
MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

TD.3

1) Un vaisseau spatial possède une accélération $\ddot{\mathbf{b}}$ et une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = 0$ par rapport à la terre. Une particule test est en chute libre dans le champ de gravitation terrestre $\mathbf{g}$.

(i) Trouver sa vitesse $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ et son accélération $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ par rapport au vaisseau.

(ii) Déterminer $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ dans le cas particulier, $\ddot{\mathbf{b}} = \mathbf{g}$, où le vaisseau est lui-même en chute libre. Commentaire ?

2) Un changement de référentiel est donné par la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\theta(t)$ dépend différentiablement du temps.

(i) Donner les composantes du vecteur instantané de rotation $\boldsymbol{\omega}(t)$.

(ii) Vérifier que $A(t) = \exp(j(\theta(t)\mathbf{e}_3))$.

(iii) En déduire l'expression des composantes de la vitesse $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ et de l'accélération $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ relatives en fonction de celles de la vitesse $\mathbf{v}$, de l'accélération $\mathbf{a}$ absolues et de $\theta(t)$.

3) La position d'un compas gyroscopique par rapport à un référentiel "fixe" est déterminée par la matrice de rotation (suspension à la Cardan)

$$A(t) = A_3(t)A_2(t)$$

où $A_i(t) = \exp(j(\theta_i(t)\mathbf{e}_i))$ est une matrice de rotation autour de la direction $\mathbf{e}_i$, d'un angle $\theta_i(t)$, pour $i = 1, 2, 3$.

(i) Déterminer les composantes $\boldsymbol{\omega}(t)$ du vecteur instantané de rotation du compas dans le repère fixe.

(ii) En déduire les composantes $\boldsymbol{\Omega}(t)$ du vecteur instantané de rotation du compas dans le repère mobile.

4) Le lagrangien d'une particule de masse m en chute libre dans le champ de gravitation newtonien créé par un astre à symétrie sphérique admet l'expression suivante

$$\ell(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|} \quad (\mathbf{r} \neq 0)$$

dans un référentiel “fixe” de Copernic; ici G est la constante de Newton et M la masse de l'astre. Cet astre est animé d'un mouvement de rotation caractérisé par une matrice de rotation A dépendant du temps. On désigne par $\mathbf{R} = A^{-1}\mathbf{r}$ la position d'un point matériel relativement à cet astre.

(i) Donner l'expression de la vitesse absolue $\dot{\mathbf{r}}$ de ce point en fonction de A , $\mathbf{R}$, $\dot{\mathbf{R}}$ et de la vitesse instantanée de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ exprimée dans le repère mobile.

(ii) En déduire l'expression du lagrangien $L(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) = \ell(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ du point matériel dans le repère mobile.

(iii) Ecrire les équations de Lagrange pour le lagrangien $L(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$ ainsi trouvé. En déduire les équations du mouvement $m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\Omega})$ du point matériel en chute libre exprimées dans le référentiel de l'astre. Commentaires?

5) On utilise un fil à plomb pour déterminer, en principe, la “verticale” en un point donné de la terre. Il faut cependant tenir compte d'une correction due à la rotation diurne de la terre. Utiliser l'expression des forces d'inertie dans un référentiel lié à la terre pour déterminer l'angle α entre la verticale vraie et la direction du fil à plomb en un point de latitude λ donnée. $\mathcal{AN}$. Evaluer l'ordre de grandeur de α si $\lambda = 45^\circ$ (on prendra pour rayon de la terre $R \cong 6400 \text{ km}$ et $g \cong 10 \text{ m s}^{-2}$ pour l'accélération de la pesanteur au sol).

6) On considère une courbe $M(s)$ de l'espace euclidien tridimensionnel, paramétrée par l'abscisse curviligne s . Si $\mathbf{t} = dM/ds$ désigne la tangente unitaire, la normale unitaire est définie par $\mathbf{n} = \varrho^{-1} d\mathbf{t}/ds$ où ϱ est la *courbure* de cette courbe; la binormale unitaire est alors $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

(i) Montrer que $A(s) = (\mathbf{t} \ \mathbf{n} \ \mathbf{b})$ définit un repère orthonormé direct en tout point $M(s)$; on appelle $A(s)$ *repère de Frénet*.

(ii) La *torsion* τ de la courbe est introduite par $d\mathbf{b}/ds = -\tau \mathbf{n}$; déterminer la vitesse instantanée de rotation $\boldsymbol{\omega}(s)$ du repère de Frénet. En déduire et l'expression de $d\mathbf{n}/ds$.