarque 7.2.6. *Les seules orbites fermées sont les ellipses (e.g. les trajectoires des planètes du système solaire) qui sont associées à des mouvements périodiques. Les orbites circulaires ($e = 0$) en sont des cas particuliers. Toutes les autres orbites (paraboles, branches d'hyperboles) sont non fermées.*

7.2.3 Intermezzo : l'ellipse

Arrêtons nous un instant sur les propriétés de l'ellipse, courbe fermée importante en géométrie et en ...mécanique céleste.

L'équation paramétrique (7.2.23) de l'ellipse ($0 \leq e < 1$) montre clairement l'existence d'une distance minimale

$$r_{\min} = r(0) = \frac{p}{1 + e} \quad (7.2.24)$$

11. Se reporter à la Fig. 7.3.

12. Le foyer est unique dans le cas de la parabole.

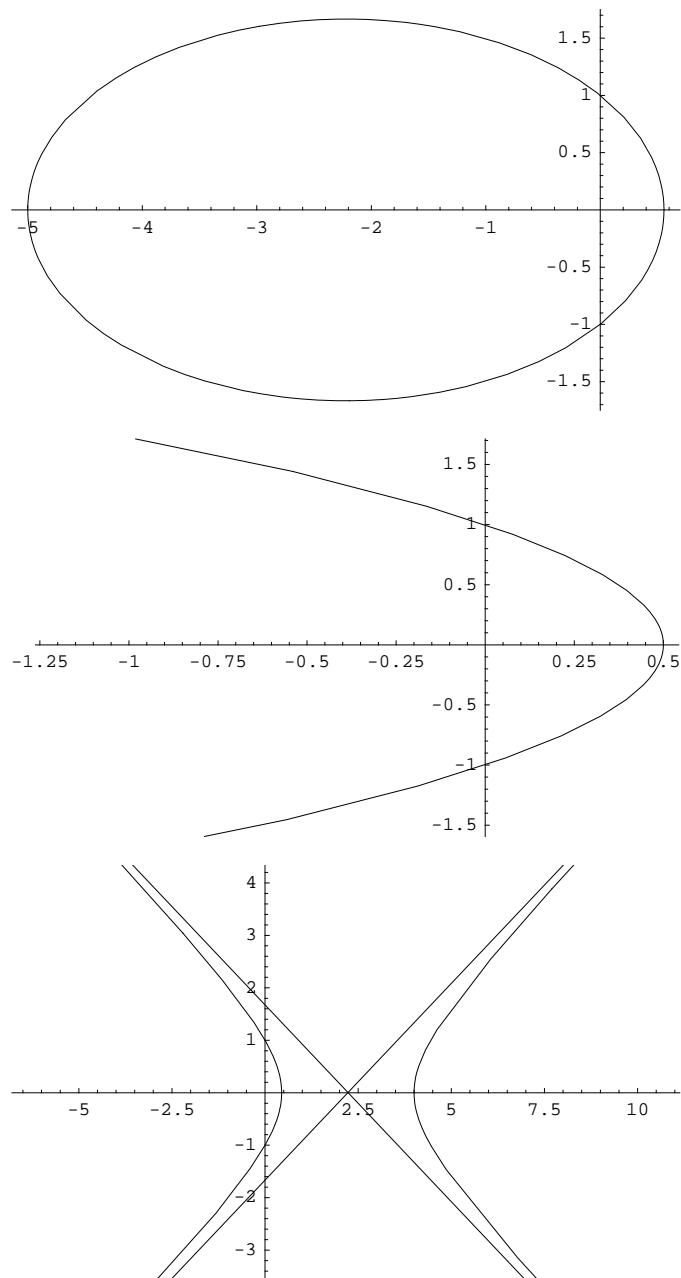


FIGURE 7.3 – Ellipse, parabole & hyperbole

ainsi que d'une distance maximale

$$r_{\max} = r(\pi) = \frac{p}{1 - e} \quad (7.2.25)$$

au centre attracteur.

Le point à distance minimale s'appelle **périastre**, et celui à distance maximale, **apoastre**.¹³

Définition-Théorème 7.2.1. *On appelle **demi-grand axe** la moyenne suivante $a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max})$ qui est donc donnée par*

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (7.2.26)$$

Considérons la figure suivante (Fig. 7.4) pour définir une autre grandeur caractéristique de l'ellipse.

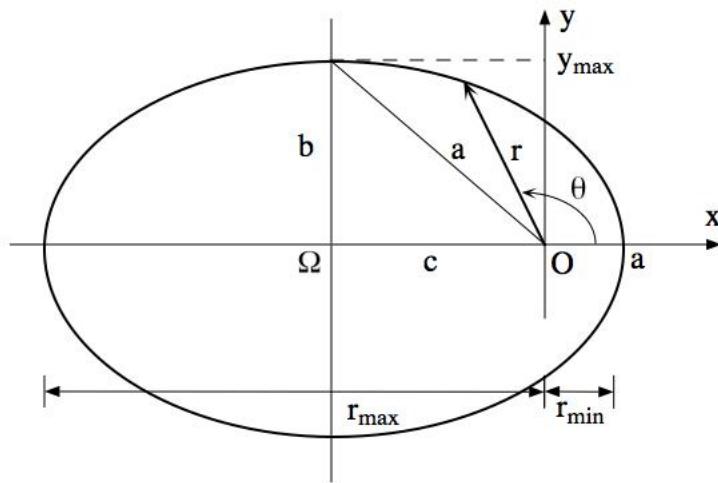


FIGURE 7.4 – L'ellipse

Définition-Théorème 7.2.2. *On appelle **demi-petit axe** la quantité $b = y_{\max}$ qui est donnée par*

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (7.2.27)$$

13. Si le centre attracteur est le Soleil, nous parlerons de "périhélie" et d'"aphélie" ; dans le cas de la Terre, de "périgée" et d'"apogée".

Démonstration. Puisque $y = r(\theta) \sin \theta = p \sin \theta / (1 + e \cos \theta)$, on trouve donc que $dy/d\theta = p(\cos \theta + e)/(1 + e \cos \theta)^2$ s'annule en $\theta = \theta_1$ tel que $\cos \theta_1 = -e$. En choisissant $\frac{1}{2}\pi \leq \theta_1 < \pi$, on trouve $y_{\max} = p\sqrt{1-e^2}/(1-e^2)$. \square

Le centre de l'ellipse est le point Ω distant de $c = a - r_{\min}$ du foyer O (cf. Fig. 7.4) ; on trouve aisément, grâce à (7.2.26) et (7.2.24),

$$c = ae \quad (7.2.28)$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (7.2.29)$$

7.2.4 Lien entre énergie et excentricité

Nous savons déjà que la force dans le membre de droite de (7.2.10) dérive du potentiel (7.1.8) donné par (7.1.7), c'est-à-dire

$$V(r) = -\frac{K}{r} \quad (7.2.30)$$

et donc que l'énergie totale est (cf. Théorème 4.3.1) une constante du mouvement

$$E = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \frac{K}{r} = \text{const.} \quad (7.2.31)$$

Sachant qu'en coordonnées polaires dans le plan de l'orbite on a $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, on trouve $\|\vec{v}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$; en utilisant l'expression (7.2.14) du moment angulaire L , il vient

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad V_{\text{eff}}(r) := \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}} \quad (7.2.32)$$

On est ainsi ramené à un problème à un degré de liberté : étudier le mouvement d'un point matériel de masse m sur la demi-droite ($r > 0$), plongé dans le potentiel extérieur $V_{\text{eff}}(r)$ dont le graphe est donné par la Fig. 7.5.¹⁴

Notons que l'on a trivialement $E - V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ et donc deux types de mouvements comme cela apparaît clairement sur la Fig. 7.5 : le domaine de variation de r correspond à la région $E \geq V_{\text{eff}}(r)$.

14. Ce potentiel est la superposition du potentiel newtonien bien connu et d'un terme nouveau appelé **potentiel centrifuge**.

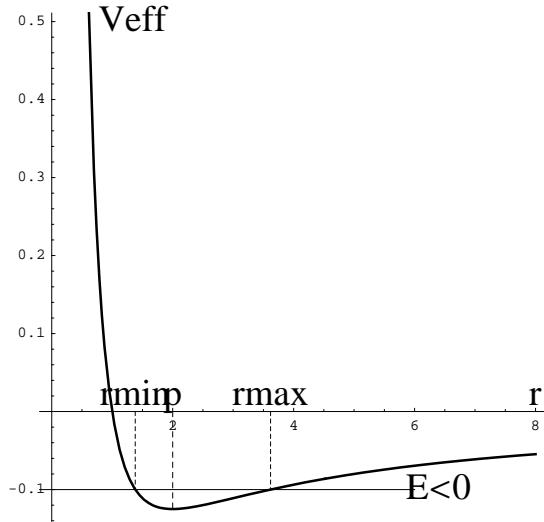


FIGURE 7.5 – Le potentiel effectif

- Si $E < 0$, on a généralement $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$; les mouvements sont bornés dans l'espace : ce sont les **mouvements liés**.

Le *minimum* du potentiel effectif se calcule : $V'_{\text{eff}}(r) = -L^2/(mr^3) + K/r^2 = 0$ si $r = L^2/(mK)$, c'est-à-dire si $r = p$ (le paramètre (7.2.22)). On a alors

$$E \geq V_{\text{eff}}(p) = -\frac{mK^2}{2L^2}. \quad (7.2.33)$$

Ce sont les *mouvements circulaires*, $r = p$, qui possèdent l'énergie minimale.

- Si $E \geq 0$, on a $r_{\min} \leq r$; le point matériel peut s'échapper à l'infini : ce sont les **mouvements de diffusion**.

Calculons maintenant l'énergie E en fonction de l'excentricité e .

Puisque E est une constante du mouvement, elle se calcule en n'importe quel point de l'orbite : choisissons le périastre $\theta = 0$. En ce point $r(0) = r_{\min} = p/(1+e)$; on tire de (7.2.32) : $E = L^2/(2mr_{\min}^2) - K/r_{\min} = L^2(1+e)^2/(2mp^2) - K(1+e)/p$. Mais, puisque $p = L^2/(mK)$, on trouve finalement

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2m} \frac{m^2 K^2}{L^4} (1+e)^2 - K(1+e) \frac{mK}{L^2} \\ &= \frac{mK^2}{L^2} \left[\frac{1}{2}(1+e) - 1 \right] (1+e) \end{aligned}$$

et donc

$$E = -\frac{mK^2}{2L^2} (1 - e^2) \quad (7.2.34)$$

Nous venons de prouver la

Proposition 7.2.7. *L'excentricité de l'orbite newtonienne de moment angulaire L et d'énergie E est*

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \quad (7.2.35)$$

où m est la masse réduite (7.2.9) et K la constante (7.2.11). Cette orbite est une

- **ellipse** $(0 \leq e < 1) \iff -\frac{mK^2}{2L^2} \leq E < 0$
- **parabole** $(e = 1) \iff E = 0$
- **branche d'hyperbole** $(e > 1) \iff E > 0$

Exercice 7.2.8. *Tracer les trajectoires des deux corps d'une étoile double à l'aide d'un petit programme graphique.*

Démonstration. On utilise les formules (7.2.23) donnant la distance entre les deux étoiles et (7.2.8) donnant la position de chaque étoile. Sous MathematicaTM on écrit :

```
(* Formules générales *)
r[θ_] := p/(1+e Cos[θ])
r1[θ_] := R + m2/(m1+m2) r[θ] {Cos[θ],Sin[θ]}
r2[θ_] := R - m1/(m1+m2) r[θ] {Cos[θ],Sin[θ]}

(* Application numérique *)
p = 1; (* paramètre *)
e = 7/10 (* ellipse *)
m1 = 1; m2 = 9; (* masses des étoiles *)
R = {0,0}; (* choix du barycentre *)
θ1 = 2.3; θ2 = 2.9; (* deux angles arbitraires *)

(* Tracé graphique *)
Ellipse1 = ParametricPlot[r1[θ],{θ,0,2 Pi}]
Ellipse2 = ParametricPlot[r2[θ],{θ,0,2 Pi}]
Show[
  Ellipse1, Ellipse2,
  Graphics[Line[{r1[θ1],r2[θ1]}]],
  Graphics[Line[{r1[θ2],r2[θ2]}]],
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All
]
```

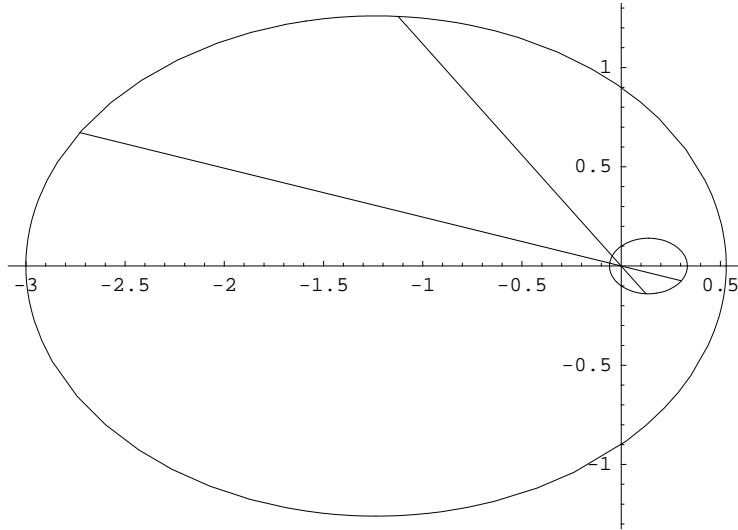


FIGURE 7.6 – Etoile double

Les étoiles décrivent des ellipses ; la petite est l'orbite de l'étoile la plus massive ; voir la Fig. 7.6. \square

Remarque 7.2.9. *On a des **orbites circulaires** si*

$$r = p = \frac{L^2}{mK} \iff e = 0 \iff E = E_{\min} = -\frac{mK^2}{2L^2}. \quad (7.2.36)$$

Remarque 7.2.10. *On a **chute sur le centre**¹⁵ si*

$$L = 0. \quad (7.2.37)$$

En effet, cf. (7.2.13), la condition $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{0}$ est caractéristique d'un mouvement purement radial (la vitesse \vec{v} est parallèle au rayon vecteur \vec{r}). La trajectoire est une parabole dégénérée, $e = 1$ (cf. (7.2.35)) et $p = 0$ (cf. (7.2.22)).

Un résultat important dans le cas des mouvements périodiques est donné par la

Proposition 7.2.11. *Les mouvements associés aux orbites elliptiques ont une énergie inversement proportionnelle au demi-grand axe :*

$$E = -\frac{K}{2a}$$

 $(7.2.38)$

15. Les deux corps tombent l'un sur l'autre.

Démonstration. Grâce à (7.2.26) on a $K/(2a) = K(1 - e^2)/(2p)$. Mais, puisque $p = L^2/(mK)$, il vient $K/(2a) = mK^2(1 - e^2)/(2L^2) = -E$ en utilisant (7.2.34). \square

Nous rencontrons, en fait, les trois types d'orbites (Proposition 7.2.7) en mécanique céleste.

- Les mouvements des planètes autour du soleil sont des **mouvements liés** qui s'effectuent selon des orbites elliptiques ($E < 0$) dont le soleil (le centre attracteur très massif) occupe l'un des foyers. L'approximation qui consiste à négliger les interactions gravitationnelles entre les planètes elles-mêmes est justifiée en première approximation.
- Il existe aussi des **mouvements de diffusion** ($E \geq 0$) pour certaines comètes qui ne passent donc qu'une seule fois au périhélie avant de retourner aux confins du système solaire. Les orbites sont soit **paraboliques** ($E = 0$), soit **hyperboliques** ($E > 0$).

Exercice 7.2.12 (Halley). *La comète de Halley a une trajectoire elliptique très excentrée.¹⁶ Sachant que le périhélie est de 0,59 UA et l'aphélie d'environ 35,33 UA, trouver l'excentricité de son orbite.*

Démonstration. Posons $\varepsilon = r_{\min}/r_{\max}$; grâce à (7.2.24) et (7.2.25) l'excentricité est alors donnée par

$$e = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

On a ici $\varepsilon = 0,59/35,33 \cong 0,0167$ et l'excentricité est donc $e \cong 0,967$. \square

Exercice 7.2.13. *Une comète possède une trajectoire parabolique. Donner sa vitesse maximale v_{\max} en fonction de son périhélie r_{\min} et de la masse M du Soleil.¹⁷*

Exercice 7.2.14 (Coulomb). *L'étude du problème des deux corps dans le cas de l'**interaction coulombienne** entre deux charges électriques q_1 et q_2 se traite identiquement avec, cette fois-ci,*

$$K = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \quad (7.2.39)$$

où ε_0 désigne la permittivité du vide.

16. Elle repasse tous les 76 ans au voisinage du Soleil et a, comme l'a réalisé l'astronome anglais E. Halley, été observée par les astronomes depuis longtemps (en fait, depuis 2000 ans). E. Halley (1656–1742) l'observa en 1682 et prédit son retour en 1759 (gloire posthume!). Son dernier passage près de nous date de 1986.

17. On trouve $v_{\max} = \sqrt{2MG/r_{\min}}$.

1. Montrer que dans le cas où les charges sont de signe différent, on retrouve les mêmes orbites que dans le cas newtonien.¹⁸
2. Montrer que dans le cas où les charges sont de même signe (cas répulsif), ne subsistent que les orbites hyperboliques.¹⁹

Démonstration. Se reporter à l'expression (7.2.31) de l'énergie du système. \square

7.2.5 La troisième loi de Kepler

Nous avons, en fait, déjà prouvé que la théorie de la gravitation newtonienne *implique* — en particulier — les deux premières lois de Kepler :

K_I : la nature elliptique des orbites képlériennes (Proposition 7.2.7),

K_{II} : la loi des aires donnée par la Proposition 7.2.3 (ou 4.4.9).

Quid de K_{III} pour les orbites képlériennes ?

Montrons que la **période de révolution**, T , sur une orbite elliptique est reliée au demi-grand axe, a , de cette orbite selon une loi simple.

Nous savons que la vitesse aréolaire (4.4.5) est une constante du mouvement : $\dot{S} = L/(2m) = \text{const.}$ La surface de l'ellipse, $S = \int_0^T \dot{S} dt$, est donc égale à

$$S = \frac{LT}{2m} = \pi ab$$

grâce au résultat de l'Exercice 4.4.5. Comme $b = a\sqrt{1 - e^2}$ (cf. (7.2.26) et (7.2.27)) et $1 - e^2 = 2|E|L^2/(mK^2)$ puisque $E < 0$ (cf. (7.2.34)), on déduit de la formule ci-dessus

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi m}{L} a^2 \sqrt{1 - e^2} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2ma^4|E|}{K^2}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{a^3 m}{K}} \end{aligned}$$

grâce à (7.2.38). Nous venons de prouver la

18. C'est le cas de l'atome d'hydrogène (classique) par exemple.

19. Exemple : la diffusion de Rutherford de noyaux d'hélium He^{++} par des protons p^+ .

Proposition 7.2.15 (Troisième loi de Kepler). *Si T désigne la période de révolution sur une orbite elliptique de demi-grand axe a , alors*

$$\boxed{\omega^2 a^3 = GM} \quad (7.2.40)$$

où $\omega = 2\pi/T$.

Le tableau suivant utilisant les données de [3, 7] confirme clairement K_{III}.

Planète	a [UA]	T [an]	a^3/T^2
Mercure	0,387	0,241	1,000
Vénus	0,723	0,615	1,000
Terre	1,000	1,000	1,000
Mars	1,524	1,881	1,000
Jupiter	5,203	11,862	1,001
Saturne	9,540	29,458	1,001
Uranus	19,180	84,013	1,000
Neptune	30,070	164,810	1,001

7.2.6 Le vecteur de Lenz

Il existe, dans le cas ici étudié (mouvement dans le champ central newtonien ou coulombien), une constante du mouvement très spécifique²⁰ appelée vecteur de Lagrange-Laplace-Runge-Lenz ou tout simplement **vecteur de Lenz** ou encore **vecteur excentricité**.

Théorème 7.2.16 (Lagrange-Laplace-Runge-Lenz). *Soit \vec{L} le moment angulaire et \vec{P} l'impulsion d'un point matériel de masse m plongé dans le potentiel $V(r) = -K/r$. La quantité suivante*

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\vec{L} \times \vec{P}}{mK} + \frac{\vec{r}}{r}} \quad (7.2.41)$$

est une **constante du mouvement** appelée **vecteur de Lenz**.

20. Cette constante du mouvement est “accidentelle” dans la mesure où elle n'est associée à aucune symétrie (galiléenne) d'espace-temps.

Démonstration. Les équations de Newton (7.2.10) : $d\vec{P}/dt = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -K\vec{r}/r^3$ et $\vec{P} = m d\vec{r}/dt$ impliquent, grâce à (7.2.13),

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{\vec{L}}{mK} \times \left(\frac{-K\vec{r}}{r^3} \right) + \frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Mais $d(r^2)/dt = 2r dr/dt = d(\vec{r} \cdot \vec{r})/dt = 2\vec{r} \cdot \vec{v}$ entraînant $dr/dt = \vec{v} \cdot \vec{r}/r$, on obtient

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) + r^2 \vec{v} - \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{r})] = \vec{0}$$

en utilisant la définition $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ du moment angulaire et la formule (7) du double produit vectoriel donnée dans la Proposition 1.1.13. \square

On remarque sur l'expression (7.2.41) que

$$\vec{e} \perp \vec{L}$$

puisque $\vec{L} \cdot \vec{e} = \vec{L} \cdot \vec{r}/r = 0$, le moment angulaire étant perpendiculaire au rayon vecteur. Le vecteur de Lenz est donc contenu dans plan de l'orbite si $\vec{L} \neq \vec{0}$. Dans le cas $\vec{L} = \vec{0}$ (chute sur le centre) on a $\vec{e} = \vec{r}/r$; le vecteur de Lenz est alors le vecteur directeur de la droite de l'orbite.

Nous sommes maintenant en mesure de déduire du théorème précédent l'expression paramétrique de la trajectoire en coordonnées polaires *sans* avoir à intégrer les équations du mouvement.

Pour ce faire calculons le produit scalaire $\vec{r} \cdot \vec{e}$; on trouve

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{L} \times \vec{P})}{mK} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = -\frac{\vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{P})}{mK} + r$$

puisque le *produit mixte* change de signe si l'on échange deux de ses arguments.²¹ Grâce à la définition du moment angulaire \vec{L} , on trouve enfin

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = r - p \tag{7.2.42}$$

avec $p = L^2/(mK)$ — cf. (7.2.22). Exprimons ce produit scalaire en fonction de l'angle complémentaire θ entre \vec{e} et \vec{r} (voir Fig. 7.7).

Il vient $\vec{e} \cdot \vec{r} = \|\vec{e}\| r \cos(\pi - \theta) = -\|\vec{e}\| r \cos \theta = r - p$, grâce à (7.2.42), c'est-à-dire

$$r = \frac{p}{1 + \|\vec{e}\| \cos \theta}. \tag{7.2.43}$$

On déduit de (7.2.23) la

21. On prouve aisément que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$.

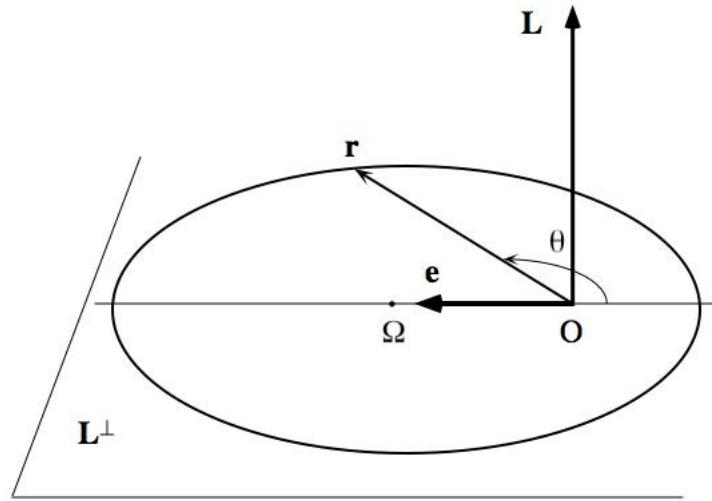


FIGURE 7.7 – Le vecteur de Lenz (cas de l'ellipse)

Proposition 7.2.17. *La trajectoire du point de moment angulaire \vec{L} par rapport au centre attracteur newtonien est une (branche) de conique dont le **paramètre** est $p = L^2/(mK)$ et l'**excentricité***

$$e = \|\vec{e}\| \quad (7.2.44)$$

où \vec{e} désigne le **vecteur de Lenz**.

7.2.7 Equation du temps

Jusqu'à présent,²² nous avons classé les différentes trajectoires paramétrées par l'angle polaire θ (appelé "anomalie vraie"). Reste maintenant à déterminer complètement les trajectoires en fonction du **temps** t , notre paramètre privilégié. Il nous faut donc, pour ce faire, une équation supplémentaire faisant explicitement intervenir le temps ; nous traiterons, à titre d'exemple, le cas des orbites képlériennes fermées.

Considérons une orbite elliptique dans le plan $z = 0$ et désignons par φ l'**anomalie excentrique** définie dans la Fig. 7.8, de sorte que

$$\overrightarrow{\Omega M} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

si l'ellipse possède un demi-grand axe a et un demi-petit axe b (voir l'équation (1.2.4)).

22. Cette sous-section pourra échapper à une première lecture.

Le rayon vecteur est alors donné par $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, c'est- à-dire

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -ae \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ b \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.45)$$

grâce à (7.2.28) si l'ellipse a une excentricité e .

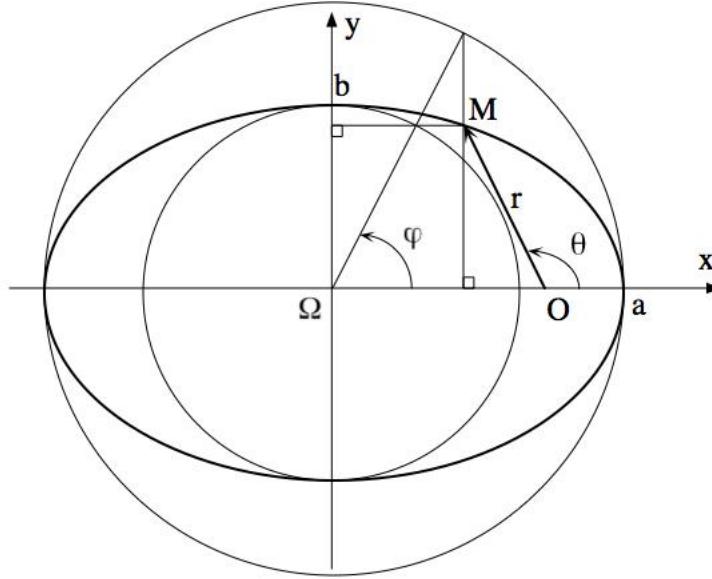


FIGURE 7.8 – Anomalie excentrique

Le moment angulaire $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$ (vecteur constant non nul) prend la forme

$$\vec{L} = m \begin{pmatrix} a(\cos \varphi - e) \\ b \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{d\varphi}{dt} = L \vec{e}_z$$

où $L = mab(1 - e \cos \varphi)d\varphi/dt$.

On a donc

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{mab}{L}(1 - e \cos \varphi) \neq 0 \quad (7.2.46)$$

puisque $0 \leq e < 1$; le temps t est donc une fonction monotone de l'anomalie excentrique φ . En prenant une primitive des deux membres de (7.2.46), il vient

$$t = \frac{mab}{L}(\varphi - e \sin \varphi) + t_0$$

où t_0 est une constante d'intégration (date de passage au périhélie).

En utilisant les formules (7.2.26), (7.2.27) et (7.2.22) pour le demi-grand axe, le demi-petit axe et le paramètre, on trouve l'expression du temps en fonction de l'anomalie excentrique

$$t = \frac{L^3}{mK^2} (1 - e^2)^{-3/2} (\varphi - e \sin \varphi) + t_0 \quad (7.2.47)$$

pour une ellipse d'excentricité e et de paramètre $p = L^2/(mK)$. La formule (7.2.47) est l'“équation du temps” encore appelée **équation de Kepler**.

La fonction $\varphi \mapsto t$ donnée par (7.2.47) étant monotone, son inverse $t \mapsto \varphi$ peut être calculé²³ pour nous permettre de déterminer la trajectoire $t \mapsto \vec{r}$ grâce à (7.2.45).

7.3 Vitesses cosmiques & trous noirs

7.3.1 Première vitesse cosmique

Nous avons vu que le champ de gravitation extérieur créé par un astre de masse M , de densité massique constante et possédant la symétrie sphérique est celui créé par une masse ponctuelle identique concentrée au centre de l'astre.

On appelle **première vitesse cosmique** la vitesse (scalaire) $v_1(M, R)$ d'un satellite (de masse négligeable $m \ll M$) en rase-motte autour de cet astre de rayon R . (Voir la Fig. 7.9.)

L'énergie du satellite est $E = \frac{1}{2}mv_1^2 - K/R = -K/(2R)$, avec $K = GMm$, cf. l'équation (7.2.38). On trouve donc $v_1^2 = K/(mR)$ ou encore

$$v_1(M, R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (7.3.1)$$

L'accélération de la pesanteur au niveau de la surface de l'astre étant donnée par $g = GM/R^2$, on obtient une formule analogue : $v_1 = \sqrt{Rg}$.

A.N. Pour la Terre, $R_{\oplus} \cong 6400$ km, $g_{\oplus} \cong 9,8$ m / s², on trouve : $v_1^{\oplus} \cong 7,91$ km / s.

7.3.2 Deuxième vitesse cosmique

Il s'agit de déterminer la vitesse minimale à fournir à un objet situé à la surface d'un astre pour que ce dernier échappe à l'attraction gravitationnelle de l'astre —

23. Calcul non élémentaire!

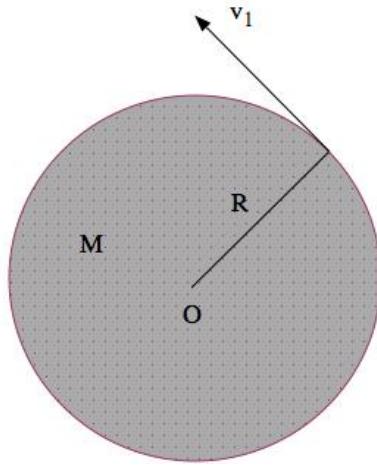


FIGURE 7.9 – Première vitesse cosmique

ayant les mêmes caractéristiques que précédemment. (Voir la Fig. 7.10.)

Pour que cet objet puisse atteindre l'infini, c'est-à-dire pour que $E \geq 0$, il faut que sa vitesse initiale \vec{v} soit telle que

$$\|\vec{v}\| \geq \sqrt{\frac{2K}{mR}}.$$

On appelle alors **vitesse de libération** ou encore “seconde vitesse cosmique” la vitesse $v_2(M, R)$ minimale²⁴ que doit posséder un objet à la surface de l'astre de rayon R pour pouvoir atteindre l'infini, en l'occurrence

$$v_2(M, R) = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (7.3.2)$$

$$= \sqrt{2} v_1(M, R). \quad (7.3.3)$$

A.N. Dans le cas de la Terre, on trouve : $v_2^\oplus \cong 11,2$ km / s.

7.3.3 Trou noir [Laplace]

On connaît la vitesse de libération — seconde vitesse cosmique (7.3.2) — de l'attraction gravitationnelle d'un astre de masse M et de rayon R .

Pierre-Simon Laplace imagina²⁵ que la lumière puisse, tout comme les particules massives, subir les effets du champ de gravitation. La vitesse de la lumière, c , étant

24. Sa trajectoire sera alors parabolique puisque $E = 0$.

25. Découverte indépendante de l'anglais John Michell à la fin du XVIII-ème siècle.

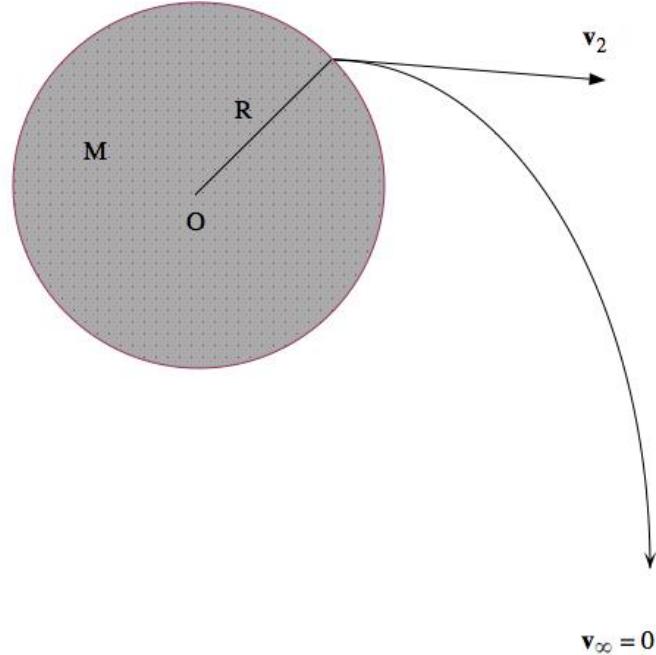


FIGURE 7.10 – Deuxième vitesse cosmique

connue avec une certaine précision dès le XVIII^e siècle et supérieure à toute vitesse, v , connue à cette époque, on posa naturellement : $v \leq c$.

Dans l'hypothèse où la vitesse de libération est telle que

$$v_2(M, R) > c$$

aucune matière (lumière comprise) ne peut échapper à l'attraction gravitationnelle de l'astre.

Ce dernier devient ainsi un corps obscur ou **trou noir**²⁶ dès lors que son rayon vérifie

$$R < R_S$$

où

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (7.3.4)$$

désigne le **rayon de Schwarzschild** de l'astre.

26. Ces objets ont été (re)découverts dans le cadre de la relativité générale d'Einstein, 120 ans plus tard.

A.N. Sachant que $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$ et $G = 6,6725985 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, on trouve le rayon de Schwarzschild du Soleil (de masse $M_\odot = 1,9889225 \cdot 10^{30} \text{ kg}$)

$$R_S = 2,95326 \text{ km},$$

à comparer au rayon du soleil $R_\odot = 6,65997 \cdot 10^8 \text{ m}$ (!).

“Tous ces corps devenus invisibles, sont à la même place où ils ont été observés, puisqu'ils n'en ont point changé, durant leur apparition ; il existe donc dans les espaces célestes, des corps obscurs aussi considérables, et peut-être en aussi grand nombre, que les étoiles. Un astre lumineux de même densité que la terre, et dont le diamètre serait deux cent cinquante fois plus grand que celui du soleil, ne laisserait en vertu de son attraction, parvenir aucun de ses rayons jusqu'à nous ; il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l'univers, soient par cela même, invisibles.”

Pierre-Simon LAPLACE,

Exposition du Système du Monde, an IV de la République Française (1796).

Chapitre 8

L’Oscillateur harmonique

8.1 Le modèle Hooke

Nous étudions dans ce dernier chapitre les différents mouvements oscillatoires ou (pseudo-)oscillatoires que l’on rencontre dans un grand nombre de phénomènes naturels. Les domaines concernés par cette branche de la mécanique et de la physique traitant de vibrations au sens large sont, par exemple,

- Systèmes oscillants en mécanique (pendules, horlogerie, régulateurs, amortisseurs, suspension des véhicules, etc.)
- Systèmes oscillants en électricité (circuits LC, RLC) et en électronique
- Systèmes oscillants en géophysique (marées, etc.)
- Vibration des molécules et oscillateur harmonique quantique
- Oscillations dans les solides (phonons)
- Polarisation elliptique de la lumière
- Oscillateur harmonique comme constituant élémentaire du champ de photons en électrodynamique quantique
- Etc.

Les forces mises en jeu dans ces situations variées relèvent toutes, fondamentalement, de la loi de l’élasticité linéaire de **Robert Hooke** (1635-1703) : cette loi phénoménologique stipule qu’un système en équilibre stable répond à une perturbation extérieure selon une force de rappel proportionnelle à cette perturbation.

Les mouvements des systèmes ainsi perturbés sont des mouvements “oscillatoires” décrits par intégration des équations de Newton en prenant en compte la force de rappel de Hooke et, éventuellement, d’autres forces, notamment des forces (non

conservatives) de frottement pour une étude plus réaliste de ces phénomènes physiques.

Signalons enfin un résultat mathématique célèbre qui distingue encore ce type de force : le **théorème de Bertrand** établit que les deux seuls champs de forces centrales dans lesquelles toutes les orbites bornées dans l'espace sont des courbes fermées¹ sont précisément (i) le champ newtonien et (ii) le champ de ...Hooke. Ces champs de force fondamentaux font, ici, l'objet des Chapitres 7 et 8 respectivement.

8.1.1 L'oscillateur harmonique unidimensionnel

Loi de Hooke

Le champ de force $x \mapsto F$ de la droite réelle, \mathbf{R} , modélisant un **oscillateur harmonique unidimensionnel** est donné par la **loi de Hooke**

$$F = -kx \quad \& \quad k = \text{const.} > 0 \quad (8.1.1)$$

La constante positive k est appelée “constante de rappel” ou **raideur** si l'on modélise la force de rappel due à un ressort par l'équation (8.1.1).

Notons que dans l'expression (8.1.1) la force s'annule à l'origine, $F = 0 \Leftrightarrow x = 0$; la *longueur au repos* du ressort est, ici, nulle ! Dans le cas (plus réaliste) où la longueur au repos est non nulle, la loi de force prend la forme suivante

$$F = -k(x - x_0) \quad (8.1.2)$$

où $|x_0|$ est, maintenant, la longueur au repos : $F(x_0) = 0$.

Proposition 8.1.1. *La force de Hooke (8.1.2) dérive du potentiel*

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + V_0 \quad (8.1.3)$$

où V_0 est une constante réelle arbitraire.

Démonstration. Comme dans tout problème unidimensionnel, le potentiel est donné par une **primitive**²

$$V(x) = - \int F(x) dx \quad (8.1.4)$$

qui prend ici la forme (8.1.3). □

1. Ces orbites sont, en fait, des ellipses dans tous les cas.

2. *N.B.* Dans le cas d'une seule dimension spatiale, tout champ de force $x \mapsto F(x)$ est conservatif : $F(x) = -V'(x)$ est bien équivalent à (8.1.4).

Le graphe du potentiel de Hooke est une parabole représentée par la Fig. 8.1 (dans le cas particulier où $V_0 = 0$).

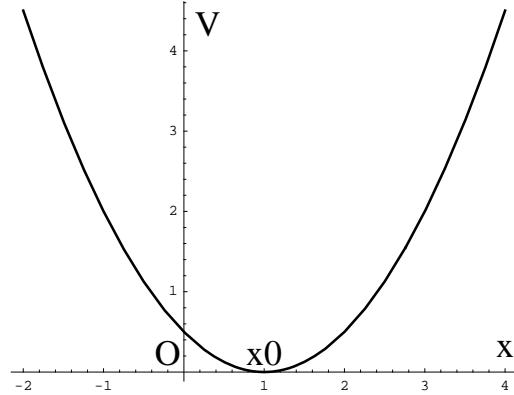


FIGURE 8.1 – Potentiel de Hooke

Trajectoires

L'équation du mouvement, $m\ddot{x} = F(x)$, d'une particule de masse m soumise à la force (8.1.1) se lit donc

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.1.5)$$

et correspond à l'**équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** (2.1.10) déjà étudiée. Sa solution générale est donnée par

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (A, B \in \mathbf{R}).$$

Si l'on fixe la position $x(0) = x_0$ et la vitesse $v(0) = v_0$ initiales, la trajectoire est entièrement déterminée

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ &= r_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

comme en (2.1.14) et (2.1.15), ainsi que le mouvement

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ v(t) = v_0 \cos \omega t - \omega x_0 \sin \omega t. \end{cases} \quad (8.1.7)$$

Exemple d'oscillateur amorti

L'**oscillateur amorti** a déjà été traité (et intégré) dans toute sa généralité au Chapitre 2.2.3. Il s'agit, dans ce cas, de prendre aussi en considération une force de **frottement visqueux** (linéaire en la vitesse) en sus de la force de Hooke (8.1.1).

Donnons, à titre d'illustration, l'exemple du **circuit RLC série** bien connu en électrocinétique. Les équations des mailles de Kirchhoff permettent, dans le cas où le circuit est soumis à une ddp extérieure U en série, d'écrire la relation entre charge électrique Q du condensateur et intensité $I = \dot{Q}$ du courant traversant le circuit comme : $RI + L\dot{I} + Q/C = U$. Cette équation s'exprime comme une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U \quad (8.1.8)$$

où l'inconnue est la charge électrique $Q(t)$.

Nous avons ici équivalence complète du système électrique avec celui d'un oscillateur unidimensionnel (masse m , raideur k), plongé dans un milieu visqueux (coefficient de viscosité η) et soumis à une force extérieure F ; l'équation du mouvement est alors

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = F \quad (8.1.9)$$

où l'inconnue est maintenant l'abscisse $x(t)$ de l'“oscillateur”.

Le dictionnaire de passage est le suivant :

Mécanique	Electricité	
m	L	
η	R	
k	$1/C$	
F	U	
$x(t)$	$Q(t)$	

(8.1.10)

8.1.2 L'oscillateur isotrope spatial

Le champ de force $\vec{r} \mapsto \vec{F}$ de \mathbf{R}^3 modélisant un **oscillateur harmonique isotrope spatial** est donné par la **loi de Hooke tridimensionnelle**

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{r} \quad \& \quad k = \text{const.} > 0} \quad (8.1.11)$$

où la constante positive k désigne toujours la raideur.

Notons encore que dans l'expression la force (8.1.11) s'annule à l'origine $\vec{r} = \vec{0}$. Cette force est une force centrale (voir la Définition (4.4.1)), de centre $\vec{r} = \vec{0}$; elle est bien invariante par rotation, d'où la justification du terme "isotrope". Prouvons maintenant un résultat important déjà annoncé en (4.4.2).

Proposition 8.1.2. *La force de Hooke (8.1.11) est une force conservative; elle dérive du potentiel³*

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{2}k r^2} \quad (8.1.12)$$

Démonstration. On calcule : $\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = V'(r) \overrightarrow{\text{grad}} r = k r \vec{e}_r$ grâce à (4.2.13) pour trouver : $-\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = -k\vec{r} = \vec{F}$. \square

Dans le cas plus général (et plus "physique") où la "longueur au repos" est égale à $r_0 > 0$, le champ de force isotrope prend la forme suivante

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r) \quad \text{où} \quad V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + V_0 \quad (8.1.13)$$

où $V_0 = V(r_0) = \text{const.}$ La force alors donnée par

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad f(r) = -k(r - r_0) \quad (8.1.14)$$

est bien répulsive, $f(r) > 0$, pour $0 < r < r_0$ et attractive, $f(r) \leq 0$, pour $r \geq r_0$.

8.1.3 L'oscillateur anisotrope

L'oscillateur harmonique est dit anisotrope quand le potentiel est un polynôme (homogène) du second degré en la variable position $\vec{r} \in \mathbf{R}^3$.

3. On choisit souvent la constante additive pour que le potentiel s'annule à l'origine, i.e. $V(0) = 0$.

On montre que l'on peut toujours se ramener, sans restreindre la généralité, à la *forme normale* du potentiel

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2) \quad (8.1.15)$$

où k_1, k_2, k_3 sont trois constantes positives a priori différentes (non toutes nulles).⁴

La force dérivant du potentiel (8.1.15) est donc

$$\vec{F}(x, y, z) = - \begin{pmatrix} k_1 x \\ k_2 y \\ k_3 z \end{pmatrix} \quad (8.1.16)$$

et les équations du mouvement d'un point matériel de masse m données par

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_3^2 z = 0 \end{cases} \quad (8.1.17)$$

avec $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$ pour $i = 1, 2, 3$. Les trajectoires de l'oscillateur harmonique anisotrope sont donc les “composées” de celles de trois oscillateurs harmoniques unidimensionnels (8.1.5) de pulsations propres différentes : ce sont les fameuses **figures de Lissajous** déjà rencontrées en (2.2.24).

Remarque 8.1.3. *Les expressions précédentes de la force et du potentiel de Hooke se généralisent aisément au cas où la dimension de l'espace est un entier $n \geq 1$ quelconque.*

8.2 Le problème à deux corps

Considérons maintenant le problème à 2 corps qui consiste à déterminer les mouvements possibles de deux points matériels M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2 , soumis à une force de rappel mutuelle de Hooke (8.1.11) :

$$\vec{F}_{12} = -k [\vec{r}_1 - \vec{r}_2]$$

due à un ressort de longueur au repos nulle les reliant l'un à l'autre (ici $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$, $i = 1, 2$ et $k = \text{const.} > 0$) ; voir Fig. 8.2.

4. Dans le cas où ces trois constantes sont toutes égales, on retrouve le potentiel isotrope (8.1.12).

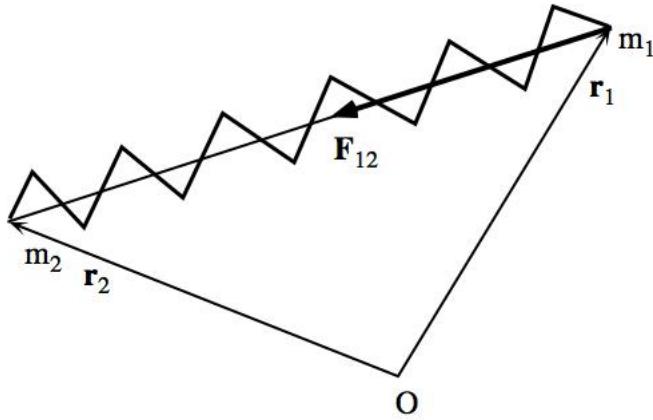


FIGURE 8.2 – Force de Hooke

8.2.1 Décomposition barycentrique

Introduisant le barycentre $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2)$ et la position relative $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ des deux corps, on a, comme dans le cas des 2 corps en interaction newtonienne, la

Proposition 8.2.1. *Les équations du mouvement des deux corps s'écrivent, après décomposition barycentrique, de la manière suivante*

$$\begin{cases} M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{0} \\ m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r}. \end{cases} \quad (8.2.1)$$

où $M = m_1 + m_2$ désigne la masse totale et $m = m_1 m_2 / M$ la masse réduite.

8.2.2 Trajectoires elliptiques

L'intégration des équations du mouvement des deux corps (8.2.1) se ramène encore essentiellement⁵ à celle des équations du mouvement relatif (à un corps) :

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(8.2.2)

5. Le barycentre est, cf. (8.2.1), toujours animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

La solution générale de l'équation différentielle (8.2.2) linéaire à coefficients constants est donnée, voir l'équation (2.2.16), par

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t \quad (8.2.3)$$

où $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbf{R}^3$ sont deux constantes d'intégration arbitraires.

La quantité ω , définie en (8.2.2), est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique ; on voit que $T := 2\pi/\omega$ est la **période** de l'oscillateur puisque, cf. (8.2.3), la quantité T est le plus petit nombre tel que $\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$ pour tout t .

Remarque 8.2.2. *La pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ est la même pour tous les mouvements ; elle ne dépend pas des conditions initiales. Ce fait, caractéristique de l'oscillateur harmonique, le distingue d'autres oscillateurs que l'on rencontre en physique.*

Si l'on fixe les conditions initiales au temps $t = t_0 = 0$, à savoir $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ et $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$, la trajectoire $t \mapsto \vec{r}(t)$ et donc le mouvement sont complètement déterminés :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 \cos \omega t - \omega \vec{r}_0 \sin \omega t \end{cases}} \quad (8.2.4)$$

Nous nous proposons maintenant de déterminer explicitement la nature géométrique de ces trajectoires. Pour ce faire, ayons recours aux lois de conservation associées aux champs centraux ; elles conduisent aisément, grâce à la forme (8.1.12) du potentiel, à la

Proposition 8.2.3. *Considérons un oscillateur harmonique (8.2.2) de masse m et de pulsation propre ω . Le moment angulaire*

$$\boxed{\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}} \quad (8.2.5)$$

est une constante du mouvement. Il en est de même de l'énergie totale

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \|\vec{r}\|^2 = \text{const.}} \quad (8.2.6)$$

Exercice 8.2.4. Montrer qu'en introduisant la variable complexe $\vec{Z} = \vec{r} + i\vec{v}/\omega$ (décrivant l'espace des phases), la trajectoire (8.2.2) prend la forme suivante

$$\vec{r}(t) = \operatorname{Re}(\vec{Z}_0 e^{-i\omega t}) \quad \text{où} \quad \vec{Z}_0 \in \mathbf{C}^3. \quad (8.2.7)$$

Si l'on désigne par \vec{Z}^* le conjugué complexe de \vec{Z} , en déduire que

$$\vec{L} = \frac{m\omega}{2i} \vec{Z}^* \times \vec{Z} \quad \& \quad E = \frac{m\omega^2}{2} \vec{Z}^* \cdot \vec{Z}. \quad (8.2.8)$$

Les trajectoires de l'oscillateur harmonique sont finalement classées comme suit.

Proposition 8.2.5. Les mouvements de l'oscillateur harmonique isotrope spatial s'effectuent sur des **trajectoires elliptiques** centrées à l'origine. Voir la Fig. 8.3.

i) Pour un moment angulaire $\vec{L} \neq \vec{0}$ la trajectoire (8.2.2) est une ellipse d'équation

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 \cos(\omega[t - t_1]) + \frac{\vec{v}_1}{\omega} \sin(\omega[t - t_1]) \quad \text{où} \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (8.2.9)$$

contenue dans le plan \vec{L}^\perp engendré par $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ et $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$ au temps t_1 ; le demi-grand axe est : $a = \max(r_1, v_1/\omega)$ et le demi-petit axe : $b = \min(r_1, v_1/\omega)$.⁶

Dans le cas $a = b$, c'est-à-dire $v_1 = \omega r_1$, le mouvement est circulaire uniforme.

ii) Pour un moment angulaire $\vec{L} = \vec{0}$ et une énergie $E \neq 0$, la trajectoire⁷ devient unidimensionnelle :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 \cos(\omega[t - t_1]) \quad (8.2.10)$$

avec $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ au temps t_1 ; l'amplitude du mouvement oscillatoire est r_1 .

iii) Si l'énergie est $E = 0$ (donc $\vec{L} = \vec{0}$), la trajectoire est triviale :

$$\vec{r}(t) = \vec{0}. \quad (8.2.11)$$

Démonstration. Nous savons (Théorème 4.4.8) que le moment angulaire $\vec{L} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ est une constante du mouvement.

i) Supposons d'abord $\vec{L} \neq \vec{0}$: vitesse et rayon vecteur ne sont jamais parallèles.

La trajectoire est plane et contenue dans le plan \vec{L}^\perp engendré par \vec{r}_0 et \vec{v}_0 (cf. (8.2.2)).

Montrons qu'il existe des instants $t = t_1$ où rayon vecteur $\vec{r}_1 := \vec{r}(t_1)$ et vitesse $\vec{v}_1 := \vec{v}(t_1)$ sont orthogonaux.

6. On a posé $r_1 := \|\vec{r}_1\|$ et $v_1 := \|\vec{v}_1\|$.

7. C'est un intervalle de la droite engendrée par \vec{r}_1 (une ellipse dégénérée).

Si $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = 0$, un tel instant est $t_1 = 0$ et le problème est résolu.

Supposons alors $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \neq 0$. On calcule, grâce à (8.2.2), le produit scalaire

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= (\vec{r}_0 \cos \omega t + (\vec{v}_0/\omega) \sin \omega t) \cdot (\vec{v}_0 \cos \omega t - \omega \vec{r}_0 \sin \omega t) \\ &= \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) + (v_0^2/\omega - \omega r_0^2) \sin \omega t \cos \omega t \\ &= \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \cos(2\omega t) + (v_0^2 - \omega^2 r_0^2) \sin(2\omega t)/(2\omega)\end{aligned}$$

qui s'annule aux temps $t = t_1$ tels que : $\cot(2\omega t_1) = (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)/(2\omega \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0)$. A ces instants on a bien

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

et la trajectoire (8.2.2) s'écrit alors :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 \cos(\omega[t - t_1]) + \frac{\vec{v}_1}{\omega} \sin(\omega[t - t_1]).$$

Choisissons une base orthonormée⁸ du plan de l'orbite dans laquelle cette trajectoire prend la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega[t - t_1]) + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1/\omega \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega[t - t_1]).$$

On vérifie trivialement que

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{(v_1/\omega)^2} = 1$$

et donc que la courbe (8.2.9), c'est-à-dire la trajectoire (8.2.2) de notre oscillateur harmonique isotrope, est une **ellipse** centrée à l'origine : le centre attracteur. Le demi-grand axe (resp. le demi-petit axe) est donc la plus grande (resp. la plus petite) des quantités r_1 et v_1/ω .

ii) Si $\vec{L} = \vec{0}$, les vecteurs \vec{r}_0 et \vec{v}_0 sont parallèles et non tous nuls si l'on suppose $2E/m = v_0^2 + \omega^2 r_0^2 > 0$. La trajectoire est donc portée par \vec{r}_0 (et/ou \vec{v}_0). Si $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \neq 0$, puisque $\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{0}$ et $\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$, on a nécessairement $\vec{r}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_1 = \vec{0}$; d'où la trajectoire rectiligne (8.2.10) si l'on choisit par exemple $\vec{r}_1 \neq \vec{0}$. Si $\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = 0$, la discussion est la même avec $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_0$ et $t_1 = t_0 = 0$.

iii) Si $E = 0$, on a nécessairement $\vec{r}_0 = 0$ et $\vec{v}_0 = \vec{0}$ (donc $\vec{L} = \vec{0}$). On déduit de (8.2.2) que la trajectoire est réduite à l'origine : $\vec{r}(t) = \vec{0}$ pour tout t . \square

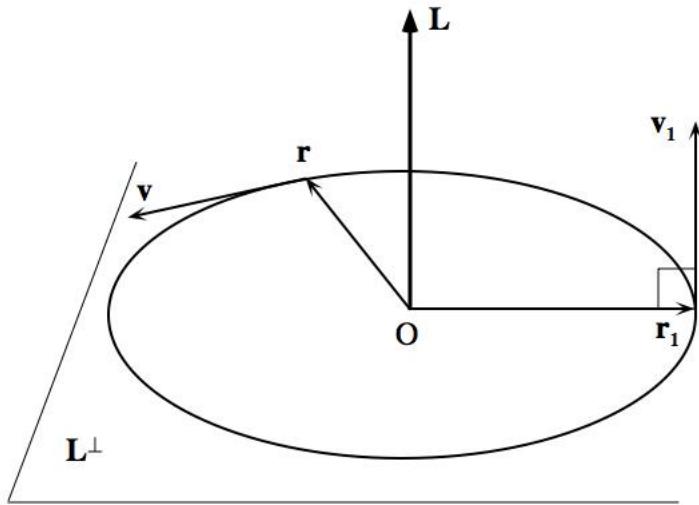


FIGURE 8.3 – L'ellipse de Hooke

Exercice 8.2.6. Trouver les trajectoires d'une particule de masse m soumise à la force (8.1.14).

8.3 Linéarisation & petits mouvements

Dans certains cas, les mouvements de systèmes dont la dynamique est complexe (par exemple ceux énumérés dans l'introduction) peuvent être étudiés à l'aide d'approximations adéquates. Dans le cas où les trajectoires sont périodiques, il arrive que l'on puisse correctement approximer les mouvements de ces systèmes par les mouvements d'un oscillateur harmonique étudiés au Paragraphe 8.2.

Un premier exemple est fourni par la description (simplifiée) des vibrations de certaines molécules diatomiques.

8.3.1 Vibrations de molécules diatomiques

L'énergie potentielle d'interaction des atomes d'une molécule diatomique (par exemple la molécule d'hydrogène H_2) est modélisé par une fonction $V(r)$ de la distance inter-atomique, r , dont le graphe a l'allure de celui de la Fig. 8.4. La force d'interaction correspondante est du type "Van-der-Waals".

8. On choisit une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ telle que, par exemple, $\vec{r}_1 = r_1 \vec{e}_x$ et $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_y$.

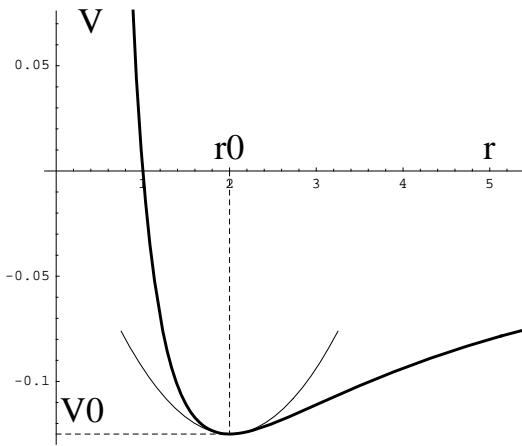


FIGURE 8.4 – Potentiel inter-atomique

Le potentiel possède un minimum strict : $V_0 = V(r_0)$ à une distance critique r_0 où $V'(r_0) = 0$. La force est clairement attractive si $r_0 < r$ et répulsive (grâce à la répulsion coulombienne des noyaux de charge positive) si $0 < r < r_0$.

Au voisinage de cette distance critique, le potentiel peut être approximé (voir la Fig. 8.4) par la “cuvette” parabolique de potentiel

$$V(r) \cong \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 + V_0 \quad \text{où} \quad r \cong r_0, \quad (8.3.1)$$

la constante k étant bien positive dans ce cas.

Il s'agit du potentiel (8.1.13) de l'oscillateur harmonique isotrope spatial avec “longueur au repos” r_0 . Nous ne nous intéresserons ici qu'aux mouvements à moment angulaire nul, i.e. à ceux d'un oscillateur harmonique unidimensionnel (8.2.10).

Les mouvements au voisinage de la position critique $r = r_0$ sont donc (cf. (8.1.5) et (8.1.6)) ceux d'un **oscillateur harmonique** de fréquence

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.3.2)$$

où m est la *masse réduite* de la molécule.

Exemple 8.3.1. *La fréquence propre de vibration (linéaire) de la molécule d'hydrogène, H_2 , est*

$$\nu_{H_2} \cong 1,32 \cdot 10^{14} \text{ Hz.}$$

On déduit directement de (8.3.2) que celle de la molécule de deutérium, D_2 , est $\nu_{D_2} = \nu_{H_2}/\sqrt{2}$ c'est-à-dire

$$\nu_{D_2} \cong 9,34 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

puisque $m_{D_2} = 2 m_{H_2}$.⁹

8.3.2 Cuvettes & collines de potentiel

Nous discutons, ici, qualitativement de la notion de stabilité d'une position d'équilibre pour un système soumis à des forces extérieures (éventuellement à des forces de liaison). Soulignons que, pour simplifier l'étude, nous nous restreindrons volontairement au cas d'un système à **un seul degré de liberté**.

Envisageons maintenant les mouvements d'un point matériel de masse m dont la position est, à chaque instant t , repérée par $x \in I \subset \mathbf{R}$; ce point est soumis à une force $F(x)$ dérivant d'un potentiel $V(x)$.

L'énergie du système, $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$, est une constante du mouvement ; elle sera un paramètre pour discuter des conséquences de l'inégalité évidente

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V(x) \geq 0. \quad (8.3.3)$$

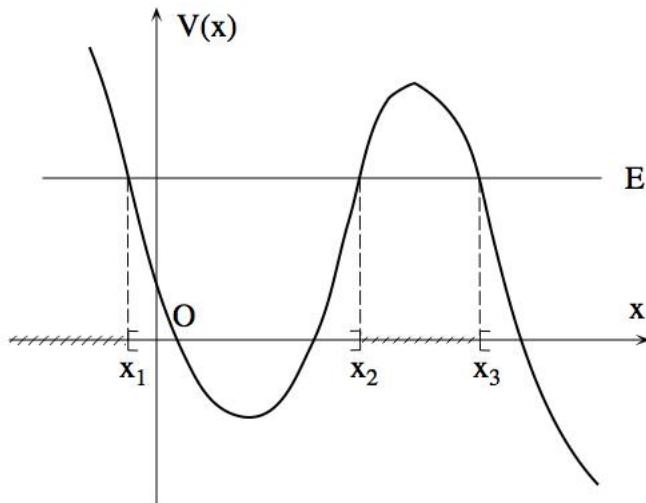


FIGURE 8.5 – Cuvettes et collines de potentiel

9. Le noyau du deutérium, D , est un état lié proton-neutron, donc $m_D = 2 m_H$ car le proton et le neutron ont (presque) la même masse ; la masse réduite est alors : $m_{D_2} = \frac{1}{2} m_D = m_H = 2 m_{H_2}$.

Nous voyons que, dans les conditions de la Fig. 8.5, le point matériel ne peut se mouvoir que dans l'intervalle $[x_1, x_2] \cup [x_3, +\infty[$ déterminé par une valeur fixée de l'énergie E , elle-même déterminée par les conditions initiales $(x(0), v(0))$. Ainsi, pourvu que $x(0) \in [x_1, x_2]$ — et donc que $|v(0)| = \sqrt{2[E - V(x(0))]/m}$ — le point restera confiné dans cet **intervalle borné**; par contre, si $x(0) \in [x_3, +\infty[$ (avec $v(0)$ correspondant à l'énergie E) le point évoluera dans cet intervalle non borné et pourra s'éloigner indéfiniment de x_3 .¹⁰ En aucun cas, le point matériel n'entrera dans l'intervalle ouvert $]x_2, x_3[$ pour cette valeur de l'énergie.

Cuvette de potentiel

Plaçons-nous dans le cas où $V(x)$ possède un **minimum** local $V_0 = V(x_0)$, c'est-à-dire un point x_0 où la force s'annule, $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$, et tel que $V''(x_0) > 0$ (concavité tournée vers le haut).

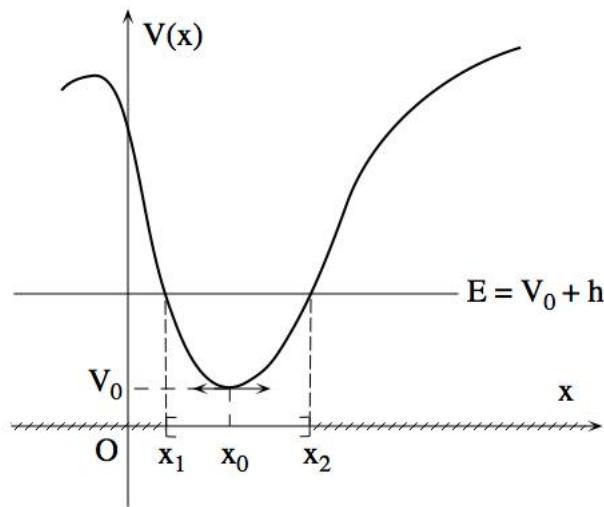


FIGURE 8.6 – Cuvette de potentiel

Nous avons les cas suivants :

$E < V_0$: Ce cas est exclus par (8.3.3).

$E = V_0$: On a $x(t) = x_0$ pour tout t : c'est une position d'équilibre (stable comme nous allons le voir).

10. Les points x_1, x_2, x_3 sont appelés **points de rebroussement** car, la vitesse, v , s'annulant en ces points x où $V(x) = E$ (cf. (8.3.3)), le point matériel doit rebrousser chemin en les rencontrant.

$E > V_0$: Si, à l'instant $t = 0$, on écarte *légèrement* le point de la position d'équilibre : $x(0) = x_0 + x_1$ (avec une vitesse $v(0)$ telle que l'énergie soit égale à E), le point ne quittera jamais l'intervalle compact $[x_1, x_2] = \{x \in \mathbf{R} \mid V(x) < E\}$. La position d'équilibre x_0 est une position d'**équilibre stable**. Ces **petits mouvements** seront, comme nous l'avons vu plus haut (au Paragraphe 8.3.1), ceux d'un **oscillateur harmonique** unidimensionnel.

Remarque 8.3.2. Si la cuvette de potentiel est telle que $V''(x_0) = 0$, la position x_0 est n'est plus position d'équilibre stable. (Voir plus bas, la Remarque 8.3.4.)

Colline de potentiel

Si $V(x)$ possède un **maximum** local $V_0 = V(x_0)$ en x_0 , c'est-à-dire tel que $V'(x_0) = 0$ avec $V''(x_0) < 0$ (concavité tournée vers le bas), la position d'équilibre x_0 est une position d'**équilibre instable**.

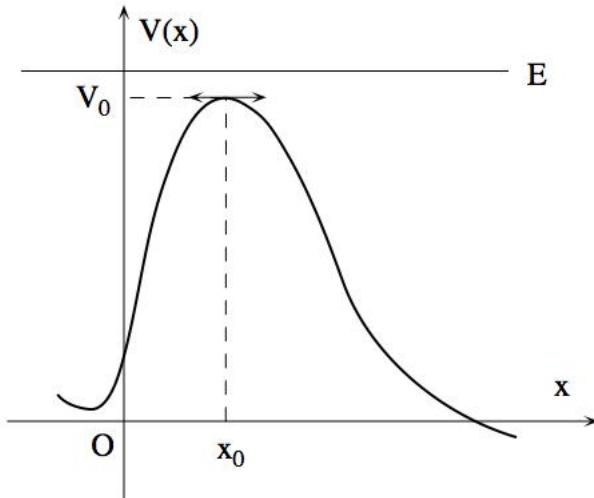


FIGURE 8.7 – Colline de potentiel

En effet, il suffit d'écartier le point de sa position d'équilibre avec une position initiale $x(0) = x_0 + x_1$ et une vitesse initiale $v(0)$ telles que $E > V_0$ pour que le point s'échappe à l'infini : sa position n'est pas contrainte car la condition (8.3.3) est partout satisfaite.

8.3.3 Linéarisation des équations du mouvement

Considérons, comme plus haut, le problème à un seul degré de liberté consistant à déterminer les (petits) mouvements d'un point matériel de masse m plongé dans un champ de force $F(x)$ dérivant d'un potentiel $V(x)$.

Les équations du mouvement

$$m \ddot{x}(t) = F(x) = -V'(x) \quad (8.3.4)$$

sont, en général, non linéaires et difficiles à intégrer explicitement.

Définition-Théorème 8.3.1. *Un point x_0 est appelé **position d'équilibre** si*

$$x(t) = x_0 \quad (8.3.5)$$

est une solution particulière de l'équation du mouvement (8.3.4). Pour que x_0 soit une position d'équilibre il faut et il suffit que la force s'annule en ce point :

$$F(x_0) = 0, \quad (8.3.6)$$

*ou encore que x_0 soit un **point critique du potentiel**, i.e. $V'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Trivial. □

Définition générale de la stabilité

On pourra, en première lecture, admettre la démonstration du théorème suivant.

Théorème 8.3.3. [2] *Si le point x_0 réalise un minimum local strict de l'énergie potentielle $V(x)$, à savoir*

$$V'(x_0) = 0 \quad \& \quad V''(x_0) > 0, \quad (8.3.7)$$

*alors x_0 est **position d'équilibre stable** (au sens de Lyapunov).*

Démonstration. Etudions les mouvements d'énergie E comprise entre V_0 et $V_0 + h$ avec $h > 0$ (voir la Fig. 8.6). Au cours du temps, les mouvements possédant cette énergie E resteront confinés dans le domaine $U_h = \{(x, v) \in \mathbf{R}^2 \mid V_0 \leq E \leq V_0 + h\}$ de l'espace des phases (espace des positions et des vitesses). Voir la Fig. 8.8.

Il s'agit maintenant de montrer que U_h peut-être rendu arbitrairement petit dans la limite $h \rightarrow 0$: critère de stabilité de Lyapunov pour l'équilibre $(x_0, 0)$.

Soit $I_h = \{x \in \mathbf{R} \mid V_0 \leq V(x) \leq V_0 + h\}$ l'intervalle des positions admissibles¹¹

11. C'est l'intervalle $[x_1, x_2]$ de la Fig. 8.6.

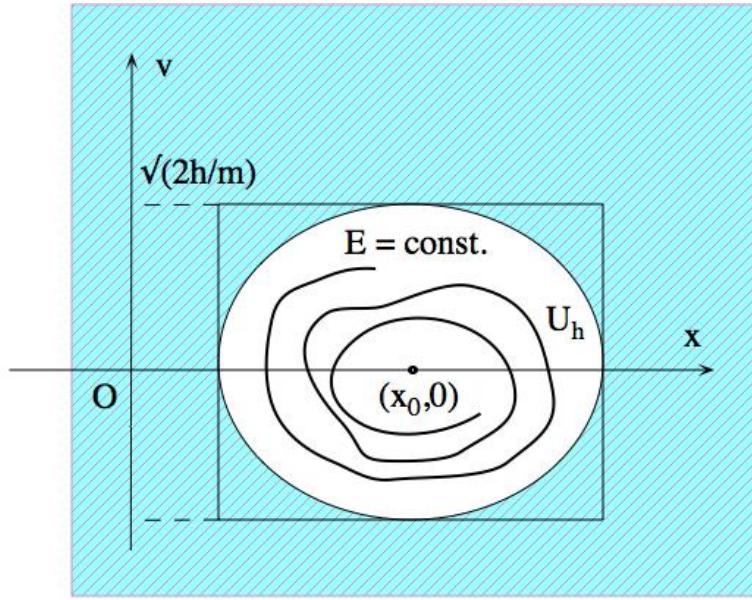


FIGURE 8.8 – Domaine de Lyapunov

pour une énergie $V_0 + h$. Cet intervalle $I_h \subset \mathbf{R}$ peut être rendu aussi petit que l'on désire (il suffit de prendre h suffisamment petit).

Mais $\frac{1}{2}mv^2 \leq V_0 - V(x) + h \leq h$ car $V_0 - V(x) \leq 0$ dans I_h . Il vient donc

$$|v| \leq v_h = \sqrt{\frac{2h}{m}}.$$

Le domaine U_h peut donc certainement être rendu arbitrairement petit avec h puisque $U_h \subset I_h \times [-v_h, +v_h]$. Le critère de Lyapunov est satisfait. \square

Procédure de linéarisation

Si x_0 est une position stable, déterminons les solutions approchées de l'équation du mouvement (8.3.4) de la forme

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_1(t)$$

avec $0 < \varepsilon \ll 1$

(8.3.8)

On peut donc écrire,¹² en négligeant les termes du second ordre en ε :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) = \varepsilon m\ddot{x}_1(t) &= F(x_0 + \varepsilon x_1(t)) \\ &= F(x_0) + \varepsilon x_1(t) F'(x_0) + O(\varepsilon^2) \\ &= 0 - \varepsilon V''(x_0) x_1(t) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

pour trouver enfin l'**équation linéarisée** de l'équation de Newton (8.3.4), à savoir

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) \cong 0 \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$$

(8.3.10)

Les mouvements linéarisés (les solutions de (8.3.10)) approximent donc les mouvements autour de l'équilibre avec les trajectoires

$$x(t) \cong x_0 + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (A, B \in \mathbf{R}).$$

Ils correspondent bien aux mouvements périodiques d'un oscillateur harmonique de pulsation ω donnée par la "courbure" $V''(x_0)$ du potentiel en x_0 ; la **période des petits mouvements** — *indépendante des conditions initiales* — est donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}$$

(8.3.11)

Remarque 8.3.4. Nous voyons sur (8.3.10) que l'équation linéarisée au voisinage d'un **point d'aplatissement** du potentiel, i.e. d'un point x_0 tel que $V''(x_0) = 0$, ne conduit plus à des solutions périodiques (puisque alors $x_1(t) = At + B$). On dit, dans ce cas, que x_0 est une position d'**équilibre indifférent**.

Remarque 8.3.5. Dans le cas d'une colline de potentiel, l'équation "linéarisée" au voisinage d'un **maximum local** du potentiel, i.e. un point x_0 tel que $V''(x_0) < 0$, ne possède plus de solutions périodiques. Cette équation prend plutôt la forme

$$\ddot{x}_1(t) - \omega^2 x_1(t) \cong 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{-V''(x_0)}{m}}$$

différente de (8.3.10); ses solutions : $x_1(t) = A \operatorname{ch}(\omega t) + B \operatorname{sh}(\omega t)$ sont non bornées. Dans ce cas, la linéarisation n'est plus légitime et x_0 est bien une position d'**équilibre instable**.

12. On utilise systématiquement le développement en série d'une fonction différentiable $F(x)$ au voisinage d'un point x_0 donné par la **formule de Taylor** :

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + h F'(x_0) + (h^2/2) F''(x_0) + \cdots + (h^n/n!) F^{(n)}(x_0) + \cdots \quad (8.3.9)$$

8.4 Exemples de petits mouvements

8.4.1 Pendule (pas si) simple

Il s'agit de déterminer les mouvements d'un point matériel de masse m dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = \text{const.}$, astreint à se mouvoir sur un cercle d'axe "vertical".

Nous supposerons, pour simplifier, la liaison parfaite¹³ de telle sorte que, le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -\nabla V$ étant la seule force au travail, l'énergie $E = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + V$ soit bien une constante du mouvement.

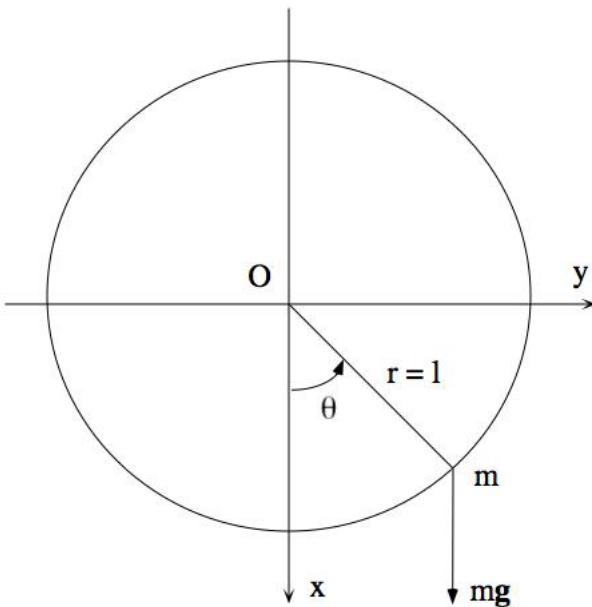


FIGURE 8.9 – Pendule simple

Adoptons des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du pendule associées à la direction de \vec{g} comme dans la Fig. 8.9. Le rayon du pendule sera $r = \ell = \text{const.}$. L'énergie potentielle $V = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$ (cf. (4.2.14)) s'exprime alors comme fonction de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale :

$$V(\theta) = -mg\ell \cos \theta. \quad (8.4.1)$$

13. La force de liaison ne travaille pas car elle est, en l'absence de frottements, orthogonale à la trajectoire.

La vitesse du pendule étant donnée par (3.2.15), i.e. $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, l'énergie devient

$$E = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell \cos \theta = \text{const.} \quad (8.4.2)$$

Il s'ensuit que $\dot{E} = m\ell^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + (g/\ell)\sin \theta) = 0$.

On en déduit donc, comme dans l'Exercice 4.3.2, l'équation *non linéaire* du mouvement du pendule simple

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}} \quad (8.4.3)$$

valable génériquement en tout point où $\dot{\theta} \neq 0$. Nous ne chercherons pas à l'intégrer !

Le potentiel (8.4.1) est donné par la fonction périodique $\cos \theta$ qui possède des extrema $V_0^\pm = \pm mg\ell$.

- Le point $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ est un minimum (absolu) car $V''(0) = mg\ell > 0$: c'est une position d'équilibre stable.
- Le point $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ est un maximum (absolu) car $V''(0) = -mg\ell < 0$: c'est une position d'équilibre instable.

Période des petits mouvements

Linéarisons donc l'équation (8.4.3) au voisinage de la position d'équilibre stable $\theta_0 = 0$ en posant, cf. (8.3.10), $\theta(t) = 0 + \varepsilon\theta_1(t)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$ comme “petit paramètre”.

On déduit du développement de Taylor : $\sin(\varepsilon\theta_1) = \varepsilon\theta_1 - (\varepsilon\theta_1)^3/6 + \dots$ que

$$\ddot{\theta}_1 + \omega^2 \theta_1 \cong 0 \quad (8.4.4)$$

modulo des termes d'ordre supérieur en ε .

La période $T = 2\pi/\omega$ des petits mouvements est donc bien indépendante des conditions initiales $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$, à savoir :

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}} \quad (8.4.5)$$

Nous allons voir qu'il n'en est plus ainsi — contrairement à ce que conjecturait Galilée — dans le cas des grandes élongations.

Remarque 8.4.1. Si l'on désire appliquer directement la formule (8.3.11) donnant la période des petits mouvements, penser à utiliser l'abscisse curviligne $x = \ell\theta$, homogène à une longueur!

Période des grands mouvements

Calculons maintenant¹⁴ la période $T(\theta_0)$ du pendule dans le cas d'une élongation initiale $\theta_0 = \theta(0)$ pas nécessairement "petite", $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$, la vitesse initiale étant supposée nulle, $\dot{\theta}(0) = 0$.

La loi de conservation (8.4.2) de l'énergie entraîne $\dot{\theta}^2 = (2g/\ell)(\cos \theta - \cos \theta_0)$. La période est donc donnée par $4/4$ de période

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta}}$$

en utilisant l'identité : $\cos \theta \equiv 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$.

Il est possible de poser $\sin u = \sin \frac{1}{2}\theta / \sin \frac{1}{2}\theta_0$ puisque $|\theta(t)| \leq \theta_0$ à tout instant t et d'effectuer le changement de variable $\theta \mapsto u$. Un calcul élémentaire montre que

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \sin^2 u}}$$

c'est-à-dire

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} K \left(\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 \right) \quad (8.4.6)$$

où K désigne l'intégrale elliptique de première espèce :

$$K(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - s \sin^2 u}}.$$

La période (8.4.6) est une fonction croissante de l'élongation initiale θ_0 . On prouve qu'elle possède les deux comportements asymptotiques suivants

$$T(\theta_0) \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \theta_0 \rightarrow \pm\pi \quad (8.4.7)$$

et

$$T(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right] \quad (8.4.8)$$

caractéristiques des intégrales elliptiques.

14. Cette sous-section pourra être ignorée lors d'une première lecture.

On retrouve, bien sûr, l'expression (8.4.5) de la période T dans le cas des petites élongations où $\theta_0 = O(\varepsilon)$.

8.4.2 Potentiel de Lennard-Jones

Ce potentiel, déjà rencontré dans le Paragraphe 8.3.1, décrit l'interaction interatomique étudiée en physique moléculaire ; il est de la forme

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \quad \text{où} \quad V_0 > 0 \quad (8.4.9)$$

et possède un graphe du même type que celui de la Fig. 8.4.

Le calcul de V' confirme immédiatement que $V'(r_0) = 0$, donc que r_0 est bien point critique du potentiel. (On trouve, en effet, $V'(r) = 12 V_0 (r^6 - r_0^6) r_0^6 / r^{13}$.)

On trouve de plus $V''(r) = 12 V_0 [13 r_0^6 - 7 r^6] r_0^6 / r^{14}$, donc $V''(r_0) = 72 V_0 / r_0^2 > 0$. La pulsation des vibrations (petits mouvements) de la molécule diatomique est alors donnée par (8.3.10) :

$$\omega = \frac{6}{r_0} \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \quad (8.4.10)$$

où m désigne la masse réduite du système.

8.4.3 Potentiel de Higgs

Linéarisons l'équation du mouvement d'une particule de masse m plongée dans le champ de force dérivant du **potentiel de Higgs**,¹⁵ donné par le polynôme quartique

$$V(x) = \frac{\kappa}{8} (x^2 - x_0^2)^2 \quad (8.4.11)$$

où $x_0 \neq 0$ et $\kappa > 0$ sont deux paramètres de la théorie.

Le graphe du potentiel représenté sur la Fig. 8.10 est familièrement appelé le “chapeau mexicain”.

Les points critiques du potentiel — les positions d'équilibre — sont les solutions de $V'(x) = \frac{1}{2}\kappa x(x^2 - x_0^2) = 0$, à savoir $\{-x_0, 0, x_0\}$.

15. Ce potentiel, associé au boson de Higgs activement recherché expérimentalement, joue un rôle important en théorie des interactions électrofaibles : il fournit la masse des particules fondamentales que sont les W et le Z .

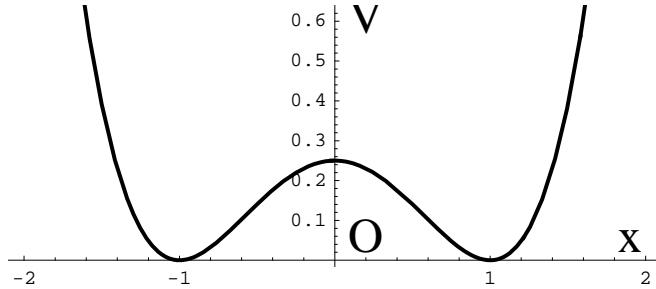


FIGURE 8.10 – Potentiel de Higgs

Le calcul de la dérivée seconde du potentiel, $V''(x) = \frac{1}{2}\kappa(3x^2 - x_0^2)$, donne immédiatement $V''(\pm x_0) = \kappa x_0^2 > 0$ et $V''(0) = -\frac{1}{2}\kappa x_0^2 < 0$. Les deux minima $\pm x_0$ sont donc des positions d'équilibre stable.

La période des petits mouvements, donnée par (8.3.11), est donc

$$T = \frac{2\pi}{|x_0|} \sqrt{\frac{m}{\kappa}}. \quad (8.4.12)$$

8.4.4 Pendule cycloïdal

Un point matériel de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur une arche de cycloïde (déjà rencontrée en (1.2.5)) d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}a(u - \sin u) \\ y = \frac{1}{4}a(1 - \cos u) \end{cases} \quad (8.4.13)$$

avec $a = \text{const.} > 0$ et $u \in [0, 2\pi]$. Voir la Fig. 8.11. Le système est plongé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g \vec{e}_y$, avec $g = \text{const.} > 0$.

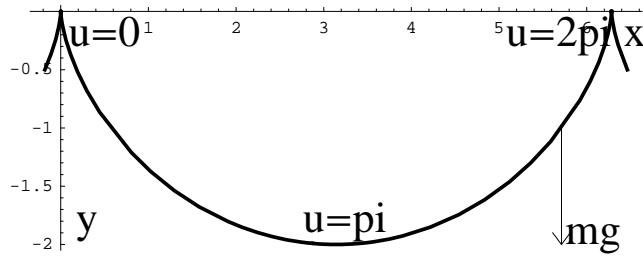


FIGURE 8.11 – Pendule cycloïdal

Pour établir l'équation du mouvement de ce pendule, nous utiliserons comme au Paragraphe 8.4.1 la loi de conservation de l'énergie.

Il s'avère aussi judicieux de considérer plutôt l'abscisse curviligne, $s = \int v(u) du$, comme paramètre de la courbe (ici $v(u) = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}$ est la vitesse scalaire).

On trouve ainsi la primitive suivante : $s = \frac{1}{2}a \int \sin \frac{1}{2}u du$ que l'on détermine en fixant l'origine, $s = 0$, de l'abscisse curviligne au minimum, $u = \pi$, du potentiel. Il vient donc

$$s = -a \cos \frac{u}{2}. \quad (8.4.14)$$

L'énergie potentielle $V = -m\vec{g} \cdot \vec{r} = -mgy$ est alors égale, grâce à (8.4.13), à $V = -\frac{1}{4}mga(1 - \cos u) = -\frac{1}{2}mga \sin^2 \frac{1}{2}u$. Il vient donc, eu égard à (8.4.14),

$$V(s) = -\frac{1}{2}mga \left[1 - \frac{s^2}{a^2} \right].$$

L'énergie totale, $E = \frac{1}{2}mv^2 + V$, est alors donnée par

$$E = \frac{1}{2}m \left[\dot{s}^2 + \frac{g}{a}s^2 \right] - \frac{1}{2}mga = \text{const.}$$

Le mouvement du pendule est donc régi pas l'équation $\dot{E} = 0$, c'est-à-dire par l'équation différentielle

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0 \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (8.4.15)$$

L'équation du mouvement du pendule cycloïdal est, de manière remarquable, une **équation différentielle linéaire**, du second ordre et à coefficients constants. Il y a donc **isochronisme** des oscillations du pendule cycloïdal, à savoir : sa période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (8.4.16)$$

est, à la différence de celle du pendule simple, strictement indépendante des conditions initiales. Ce résultat était connu de Christiaan Huygens (1629–1695) qui l'a utilisé pour construire un prototype de pendule cycloïdal dont la régularité extraordinaire est garantie par l'isochronisme de ses oscillations.

8.5 Un oscillateur forcé : le ciel

Mais quelle est donc la *couleur du ciel* ?

8.5.1 Le modèle de J.J. Thomson

Quelles sont les longueurs d'ondes rayonnées préférentiellement par les atomes constituant la couche atmosphérique ? On se propose ainsi de déterminer l'énergie électromagnétique rayonnée par les électrons périphériques de ces atomes sous l'action de la lumière solaire.

Décrivons succinctement le modèle de Joseph John Thomson (1856–1940), prix Nobel de Physique 1906 (découverte de l'électron).

- Les électrons périphériques des atomes sont liés aux noyaux par une force de rappel $\vec{F}_{\text{Hooke}} = -m\omega_0^2 \vec{r}$ où \vec{r} désigne la position, m la masse et ω_0 la pulsation propre de ces oscillateurs harmoniques.
- Les électrons, de vitesse \vec{v} , sont soumis à une force de friction $\vec{F}_{\text{Friction}} = -\eta \vec{v}$ (avec $\eta = \text{const.} > 0$) due à la présence des autres atomes.
- Les électrons, de charge électrique q , sont enfin soumis à la force excitatrice de Coulomb $\vec{F}_{\text{Coulomb}} = q \vec{E}$ due au champ électromagnétique du rayonnement solaire

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad (8.5.1)$$

de pulsation ω et d'amplitude $\vec{E}_0 \in \mathbf{R}^3$.

Les équations du mouvement de Newton : $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{Hooke}} + \vec{F}_{\text{Friction}} + \vec{F}_{\text{Coulomb}}$ prennent donc, en posant $\alpha = \eta/(2m)$, la forme suivante

$$\ddot{\vec{r}}(t) + 2\alpha \dot{\vec{r}}(t) + \omega_0^2 \vec{r}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \cos(\omega t). \quad (8.5.2)$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles affines du second ordre à coefficients constants ; le second membre est, ici, une fonction *périodique* du temps.

Nous supposerons désormais la fréquence propre des atomes très supérieure à la fréquence du rayonnement solaire ; nous supposerons de plus la friction faible :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \cong \frac{\alpha}{\omega_0} \ll 1. \quad (8.5.3)$$

La solution générale de (8.5.2) est donc donnée, en posant $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, par

$$\vec{r}(t) = e^{-\alpha t} \left[\vec{A} \cos(\Omega t) + \vec{B} \sin(\Omega t) \right] + \vec{r}_{\mathbf{R}}(t) \quad (8.5.4)$$

avec $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbf{R}^3$ et $\vec{r}_{\mathbf{R}}(t)$ une solution particulière de l'équation inhomogène.

Remarquons que, dans la limite des grands temps, la solution générale (pseudo-oscillatoire) s'amortit exponentiellement et la position de l'électron est simplement donnée par solution particulière choisie ; on a bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{r}(t) - \vec{r}_{\mathbf{R}}(t)\| = 0. \quad (8.5.5)$$

8.5.2 Réponse aux excitations solaires

Considérons, pour la commodité du calcul, le prolongement complexe de l'équation différentielle (8.5.2) de la forme

$$\ddot{\vec{r}}(t) + 2\alpha \dot{\vec{r}}(t) + \omega_0^2 \vec{r}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (8.5.6)$$

où \vec{r} est, a priori, une fonction à valeurs complexes. Nous allons ainsi pouvoir tester une solution particulière de (8.5.6) du type

$$\vec{r}_{\mathbf{C}}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \quad (8.5.7)$$

où $\vec{r}_0 \in \mathbf{C}^3$ reste à déterminer en fonction des constantes du problème. Cherchons donc une solution complexe du type (8.5.7), quitte à utiliser, en fin de compte, sa partie réelle

$$\vec{r}_{\mathbf{R}}(t) = \text{Re}(\vec{r}_{\mathbf{C}}(t)) \quad (8.5.8)$$

comme véritable solution physique de (8.5.2). Nous avons $\dot{\vec{r}}_{\mathbf{C}} = i\omega \vec{r}_{\mathbf{C}}$ et $\ddot{\vec{r}}_{\mathbf{C}} = i\omega \dot{\vec{r}}_{\mathbf{C}}$, d'où

$$\ddot{\vec{r}}_{\mathbf{C}}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{\mathbf{C}}(t). \quad (8.5.9)$$

En reportant ceci dans (8.5.6), il vient $(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2)\vec{r}_0 = (q/m)\vec{E}_0$ et donc

$$\vec{r}_0 = \frac{q \vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega)}. \quad (8.5.10)$$

L'oscillateur vibre parallèlement au champ électrique avec un déphasage dû au coefficient de friction α . La solution particulière exacte recherchée est donc (cf. (8.5.8)) :

$$\vec{r}_{\mathbf{R}}(t) = \frac{q \vec{E}_0}{m} \text{Re} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \right).$$

8.5.3 Puissance rayonnée par le ciel

La théorie de Maxwell nous apprend qu'une particule chargée *accélérée* rayonne de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques. La puissance P de ce rayonnement est proportionnelle à la norme carrée de l'accélération (complexe !) \vec{a}_C , à savoir

$$P \propto \|\vec{a}_C\|^2. \quad (8.5.11)$$

(Rappelons que $\|\vec{a}_C\|^2 = (\vec{a}_C)^* \cdot \vec{a}_C$, l'étoile désignant ici la conjugaison complexe.)

Grâce à (8.5.9), on trouve aisément $P \propto \omega^4 \|\vec{r}_C\|^2$ où ω est la pulsation de l'onde excitatrice, donc de l'onde rayonnée par les électrons.

Prenant en considération les approximations (8.5.3), on déduit de (8.5.7) et (8.5.10) le résultat recherché

$$P \propto \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \|\vec{E}_0\|^2. \quad (8.5.12)$$

Sachant que la longueur d'onde λ et la pulsation d'une onde électromagnétique sont reliées par $\lambda = 2\pi c/\omega$ (où c désigne la vitesse de la lumière dans le milieu), on a donc $P \propto (\lambda_0/\lambda)^4 \|\vec{E}_0\|^2$.

Si on considère les longueurs d'ondes $\lambda_{\text{rouge}} \cong 780 \text{ nm}$ et $\lambda_{\text{bleu}} \cong 470 \text{ nm}$ des parties extrêmes du spectre visible, on trouve le rapport des puissances rayonnées

$$\frac{P_{\text{bleu}}}{P_{\text{rouge}}} = \left(\frac{\lambda_{\text{rouge}}}{\lambda_{\text{bleu}}}\right)^4 \quad (8.5.13)$$

$$\cong \frac{78^4}{47^4} \quad (8.5.14)$$

$$\cong 7,6 \quad (8.5.15)$$

prouvant que les électrons des atomes atmosphériques rayonnent essentiellement dans le **bleu** ... en plein jour !

Chapitre 9

Problèmes choisis

9.1 Hooke & Galilée

1) On désigne par $\vec{r} \in \mathbf{R}^3$ la position et par $t \in \mathbf{R}$ la date d'un événement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Soit \mathcal{R}^* le référentiel déduit de \mathcal{R} par la transformation

$$(\diamondsuit) \quad \begin{cases} \vec{r}^* = \vec{r} - \vec{v}_0 t - \vec{r}_0 \\ t^* = t \end{cases}$$

où $\vec{r}_0, \vec{v}_0 \in \mathbf{R}^3$ sont des vecteurs constants donnés. Calculez la vitesse \vec{v}^* d'un point matériel dans \mathcal{R}^* en fonction de sa vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} et de \vec{v}_0 .

2) Calculez son accélération \vec{a}^* dans le nouveau référentiel \mathcal{R}^* en fonction de son accélération \vec{a} dans \mathcal{R} . Peut-on en déduire que \mathcal{R}^* est galiléen ?

3) Un point matériel de masse m est plongé dans le champ de force de Hooke donné, dans \mathcal{R} , par

$$\vec{F} = -k \vec{r} \quad \text{où} \quad k = \text{const.} > 0.$$

Ecrire les équations du mouvement du point matériel soumis à cette seule force (on posera utilement $\omega = \sqrt{k/m}$).

4) Donnez la solution générale des équations du mouvement du système. En déduire la trajectoire $\vec{r}(t)$ pour les conditions initiales

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} -\omega R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $R = \text{const.} > 0$. Quel est le mouvement du point matériel dans le référentiel \mathcal{R} ?

5) Déterminez la trajectoire de notre point matériel dans le référentiel \mathcal{R}^* défini en (\diamondsuit) dans le cas où $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ et $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$. Quel est le nom de cette courbe ?

9.2 Radar routier

- 1) Un radar est posté sur une route droite en $x = 0$. Une voiture le croise à vitesse constante $v > 0$ à l'instant $t = 0$. Donner la position $x(t)$ de la voiture à chaque instant. Tracer les lignes d'univers du radar et de la voiture.
 - 2) Le radar émet un premier signal électromagnétique lors du croisement ; ce signal, réfléchi par la voiture, revient donc instantanément sur le radar. Le signal suivant est émis au temps T_E à la vitesse de la lumière $c > 0$ et atteint la voiture au temps T . Réfléchi par la voiture à la vitesse $-c$, ce signal est reçu par le radar au temps T_R . Compléter le précédent diagramme par la ligne d'univers du second signal.
 - 3) Calculer le temps T en fonction de T_E et de $\beta = v/c$.
 - 4) Donner l'expression du rapport des périodes T_R/T_E en fonction de β .
 - 5) Donner enfin la formule approchée du rapport des fréquences ν_R/ν_E utilisée par la police pour le trafic routier au premier ordre en $\beta \ll 1$.
- A.N.* Quelle est la vitesse v d'une voiture "flashée" à $(\nu_R - \nu_E)/\nu_E = -2 \cdot 10^{-7}$? On prendra $c \cong 300000 \text{ km s}^{-1}$.

9.3 Lois de Descartes

- 1) Rappeler le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) pour une particule d'impulsion $\vec{p}(t)$ dans un champ de force \vec{F} donné.
- 2) Un électron traverse un dioptrre plan (d'équation $x = 0$) séparant deux régions à l'intérieur d'un microscope électronique (cf. Figure 9.2) ; la force \vec{F} à laquelle il est soumis est de nature purement électrostatique et dérive du potentiel (énergie potentielle) :

$$V(x, y) = \begin{cases} V_1 & \text{si } x < 0 \\ V_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où V_1 et V_2 sont des constantes. Trouver la deuxième composante F_y de cette force.

N.B. On ne demande pas F_x !

- 3) Soit \vec{p}_1 l'impulsion de l'électron avant la traversée du dioptrre et \vec{p}_2 son impulsion après cette traversée. Déduire des questions (1) et (2) la valeur de $\Delta p_y = p_{1y} - p_{2y}$.

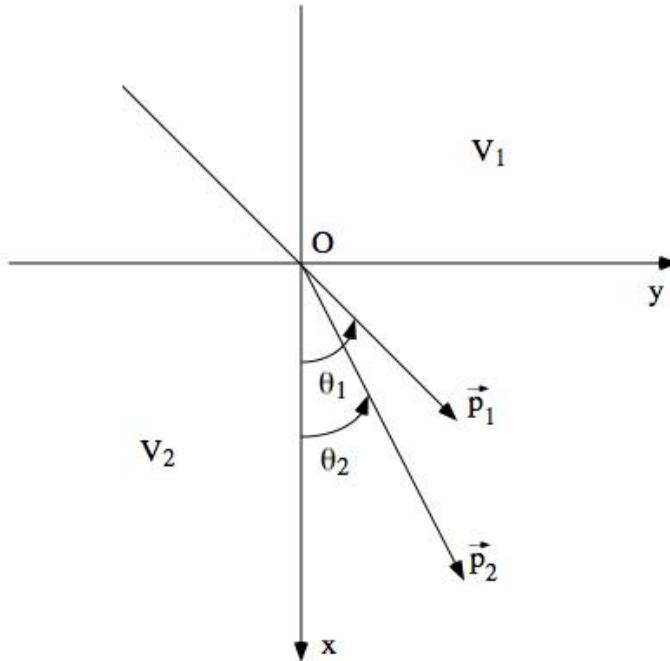


FIGURE 9.1 – Réfraction

4) Si θ_1 désigne l'angle d'incidence et θ_2 l'angle de réfraction (cf. Figure 9.1), *montrer* que la trajectoire de l'électron satisfait à la loi de réfraction de Descartes :

$$(?) \quad \sin \theta_1 = n \sin \theta_2$$

où l'indice n sera *exprimé* en fonction des normes p_1 et p_2 des impulsions.

5) *Justifier* que l'énergie totale E est conservée au passage du dioptrre. En *déduire* l'expression du rapport p_2^2/p_1^2 en fonction de l'énergie cinétique incidente T_1 de l'électron et de $\Delta V = V_1 - V_2$. *Donner* enfin l'indice n en fonction de ces mêmes quantités.

6) *A.N.* Pour une différence de potentiel $\Delta V > 0$ fixée, un faisceau d'électrons d'énergie cinétique T_1 telle que $\Delta V \leq T_1 \leq 2\Delta V$ a un angle d'incidence $\theta_1 = 45^\circ$. *Trouver* le domaine de variation $n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$ de l'indice. *Déterminer* la dispersion angulaire $\theta_{2\min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2\max}$ du faisceau réfracté.

7) Pour *quelles* valeurs de T_1 la loi de réfraction (?) tombe-t-elle en défaut dans le cas répulsif $\Delta V < 0$? Utiliser les lois de conservation précédentes pour *trouver*, dans ces conditions, l'expression ...et le nom de la nouvelle loi de diffusion.

9.4 Petits mouvements

On rappelle que l'énergie potentielle d'un système de deux charges électriques e_1 et e_2 est $V(r) = e_1 e_2 / r$ où $r > 0$ est la distance des deux charges.

1) On considère deux charges *fixes* sur l'axe des x . La première, e_1 , est localisée en $x = 0$ et l'autre, e_2 , en $x = a > 0$. Une troisième particule, de masse m_0 et de charge e_0 , se déplace sur l'axe du système. Montrer que si sa position, x , est telle que

$$0 < x < a, \quad (9.4.1)$$

son énergie potentielle est alors

$$V(x) = \frac{e_0 e_1}{x} + \frac{e_0 e_2}{a - x}. \quad (9.4.2)$$

2) Déduire de l'expression (9.4.2) la force $F(x)$ à laquelle est soumise cette troisième particule en tout point x vérifiant (9.4.1).

3) On recherche les positions d'équilibre de cette particule dans l'intervalle (9.4.1). Montrer qu'il existe une unique position d'équilibre, x_0 , si e_1 et e_2 ont même signe ; exprimer x_0 en fonction de la distance a et du rapport e_2/e_1 des deux charges.

4) *Question de cours.* Poser $x(t) = x_0 + \varepsilon X(t)$ avec $\varepsilon \ll 1$ et montrer que l'équation du mouvement de la particule devient (au premier ordre en ε)

$$m_0 \ddot{X}(t) + V''(x_0) X(t) = 0. \quad (9.4.3)$$

Pour quel signe de $V''(x_0)$ — la dérivée seconde de V au point x_0 — les solutions de (9.4.3) décrivent-elles des *petits mouvements* ?

5) En déduire le signe de la charge e_0 pour lequel la position x_0 (calculée à la question 3) est une position d'équilibre *stable*.

6) On suppose que $e_1 = e_2 = e_0$. Est-ce que x_0 est alors une position d'équilibre stable ? Si tel est le cas, exprimer la *pulsation* ω des petits mouvements en fonction de la distance a des deux premières charges, de la charge e_0 et de la masse m_0 de la troisième particule.

9.5 Aberration des étoiles

On désigne par (x, y) la position et par t la date d'un événement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Soit \mathcal{R}^* le référentiel déduit de \mathcal{R} par la transformation

$$(\diamondsuit) \quad \begin{cases} x^* = x - v_0 t \\ y^* = y \\ t^* = t \end{cases}$$

où v_0 est une vitesse constante donnée.

1) Trouver l'expression de la vitesse (v_x^*, v_y^*) d'un point matériel dans \mathcal{R}^* en fonction de sa vitesse (v_x, v_y) dans \mathcal{R} et de v_0 .

2) Un rayon de lumière issu d'une étoile fait un angle θ avec l'écliptique représenté par l'axe des x . Donner la vitesse (v_x, v_y) de ce photon dans le référentiel \mathcal{R} lié au soleil en fonction de θ et de la vitesse de la lumière $c = \text{const.} > 0$ dans le vide. $\mathcal{N.B.}$ Vérifier que $\tan \theta = v_y/v_x$.

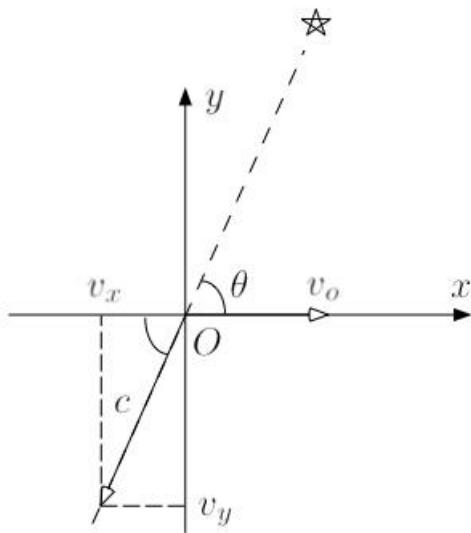


FIGURE 9.2 – Lumière des étoiles

3) Comme en (\diamondsuit) , désignons par v_0 la vitesse instantanée de la terre \mathcal{R}^* par rapport au soleil \mathcal{R} (voir Figure 9.2). Calculer v_y^*/v_x^* et exprimer l'angle θ^* du rayon lumineux pour un astronome en fonction de l'angle θ et de $\beta = v_0/c$.

4) L'astronome James Bradley (1728) désire observer une étoile au zénith ($\theta = \pi/2$). Trouver, en fonction de β , l'angle $\alpha = \theta - \theta^*$ (très petit !) dont il doit incliner son télescope pour observer cette étoile ? $\mathcal{N.B.}$ Utiliser l'approximation $\tan \alpha \cong \alpha$.

5) *A.N.* Sachant que $v_0 \cong 30 \text{ km s}^{-1}$ et $c \cong 300\,000 \text{ km s}^{-1}$ trouver l'ordre de grandeur de l'angle d'aberration α .

9.6 Force de Lorentz & friction

A) On étudie les mouvements d'une particule de masse m et de charge électrique q dans un champ magnétique $\vec{B} = (0, 0, B)$ tel que $\omega = qB/m = \text{const.} \neq 0$ (négliger la pesanteur). On cherche donc à trouver la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$ déterminée par la position (x_0, y_0, z_0) et la vitesse (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) de la particule à l'instant $t = 0$.

1) Sachant que la force agissant sur cette particule de vitesse \vec{v} est

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \vec{v} \times \vec{B},$$

exprimer l'accélération $(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z)$ en fonction de la vitesse (v_x, v_y, v_z) et de ω .

2) Trouver $v_z(t)$ puis $z(t)$ à chaque instant t pour les conditions initiales z_0 et v_{z0} .

3) Remarquer que \dot{v}_y s'exprime en fonction de v_x et ω pour montrer que $\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0$. Donner la solution générale $v_x(t)$ de cette équation différentielle. En déduire $v_y(t)$.

4) Trouver $v_x(t)$ et $v_y(t)$ pour les conditions initiales v_{x0} et v_{y0} .

5) Exprimer enfin $x(t)$ et $y(t)$ pour les conditions initiales x_0, y_0, v_{x0} et v_{y0} .

6) Montrer que la projection $(x(t), y(t))$ de la trajectoire sur le plan $z = 0$ est un cercle dont on donnera le centre (c_x, c_y) et le rayon R en fonction des conditions initiales et de ω .

7) Quelle est la nature géométrique de la trajectoire dans l'espace tridimensionnel ?

B) Pour décrire plus finement les mouvements de notre particule, il faut considérer la force supplémentaire $\vec{F}_{\text{Friction}} = -\eta \vec{v}$ due à la friction sur le milieu ambiant ($\eta = \text{const.} > 0$).

8) Modifier les équations du mouvement de la question (1) en tenant aussi compte de cette force de friction et en posant $\alpha = \eta/m$.

9) Donner $v_z(t)$ et $z(t)$ en fonction de z_0, v_{z0} et α . Calculer $z_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$.

Pour déterminer maintenant la projection de la trajectoire sur le plan $z = 0$ (que l'on va identifier au plan complexe), on posera utilement $Z = x + iy$ et $V = v_x + iv_y$.

10) Déterminer, grâce aux équations du mouvement trouvées en (8), l'accélération \dot{V} en fonction de V et $\alpha + i\omega$. En déduire la vitesse $V(t)$ pour la condition initiale $V_0 = V(0)$.

11) Donner enfin la courbe $Z(t)$ pour les conditions initiales $Z_0 = Z(0)$ et V_0 .

12) Montrer que la courbe $Z(t)$ s'enroule autour du point $Z_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t)$ que l'on déterminera en fonction de V_0 , Z_0 et $\alpha + i\omega$. Trouver son équation $r = f(\theta)$ en coordonnées polaires définies par $re^{i\theta} = Z(t) - Z_\infty$. Quelle est la nature géométrique de cette courbe ?

9.7 Rentrée dans l'atmosphère

Un satellite de masse m est en orbite autour de la terre de masse M et de rayon R . Son énergie potentielle au point \vec{r} à la distance $r \geq R$ du centre de la terre est donnée par

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

où G désigne la constante de Newton.

- 1) Calculer le poids $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ du satellite au point \vec{r} .
- 2) Que représente la quantité $g = GM/r^2$?
- 3) Le satellite est en orbite circulaire de rayon $r = \text{const.}$; déduire du principe fondamental de la dynamique que sa vitesse \vec{v} a pour norme

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

- 4) Calculer l'énergie totale E du satellite; montrer que E s'exprime simplement en fonction de l'énergie cinétique T uniquement.

Ce satellite entre maintenant dans les couches supérieures de l'atmosphère : il est soumis à la force totale $\vec{F} + \vec{f}$ où \vec{f} est une force de frottement due à l'air.

- 5) L'énergie totale $E = T + V$ du satellite n'est plus conservée; prouver que

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

6) On admet que la force de frottement \vec{f} est opposée à la vitesse \vec{v} et de norme $f \cong \text{const.}$ sur de courts laps de temps. *Montrer* que le travail de \vec{f} pendant une révolution (un tour de la terre) est $W = -2\pi r f$. *Déduire* alors de la question (5) la variation d'énergie $E_2 - E_1$ du satellite pendant le temps d'une révolution, $t_2 - t_1$.

7) La vitesse du satellite est égale à v au temps t_1 et à $v + \Delta v$ au temps t_2 , après une révolution. *Calculer* la variation d'énergie cinétique $T_1 - T_2$ correspondante. Négliger le terme $(\Delta v)^2$ pour la variation de vitesse Δv en fonction de v , f et mg .

8) *Donner* le signe de Δv et *énoncer* le “paradoxe du satellite”.

9.8 Voyage autour et au centre de la terre

A) Un satellite de masse m est en orbite autour de la terre, de masse M et de rayon R . (La densité de masse de la terre est constante et sa surface parfaitement sphérique.)

1) Connaissant le potentiel newtonien au point \vec{r} à la distance r du centre de la terre :

$$V_{\text{ext}} = -\frac{GMm}{r}, \quad (r \geq R)$$

déterminer le poids \vec{F}_{ext} et l'accélération \vec{g}_{ext} du satellite en ce point extérieur à la terre. Exprimer l'intensité $g = \|\vec{g}_{\text{ext}}\|$ de l'accélération de la pesanteur au niveau du sol, en fonction de G , M et R .

2) Prouver la troisième loi de Kepler pour les orbites de rayon $r = \text{const.}$

3) Notre satellite est désormais en orbite rasante de rayon $r = R$; déduire de la question précédente sa vitesse v_{ext} et sa période de révolution T_{ext} en fonction de R et de g .

4) *A.N.* Calculer T_{ext} en prenant $R \cong 6400$ km et $g \cong 10 \text{ m s}^{-2}$.

B) La théorie de Newton donne aussi l'accélération de la gravitation à l'intérieur de la terre :

$$\vec{g}_{\text{int}} = k \vec{r} \quad (0 \leq r \leq R)$$

au point \vec{r} distant de r du centre de la terre; la constante k dépend de G , M et R .

- 5) Déterminer k sachant que \vec{g}_{int} et \vec{g}_{ext} doivent coïncider sur la surface terrestre.
- 6) Un tunnel étroit relie les pôles Nord et Sud via le centre de la terre ! Faire un graphique. Ecrire les équations du mouvement d'un vaisseau spéléologique circulant dans ce tunnel ; donner sa position $\vec{r}(t)$ à l'instant t , connaissant sa position \vec{r}_0 et sa vitesse \vec{v}_0 à $t = 0$.
- 7) Montrer que ce mouvement est périodique ; exprimer sa période T_{int} en fonction des données du problème, et la comparer à T_{ext} .
- C) Le satellite croise au pôle Nord le vaisseau spéléologique, immobile à cet instant.
- 8) Quelle sera la vitesse v_{max} du vaisseau au centre de la terre ? Quelle sera sa position au moment où le satellite passera au dessus du pôle Sud ?

9.9 L'équation du sprinter

Lors d'une compétition sportive, la vitesse $v(t)$ d'un coureur à pied sur des distances inférieures à 200 m satisfait à l'équation suivante¹

$$\frac{dv}{dt} = A - B v(t) \quad (\diamond)$$

où A et B sont des constantes positives données.

- 1) Quelles sont les dimensions physiques de A et de B ?
- 2) Trouver la solution générale de l'équation différentielle (\diamond) .
- 3) Sachant que le signal du départ est donné au temps $t = 0$, trouver la vitesse $v(t)$ du sprinter à chaque instant $t \geq 0$.
- 4) Montrer qu'il existe une vitesse limite

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

que l'on exprimera en fonction de A et de B .

- 5) Trouver l'accélération $a(t)$ au temps t . Exprimer A en fonction de l'accélération initiale

$$a_0 = a(0).$$

- 6) Déterminer la position $x(t)$ du coureur au temps t si $x(0) = 0$.

1. J. B. Keller, "A theory of competitive running", *Physics Today*, 43, Sept. 1973. Consulter aussi le site : <http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/engin/sprints/index.html>

- 7) Tracer la ligne d'univers du sprinter. Montrer qu'elle possède une asymptote dont on déterminera l'équation.
- 8) Calculer explicitement la quantité $T(t) = v(t)/a_0 + x(t)/v_\infty$.
- 9) Déduire de la question précédente la durée t_1 du sprint en fonction de la vitesse v_1 du coureur sur la ligne d'arrivée, de la longueur x_1 de la piste, et des données a_0 et v_∞ .
- 10) Un coureur atteint la distance $x_1 = 100$ m à la vitesse $v_1 = 11,5$ m s⁻¹. Il possède les caractéristiques physiques (et physiologiques) suivantes : $a_0 = 7$ m s⁻² et $v_\infty = 12,2$ m s⁻¹. Quel temps t_1 a-t-il "fait" lors de son sprint (record mondial) ?

9.10 Loi de Hubble

Chaque galaxie (ou nébuleuse d'étoiles) possède, à tout instant $t > 0$, une vitesse $\vec{v}(t)$ proportionnelle à sa position $\vec{r}(t)$ par rapport à notre galaxie (la Voie lactée) : c'est la loi de Hubble

$$\vec{v}(t) = H(t) \vec{r}(t) \quad (\heartsuit)$$

où la fonction $H(t)$ donne la vitesse d'expansion de l'Univers.

- 1) Dans un modèle d'univers newtonien, la trajectoire de chaque galaxie est de la forme

$$\vec{r}(t) = \vec{A} t^{2/3}$$

où \vec{A} est un vecteur constant. *Exprimer* la vitesse $\vec{v}(t)$ d'une galaxie en fonction de \vec{A} .

- 2) *Vérifier* que la vitesse $\vec{v}(t)$ ainsi déduite de $\vec{r}(t)$ satisfait bien à la loi (\heartsuit) ; en *déduire* la fonction $H(t)$.
- 3) Soit t_0 la date actuelle (aujourd'hui) ; *déterminer* la position $\vec{r}(t)$ d'une galaxie à chaque instant, en fonction de sa position actuelle $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ et de t_0 .
- 4) En *déduire* la vitesse $\vec{v}(t)$ de la galaxie en question, en fonction de \vec{r}_0 et t_0 .
- 5) *Calculer* l'accélération $\vec{a}(t)$ de cette galaxie. $\mathcal{N.B.}$ On pourra utiliser (\heartsuit).
- 6) *Déduire* de la deuxième loi de Newton que l'accélération du champ de gravitation galactique peut s'écrire sous la forme

$$\vec{g}(\vec{r}, t) = -K(t) \vec{r}$$

où $K(t)$ est une fonction que l'on donnera explicitement.

7) *Evaluer la quantité $\lim_{t \rightarrow 0} K(t)$. En déduire la valeur du champ de gravitation $\vec{g}(\vec{r}, t)$ à $t = 0$. Que représente donc cet instant “zéro” ?*

8) Les mesures (peu précises !) de la “constante de Hubble” $H_0 = H(t_0)$ dont on dispose actuellement conduisent à

$$H_0 \cong \frac{4}{9} 10^{-10} \text{ an}^{-1}.$$

Evaluer l’âge de l’Univers en milliards d’années.

9.11 Périhélie de comète

La force de gravitation s’exerçant sur un objet céleste au point \vec{r} , à la distance $r = \|\vec{r}\| > 0$ du soleil, est donnée par

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

où \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial, M la masse du soleil, m celle du corps céleste et G la constante de Newton.

1) *Déterminer le potentiel newtonien V , nul à l’infini, dont dérive \vec{F} .*

2) *En déduire l’énergie totale E d’un tel objet céleste possédant une vitesse \vec{v} au point \vec{r} .*

3) *Quel est le moment angulaire \vec{L} de ce corps par rapport à l’origine O ?*

4) *On observe une comète encore très éloignée du soleil (à l’infini !) : sa vitesse est \vec{v}_∞ ; voir la Fig. 9.3. Donner l’énergie totale E de cette comète en fonction de sa masse m et $v_\infty = \|\vec{v}_\infty\|$. Quelle est la nature de la trajectoire de cet objet céleste ?*

5) *On désigne par $d = \|\overrightarrow{OH}\|$ le “paramètre d’impact” de la comète (voir la Figure). Montrer que le moment angulaire a pour grandeur $L = \|\vec{L}\| = mdv_\infty$.*

6) *Calculer l’expression de L au périhélie r_0 (point le plus proche du soleil) où la vitesse de la comète est v_0 . En déduire v_0 en fonction de v_∞ , d et r_0 .*

7) *Déduire de l’expression de énergie totale E et des questions précédentes que $x_0 = d/r_0$ est racine d’un polynôme du second degré, $P(x)$, que l’on exprimera en fonction de la quantité sans dimension $\alpha = GM/(dv_\infty^2)$. Donner la distance r_0 du périhélie de notre comète en fonction des données à l’infini d et α .*

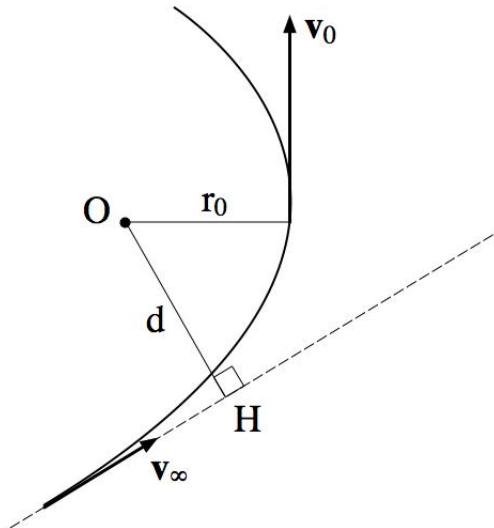


FIGURE 9.3 – Comète

9.12 Vitesse de libération

On considère une sonde spatiale de masse m soumise à la force de gravitation créée par une planète homogène, de rayon R et de masse M .

On se propose de déterminer la vitesse de lancement qui permettra à cette sonde d'échapper à l'attraction gravitationnelle de la planète.

1) L'énergie potentielle de la sonde en un point \vec{r} , à la distance $r \geq R$, du centre de la planète est, rappelons-le, donnée par

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

où G désigne la constante de Newton. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} V$, puis le poids \vec{P} de cet objet en \vec{r} .

2) Quelle est l'accélération \vec{g} de la pesanteur au point \vec{r} ? Donner son intensité, $g = \|\vec{g}\|$, au niveau du sol, en fonction de R et GM .

3) Si v_0 est la vitesse initiale de la sonde au moment du lancement, exprimer l'énergie totale E de cet objet en fonction de v_0 , R et des constantes du problème.

4) Cette sonde est destinée à atteindre l'infini à vitesse nulle. Quelle doit être la valeur de son énergie E ?

- 5) Quelle sera sa trajectoire ?
- 6) En déduire la valeur v_{Lib} (vitesse de libération) que doit avoir sa vitesse initiale v_0 .
- 7) Exprimer v_{Lib} en fonction de R et g .
- 8a) Le rayon de la terre (T) est $R_T = 6400$ km et l'accélération de la pesanteur au niveau du sol $g_T = 9,8$ m s $^{-2}$. En déduire la vitesse de libération v_{Lib}^T en km s $^{-1}$. $\mathcal{N.B.} 112^2 = 12544$.
- 8b) Le rayon de la planète Mars (M) est $R_M = \frac{1}{2}R_T$ et sa masse $M_M = \frac{1}{10}M_T$. Trouver la vitesse de libération martienne v_{Lib}^M en km s $^{-1}$. $\mathcal{N.B.}$ Prendre $\sqrt{5} \cong 2,24$.

9.13 Fusée à un étage

0) Soit \vec{r} la position et t la date d'un événement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Désignons par \mathcal{R}^* le référentiel déduit de \mathcal{R} par la transformation de Galilée pure de vitesse \vec{v}_0 , à savoir

$$\begin{cases} \vec{r}^* = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t^* = t. \end{cases}$$

Donner la vitesse \vec{v}^* d'un point matériel dans \mathcal{R}^* en fonction de sa vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} et de \vec{v}_0 .

On désire déterminer la vitesse $\vec{v}(t)$ d'une fusée, lancée du pas de tir à $t = 0$, grâce aux données fournies par le constructeur : (i) la masse $M(t) > 0$ de la fusée qui décroît strictement avec le temps t et (ii) la vitesse d'éjection des gaz \vec{c}^ constante par rapport à la fusée.*

A un instant t , la fusée a une masse $M(t)$ et une vitesse $\vec{v}(t)$ par rapport à la terre. A un instant ultérieur, $t + \Delta t$, la fusée éjecte une molécule de gaz de masse m et de vitesse \vec{c} par rapport à la terre ; la masse de la fusée est maintenant $M(t + \Delta t) = M(t) + \Delta M$ et sa vitesse $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$.

1) Donner, grâce à la loi de conservation de la masse totale, la relation entre la masse m d'une molécule de gaz et la variation ΔM de masse de la fusée. Quel est le signe de ΔM ?

2) Exprimer, à l'instant $t + \Delta t$, la vitesse d'éjection des gaz \vec{c} par rapport au référentiel terrestre (\mathcal{R}) en fonction de \vec{c}^* et de la vitesse $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ de la fusée (\mathcal{R}^*) par rapport à \mathcal{R} . **N.B.** Utiliser le résultat de la question (0).

3a) Donner l'impulsion $\vec{P}(t)$ de la fusée avant éjection d'une molécule de gaz.

3b) Après éjection du gaz, (i) quelle est l'impulsion de la molécule de gaz, (ii) quelle est celle de la fusée ? En déduire l'impulsion totale $\vec{P}(t + \Delta t)$ du système gaz-fusée.

3c) Le système gaz-fusée étant un système isolé (fermé), quelle loi de conservation utiliser maintenant ? Déduire de cette loi le rapport $\Delta\vec{v}/\Delta t$ en fonction de $M(t)$, $\Delta M/\Delta t$ et de la vitesse (constante !) \vec{c}^* du gaz par rapport à la fusée.

3d) Déterminer, en prenant la limite $\Delta t \rightarrow 0$ des quantités précédentes, l'accélération $d\vec{v}/dt$ de la fusée en fonction de $M(t)$, dM/dt et \vec{c}^* .

4) Intégrer l'équation différentielle précédente. En déduire la vitesse $\vec{v}(t)$ de la fusée à chaque instant t , en fonction de sa masse $M(t)$, de la masse initiale $M_0 = M(0)$ et de \vec{c}^* . **N.B.** Utiliser $\vec{v}(0) = \vec{0}$.

5) Donner l'énergie cinétique $T(t)$ de la fusée à l'instant t . Montrer que cette énergie possède un maximum pour une valeur M_1 de la masse que l'on déterminera en fonction de M_0 . Trouver la valeur correspondante \vec{v}_1 de la fusée en fonction de \vec{c}^* . Déterminer le maximum T_1 de l'énergie de la fusée en fonction de $M_0\|\vec{c}^*\|^2$.

Bibliographie

- [1] V. I. ARNOLD, “Huygens & Barrow, Newton & Hooke”, Birkhäuser (1990).
- [2] V. I. ARNOLD, “Méthodes mathématiques de la mécanique classique”, Editions Mir, Moscou (1976).
- [3] P. BAKOULINE, E. KONONOVTCH, V. MOROZ, “Astronomie générale”, Editions Mir, Moscou (1975).
- [4] M. LE BELLAC, “Introduction à la mécanique”, Belin Université (1985).
- [5] D. BERNARD, “Mécanique (*Sup MPSI-PCSI-PTSI*), Vols 1 & 2”, Masson (1995).
- [6] A. BOUYSSY ET AL., “Physique pour les sciences de la vie, Vol. 1”, Belin (1987).
- [7] A. BRAHIC, “Planètes & satellites”, Vuibert (2001).
- [8] J.-M. BRÉBEC ET AL., “Mécanique I (*Sup MPSI-PCSI-PTSI*)”, Hachette (1996).
- [9] R. P. FEYNMAN, “Lectures on Physics, Vol. 1”, Addison-Wesley (1963).
- [10] A. GIBAUD ET M. HENRY, “Cours de physique - Mécanique du point”, Dunod (2007).
- [11] C. KITTEL, “Mechanics, Berkeley physics course, Vol. 1”, McGraw-Hill (1965).
- [12] L. LANDAU & E. LIFCHITZ, “Mécanique”, Editions Mir, Moscou (1969).
- [13] H. LUMBROSO, “Problèmes résolus de mécanique du point”, Dunod Université, Bordas (1993).
- [14] L. VALENTIN, “L’univers mécanique”, Enseignement des Sciences, Hermann (1995).
- [15] F. VIOT, “Mécanique du point”, Dunod (1993).