

---

## MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

### Examen du 17 janvier 2005

*Durée : 3h. Sans document et sans calculatrice*

---

#### 1. Vitesse instantanée de rotation

On considère la matrice de rotation euclidienne suivante

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

où l'angle  $\theta(t)$  est une fonction différentiable du temps  $t$ .

- (i) Calculer son inverse  $A(t)^{-1}$  et sa dérivée temporelle  $\dot{A}(t)$ .
- (ii) Donner la matrice  $\dot{A}(t)A(t)^{-1}$ ; en déduire la vitesse instantanée de rotation  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

#### 2. Opérateur d'inertie

Soit  $\mathcal{S}$  un parallélépipède rectangle, solide homogène de masse  $M$  et de côtés  $a, b, c$ . On se donne un repère euclidien  $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z))$  d'origine le centre  $O$  de  $\mathcal{S}$ , parallélépipède décrit par  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , avec  $-\frac{1}{2}a \leq x \leq \frac{1}{2}a$ , ainsi que  $-\frac{1}{2}b \leq y \leq \frac{1}{2}b$  et  $-\frac{1}{2}c \leq z \leq \frac{1}{2}c$ .

- (i) Donner la densité de masse  $\rho$  du solide en fonction de  $M$  et  $a, b, c$ .
- (ii) Déterminer l'opérateur d'inertie  $I$  du parallélépipède par rapport à  $O$ . (Vérifier que sa matrice relativement à  $\mathcal{R}$  est diagonale.)

#### 3. Champ de vitesses

Soient  $M$  et  $N$  deux points appartenant à un solide  $\mathcal{S}$  en mouvement par rapport à un repère "fixe" d'origine  $O$ . On désigne par  $A$  la matrice de rotation définissant, à un instant donné, un repère mobile lié au solide et on pose  $\mathbf{MN} = A\mathbf{R}$ .

- (i) Justifier que  $\mathbf{ON} = \mathbf{OM} + A\mathbf{R}$  avec  $\mathbf{R} = \text{const.}$
- (ii) En déduire que les vitesses (absolues)  $\mathbf{v}_M$  et  $\mathbf{v}_N$  des points  $M$  et  $N$ , à un instant donné, sont reliées par

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_N + \mathbf{MN} \times \boldsymbol{\omega}$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est la vitesse instantanée de rotation de  $\mathcal{S}$  à cet instant.

#### 4. Mouvements avec balourd

Un disque de masse  $M$  et de rayon  $R$  possède une densité de masse telle que le centre d'inertie  $G$  ne coïncide *pas* avec le centre  $C$  du disque; on note  $a = \|\mathbf{CG}\|$  la distance constante entre ces deux points (balourd).

On se donne un repère euclidien  $(O, (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$  de l'espace et décide que le disque roule sur l'axe des  $x$  (le sol) dans le plan  $z = 0$  (voir FIG. 1). On désigne par  $\theta$  l'angle, à un instant donné, entre le vecteur  $\mathbf{CG}$  et l'accélération de la pesanteur  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$  avec  $g = \text{const.} > 0$ . On appelle  $H$  le point du disque en contact avec le sol, à cet instant.

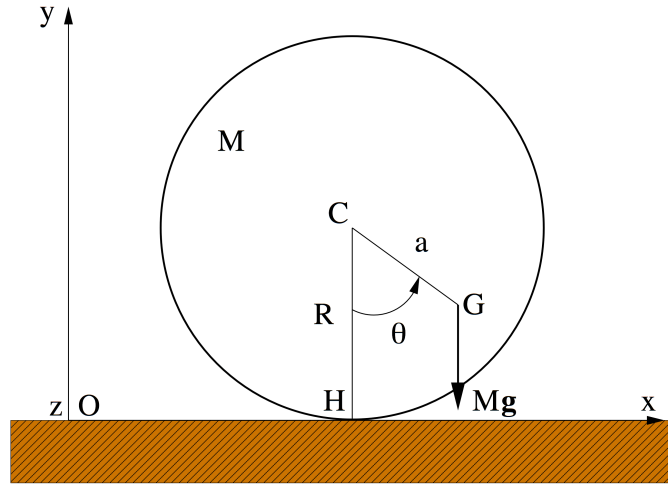


FIG. 1 – Disque roulant avec balourd

- (i) Donner les composantes des vecteurs  $\mathbf{HC}$ ,  $\mathbf{CG}$  et  $\mathbf{HG}$  dans le repère fixe choisi.
- (ii) Le disque roulant sans glisser sur le sol avec une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$ , trouver les composantes de la vitesse  $\mathbf{v}_G$  du centre d'inertie.
- (iii) Calculer l'énergie cinétique  $T_G^{\text{transl}}$  de  $G$  en fonction de  $M, R, a, \theta$  et  $\dot{\theta}$ .
- (iv) On note  $I_z$  le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe principal d'inertie passant par  $G$  et parallèle à  $\mathbf{e}_z$ . Donner l'énergie cinétique de rotation  $T_G^{\text{rot}}$  du solide en fonction de  $I_z$  et  $\dot{\theta}$ .
- (v) Exprimer l'énergie potentielle  $V$  du disque en fonction de  $M, g, a$  et  $\theta$ .
- (vi) En déduire l'expression du lagrangien  $L(\theta, \dot{\theta})$  du système.
- (vii) Trouver, grâce aux équations de Lagrange, l'équation différentielle du second ordre en  $\theta$  gouvernant le mouvement du solide.
- (viii) Intégrer l'équation du mouvement sans balourd, c'est-à-dire si  $a = 0$ .
- (ix) Linéariser l'équation du mouvement du système autour de la solution  $\theta \equiv 0$  dans le cas  $a \neq 0$ . En déduire la période  $T$  des petits mouvements en fonction de  $M, g, R, a$  et  $I_z$ .