
MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

TD.1

1) Soit $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m(\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \omega^2\|\mathbf{r}\|^2)$ un lagrangien défini sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ où m et ω sont deux constantes positives. Ecrire les équations de Lagrange. En donner la solution générale. Interprétation physique du système ?

2) Trouver l'expression du lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ d'un pendule simple de masse m , longueur ℓ dans le champ de pesanteur constant $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ avec $g > 0$; on désignera par θ l'angle du pendule avec la verticale. En déduire l'équation du mouvement.

3) Même problème dans le cas du pendule sphérique.

4) Une haltère est constituée de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 reliés par une tige rigide (de masse négligeable) de longueur ℓ . Le point M_1 est contraint à se déplacer sur l'axe des x ; on posera $\mathbf{OM}_1 = x\mathbf{e}_x$ et on notera θ l'angle du vecteur $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ avec la verticale $-\mathbf{e}_y$. Le système est soumis au champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ avec $g = \text{const.} > 0$.

1. Donner l'énergie cinétique $T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ et l'énergie potentielle $V(\theta)$ du système. En déduire le lagrangien $L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$.

2. Ecrire les équations de Lagrange.

3. Etudier qualitativement les mouvements en discutant selon les valeurs de la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$.

5) Trois point matériels M_1, M_2 et M_3 de même masse m se déplacent sur l'axe des x . On note x_1, x_2 et x_3 leurs abscisses dans un référentiel donné. Ces point interagissent deux à deux : on désigne par $V_{ij} = V(x_i - x_j)$ le potentiel d'interaction entre M_i et M_j pour $i, j = 1, 2, 3$ & $i \neq j$ où V est une fonction donnée.

1. Donner le lagrangien du système. En déduire les équations du mouvement.

2. Donner l'expression de l'énergie totale E du système et vérifier que c'est bien une constante du mouvement.

3. Question subsidiaire : Dans le cas où $V(x) = g/x^2$ avec $g = \text{const.} > 0$, vérifier que

$C = m\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3 - \dot{x}_1V_{23} - \dot{x}_2V_{31} - \dot{x}_3V_{12}$ est une constante du mouvement supplémentaire.¹

¹Calogero-Ragnisco.

6) On considère le lagrangien suivant dépendant du temps : $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ où α et ω sont des constantes positives. Quel système physique à un degré de liberté décrit-il ?

7) Soit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i(\dot{q}^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (q^i)^2 / C_i + \sum_{i=1}^N E_i(t) q^i$ le lagrangien d'un système et $F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_i(\dot{q}^i)^2$ sa fonction de dissipation. Ecrire les équations de Lagrange pour (L, F) et donner, dans le cadre de l'électrocinétique, l'interprétation physique du système ainsi mis en équations.

8) Un point matériel M_1 de masse m_1 est relié par un fil souple inextensible, de longueur ℓ , à un point matériel M_2 de masse m_2 . Le point M_1 est astreint à se déplacer sur une table horizontale d'équation $z = 0$; le fil passe à travers un trou localisé à l'origine O et le point M_2 évolue alors sous la table. Le dispositif est plongé dans le champ de pesanteur $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ avec $g = \text{const.} > 0$.

1. Montrer que le système possède deux degrés de liberté ($\mathcal{N.B.}$ Utiliser les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan de la table et introduire la côte $z \geq 0$ du point M_2 .)
2. Déterminer l'expression du lagrangien $L(\theta, \dot{\theta}, z, \dot{z})$ du système.
3. Montrer que θ est une coordonnée cyclique. En déduire que $\lambda = m(\ell - z)^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Interprétation physique ?
4. En déduire, pour une la valeur de λ donnée, l'accélération \ddot{z} du point M_2 en fonction de z et des constantes du problème.
5. Pour quelles conditions initiales $(\dot{\theta}_0, z_0)$ le point M_2 sera-t-il en équilibre ?
6. Etudier qualitativement les différents mouvements possibles du point M_2 selon les valeurs de $\lambda - \lambda_0$.

9) Une perle de masse m glisse sans frottement sur une tige tournant, autour de l'origine O d'un plan vertical, avec une vitesse angulaire ω . Le système est soumis au champ de pesanteur constant d'intensité $g > 0$. On note $r(t)$ l'abscisse de la perle sur la tige orientée. Ecrire l'équation de Lagrange dont la fonction $r(t)$ est solution. Donner la solution générale de cette équation différentielle. Etudier le cas particulier des conditions initiales $r(0) = \dot{r}(0) = 0$.