
MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

TD.2

1) Soit $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \|\mathbf{p}\|^2/(2m) + m\omega^2\|\mathbf{r}\|^2/2$ un hamiltonien défini sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ où m et ω sont deux constantes positives. Ecrire les équations de Hamilton. Conclusion ?

2) Déterminer l'hamiltonien $H(p_\theta, \theta)$ du pendule simple de masse m et longueur ℓ dans le champ de pesanteur constant $g = \text{const.} > 0$. En déduire l'équation du mouvement.

3) Même problème pour l'hamiltonien $H(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi)$ du pendule sphérique.

4) Le lagrangien d'un oscillateur anharmonique est donné par

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - \alpha x^3 + \frac{1}{2}\beta x\dot{x}^2$$

où m est la masse et ω la pulsation propre de l'oscillateur ; on désigne par α et β deux constantes de couplage non linéaire. Déterminer l'hamiltonien $H(p, x)$ du système ; écrire les équations de Hamilton.

5) L'hamiltonien décrivant les mouvements d'une particule de masse m et de charge électrique q est donné par

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \|\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, \mathbf{r})\|^2 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p} - \frac{q}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

où $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Déduire des équations de Hamilton la nature des équations du mouvement. Interprétation physique du vecteur *constant* \mathbf{B} ? Prouver que $\boldsymbol{\pi} + q\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ et $\langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi} \rangle$ sont des constantes du mouvement. En déduire que si \mathbf{r}_\perp désigne la projection orthogonale de la position \mathbf{r} de la particule sur le plan \mathbf{B}^\perp , alors

$$\mathbf{r}_\perp(t) - \mathbf{r}_\perp(0) = \frac{1}{q\|\mathbf{B}\|^2} \mathbf{B} \times [\boldsymbol{\pi}(t) - \boldsymbol{\pi}(0)].$$

6) Si l'on considère le lagrangien suivant dépendant du temps : $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ où α et ω sont des constantes positives, trouver l'hamiltonien $H(p, x, t)$ du système. Vérifier que les équations de Hamilton restituent l'équation du mouvement d'un oscillateur amorti.

7) Désignons par $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)$ les coordonnées canoniques de l'espace des phases $(\mathbb{R}^3)^* \times \mathbb{R}^3$. (i) Calculer les crochets de Poisson suivants : $\{p_i, p_j\}$, $\{p_i, q^j\}$ et $\{q^i, q^j\}$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$. (ii) Calculer pour tous $i, j = 1, 2, 3$ les crochets de Poisson $\{L_i, L_j\}$ des composantes du moment angulaire $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Remarque ? (iii) Calculer les crochets de Poisson $\{L_i, p_j\}$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$. Dédurre des questions précédentes que l'espace vectoriel (réel) engendré par les 6 observables (L_1, L_2, L_3) et (p_1, p_2, p_3) est préservé par les crochets de Poisson.¹

8) Une particule de masse m est plongée dans un champ central dérivant du potentiel $V(r)$ où $r = \|\mathbf{r}\|$. On désigne par $H(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ son hamiltonien. Calculer les crochets de Poisson $\{H, \mathbf{L}\}$. Conclusion ?

9) A quelle condition la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

est-elle une transformation canonique de \mathbb{R}^2 ? Montrer que ces transformations linéaires forment un sous-groupe de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.

10) Déterminer la transformation canonique de \mathbb{R}^2 dont la fonction génératrice est donnée par $F(q, Q) = qQ$.

¹C'est ce que l'on appelle une *algèbre de Lie*, ici celle du groupe euclidien $E(3)$.