Licence Sciences Physiques et Chimiques
Licence Mathématiques et Informatique
Unité d'Enseignement **PHY7**

Année universitaire 2004–2005
Faculté des Sciences de Luminy
Université de la Méditerranée

Mécanique du solide & Mécanique analytique

Examen partiel (29 novembre 2004)

1) Le lagrangien d'une particule de masse m est donné par

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x, t)$$

où $V(x, t)$ est une fonction de l'espace-temps bidimensionnel.

(i) Ecrire les équations du mouvement de cette particule. Que représente $V(x, t)$?

(ii) Trouver, grâce à la transformation de Legendre, l'hamiltonien $H(p, x, t)$ du système.

(iii) Quelle condition imposer à $V(x, t)$ pour que $H(p, x, t)$ soit une constante du mouvement ?

2) L'hamiltonien d'une particule de masse m et de charge électrique q est donné par

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2m}\left[(p_x + qB\,y)^2 + p_y^2\right]$$

où $B = \text{const.}$ est un champ magnétique imposé à ce système à deux degrés de liberté.

(i) Ecrire les équations de Hamilton.

(ii) En déduire l'accélération $(\ddot{x}, \ddot{y})$ de la particule en fonction de sa vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ et de la constante $\omega = -qB/m$.

(iii) Ecrire les équations du mouvements en termes de la variable complexe $z = x + iy$ et en donner la solution $z(t)$ correspondant aux conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$. Caractériser la trajectoire de la particule.

3) L'accélération de Coriolis pour un TGV de vitesse $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ est $\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$ où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de la terre.

(i) Représenter graphiquement $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ et $\mathbf{a}_{\text{Cor}}$ si le TGV relie Paris à Marseille (sur le même méridien). Lequel des rails est ou ouest est le plus usé ?

(ii) Calculer l'intensité $a_{\text{Cor}} = \|\mathbf{a}_{\text{Cor}}\|$ de l'accélération de Coriolis du TGV à la latitude λ.

(iii) Comparer a_{Cor} à l'accélération de la pesanteur, $g \cong 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$, si le train a une (très grande) vitesse $v_{\text{rel}} = 300\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ et $\lambda = 45^o$.

4) Calculer les crochets de Poisson des fonctions $T(p, q) = \frac{1}{2}p^2, D(p, q) = p\,q$ et $V(p, q) = \frac{1}{2}q^2$ de l'espace des phases $\mathbb{R}^2$. Montrer que T, D, V engendrent une algèbre de Poisson.